APPENDICE 1

MOUVEMENT ET MATHÉMATIQUE

Traiter du rapport entre le mouvement et les mathématiques, c'est embrasser toute l'histoire des mathématiques, des mouvements de pensée, du mouvement de la pensée. Il fallait se restreindre, et nous avons choisi de dessiner les contours de l'histoire des mathématiques, parfois mal connue des mathématiciens eux-mêmes. Nous avons dû tailler dans le vif, ignorer de grands Analystes comme Weierstrass, ne pas parler de Gauss qui pourtant s'est occupé du mouvement des planètes ; ne pas citer le nom de Hilbert, un des pères les plus éminents des mathématiques contemporaines dont les premiers travaux portent sur les invariants qui ont des propriétés remarquables de stabilité au travers de certains mouvements de transformation. Nous avons trop peu insisté sur les rapports entre les mathématiques et le mouvement de la pensée par lequel on comprend certains aspects de la formation des « êtres abstraits », du raisonnement, et qui motivent bien des réformes de l'enseignement actuel. Le lecteur nous pardonnera peut-être ces insuffisances si nous avons réussi à susciter en lui le désir d'approfondir et sa connaissance des mathématiques et ses réflexions sur la représentation de l'environnement par notre pensée, dont la logique du mouvement est encore à préciser.

La prise de conscience du mouvement est naturelle à l'homme. Dans la mesure où la pensée contient l'image dynamique du moi, simule les déplacements du corps, suit la course de l'animal, le vol de l'oiseau, l'avancée des masses nuageuses, le tourbillon des éléments, la rotation des étoiles, elle s'assimile au mouvement qui, pour Anaximène, « existe de toute éternité », ou encore selon les Anciens « est le langage des forces éternellement vivantes, dont l'Harmonie seule règle le cours. Que l'Harmonie vienne à se rompre, et les forces se déchaînent, et le mouvement devient danger. Que l'Harmonie règne, et les forces s'enchaînent, et le mouvement devient beauté ». Cette beauté, on la découvre par l'observation du mouvement stable et « circulaire » des astres qui, très tôt, a frappé l'imagination des hommes. Ils ont cherché à décrire, à comprendre les phénomènes astronomiques intimement liés aux conditions climatiques, aux occupations agricoles, aux comportements biologiques, à tous les cycles d'activité de la Nature.

Aussi le rôle du mouvement stellaire a été essentiel dans le développement originel de la mathématique.

Prenons d'abord le cas de l'arithmétique : compter le nombre de têtes d'un troupeau de brebis, évaluer le nombre de ses adversaires, le nombre de lunes nécessaires pour se rendre au village voisin, ont certes favorisé la faculté de conception de nombres élevés dans l'esprit de l'homme. Entre le chat qui ne sait pas compter au-delà de deux, et l'homme qui arrive à se représenter la donnée de quatre objets, il y a un pas, qui paraît minime, mais que nous avons franchi. Sans aller bien loin d'ailleurs : le lecteur arrive-t-il à saisir mentalement et distinctement une collection de vingt objets ? L'important est que la notion d'induction ait pu être acquise, pour aboutir à la constitution de systèmes numériques qui permettent de concevoir de grands nombres, grâce auxquels il sera possible de constituer des calendriers. Que l'on s'imagine la somme d'observations qui ont été recueillies, les outils de calcul qu'il a fallu élaborer pour fixer l'année à 12 mois, à 365 jours comme le firent les Egyptiens, il y a six mille ans déjà ! Leur écriture numérique possédait dès cette époque (3500 A. J. C.) (*) des symboles pour représenter un, dix, cent, mille, cent mille et un million. Si le système égyptien de numération est décimal, le système sumérien, influencé par l'étude du ciel, est sexagésimal, comme le furent les systèmes hébreux de mesure des surfaces et des poids, comme l'est encore notre système de numération temporelle.

La géométrie a également bénéficié, dès ses débuts, de l'observation du mouvement des astres. Les courbes qu'ils décrivent dans l'espace ont certainement dû favoriser la formation de la notion géométrique de cercle qui permet de représenter sur un plan et d'étudier avec plus de facilité les mouvements des planètes et des étoiles. Les Sumériens ont poussé assez loin l'étude de cette figure géométrique « parfaite », qu'ils savaient diviser en secteurs dont l'angle était un multiple de 60°. Nul doute que les problèmes posés par la détermination des équinoxes, des solstices n'aient soulevé des problèmes de géométrie du triangle, de calcul d'angle : les Babyloniens possédaient des tables qui leur permettaient de calculer des sécantes d'angles (inverses de cosinus). Quelle science géométrique devaient posséder les Egyptiens pour être capables de construire la Grande Pyramide (2800 A. J. C.), orientée de manière que les rayons de Sirius, à son passage au méridien, la frappent à angle droit !

Le contenu exact de la science mathématique des Babyloniens et des Egyptiens, exercée par la caste des prêtres, nous est à peu près inconnu : soit parce que les tablettes et les papyrus ont été perdus, soit

(*) A. J. C. : Avant Jésus-Christ ; J. C. A. : Après Jésus-Christ.

parce qu'ils ne tenaient à transmettre leur savoir que de bouche à oreille, pour maintenir leur primauté sur les autres castes sociales.

Cependant les Grecs, comme Démocrite (v. 430 A. J. C.) par exemple, eurent une connaissance directe de ces premiers travaux mathématiques. Les astronomes grecs, Hipparque (140 A. J. C.), le plus fameux d'entre eux, Ptolémée (150 J. C. A.) contribuèrent grandement à développer entre autres la trigonométrie plane et sphérique dont le grand spécialiste fut Ménélaus (100 J. C. A.). Certains peut-être se souviennent du théorème de Ménélaus, ou du théorème de Ptolémée que voici : « le produit des longueurs des diagonales d'un quadrilatère convexe est égal à la somme des produits des longueurs des couples de côtés opposés. » Il est difficile de préciser l'influence exercée par les questions d'astronomie sur les travaux d'Euclide (450-380 A. J. C.) et d'Archimède (287-212 A. J. C.). Certains pensent qu'Euclide, comme de nos jours Bourbaki, n'est que le nom d'un collectif de mathématiciens qui se seraient assignés pour tâche de donner une présentation axiomatique des connaissances mathématiques de l'époque. Archimède, le plus grand des géomètres grecs, avait construit un planétaire qu'on rangeait parmi les merveilleuses réalisations de cet inventeur : sa construction a dû lui poser bien des problèmes dont il nous a laissé la solution dans ses livres. La remarque que la sphère pouvait s'obtenir par rotation d'un grand cercle autour de son diamètre, lui a sans doute suggéré l'étude plus générale des conoïdes, obtenues par « mouvement de rotation » d'un conique autour d'un axe, étude qu'approfondira plus tard Appollonius de Perge (v. 225 A. J. C.), le troisième des grands géomètres grecs.

Ni l'hégémonie de Rome, ni la chute de cet empire, ni les périodes troubles qui suivirent n'encouragèrent le développement des mathématiques et des sciences en général. La tradition mathématique se maintint pourtant à travers le Moyen Age, grâce en particulier à l'effort des savants persans (1) qui nous ont transmis l'œuvre grecque, et contribuèrent au développement de l'Algèbre. Comme toute évolution, celle de la science est le résultat d'un processus continu d'observations, de réflexions, où les résultats de l'un suscitent les découvertes de l'autre. Aussi ne faut-il pas minimiser l'apport des arithméticiens de l'époque. Très probablement sans la pression de l'arithmétique conjuguée à celle de la géométrie, Descartes (2) (1596-1650) n'aurait pas conçu la géométrie analytique qui fut le départ de nouveaux progrès en mathé-

(1) Une remarque que je dois à A. Lichnerowicz. S'ils s'exprimaient en arabe, ces savants étaient néanmoins, pour la plupart d'entre eux d'origine iranienne.

(2) Descartes doit énormément à ses prédécesseurs en la matière ; N. Oresme (1323-1382) et L. Pacioli (1445-1514).

matiques. De même, par l'étude de l'arabesque, les bâtisseurs du flamboyant ont-ils à leur tour attiré l'attention sur le mouvant et le mouvement. Sans l'influence des mécaniciens du XV^e siècle comme Léonard de Vinci (1452-1519) pour qui « le mouvement est le principe de toute vie », les œuvres de Galilée (1564-1642), de Képler (1571-1630) qui marquent la renaissance du progrès spectaculaire et continu des mathématiques, n'auraient pas vu le jour.

Galilée, comme Archimède, était, entre autres, mécanicien. On sait l'influence de la mécanique sur les travaux mathématiques de l'inventeur de la célèbre vis : il étudia les spirales, il élabora la notion de centre de gravité et une « Méthode relative aux Problèmes Mécaniques » où il écrit « je suis persuadé que cette méthode n'est pas moins utile pour la démonstration même des propositions, car certaines d'entre elles d'abord évidentes pour moi par la mécanique, ont été démontrées après coup par la géométrie, parce que l'investigation par cette méthode est exclusive d'une démonstration. La recherche de la démonstration, précédée d'une certaine connaissance des questions par cette méthode, est, en effet, plus aisée que sa recherche sans cette connaissance. » Cette méthode était adaptée aux problèmes de mécanique statique, qui s'occupaient essentiellement de leviers et de poulies, c'est-à-dire de moyens de transmettre et de décupler l'action du mouvement. On trouve dans l'Optique d'Euclide (proposition LI) la première introduction de la notion de mouvement relatif dans un document de la mathématique grecque ; mais il n'est pas faux de dire que les Anciens ont à peu près ignoré la mécanique dynamique. Le mérite de son introduction en revient à Galilée : « Nous apportons sur le sujet le plus ancien une méthode absolument nouvelle. Il n'est peut-être rien dans la nature d'antérieur au mouvement, et les traités que lui ont consacrés les philosophes ne sont petits ni par le nombre ni par le volume ; ... Ce sont ces faits... (comme par exemple le théorème II, proposition II : « Si un mobile, partant du repos, tombe avec un mouvement uniformément accéléré, les espaces parcourus en des temps quelconques par ce même mobile sont entre eux... comme les carrés de ces mêmes temps. » Ce sont donc ces faits)... qui vont être démontrés, et ainsi — ce que j'estime beaucoup plus important — ouvrir l'accès à une science aussi vaste qu'éminente, dont mes propres travaux marquent le commencement. »

Képler, s'appuyant sur les travaux de l'astronome Tycho-Brahé, énonça les trois lois qui allaient permettre plus tard à Newton de fonder la mécanique céleste moderne : (i) Les planètes tournent autour du soleil selon des orbites elliptiques dont le soleil est un foyer. (ii) Le rayon vecteur qui joint le soleil à une planète balaie des aires égales en des temps égaux. (iii) Le carré de la durée d'une révolution complète d'une planète sur son orbite est proportionnel au cube du demi-grand axe de l'orbite. Si l'on songe qu'il a fallu 1 800 années pour que les découvertes grecques sur les coniques trouvent, grâce à Képler, leur application en astronomie, 1 800 années pour qu'on s'aperçoive que ces activités de l'esprit mathématique n'étaient pas de « pures abstractions », on est en droit de se poser la question : qui peut porter un jugement *a priori* sur les critères et les délais d'application de l'activité créatrice de la pensée mathématique ?

La vérification de la seconde loi exigeait de savoir calculer des aires. Képler, comme avant lui Archimède d'ailleurs, s'y employa en utilisant des méthodes qui préfigurent celles, plus récentes, employées par Riemann (1826-1866).

Ainsi l'étude du mouvement stellaire suscita un renouveau du calcul des surfaces qui allait se développer pendant tout le XVII^e siècle. Ce n'est pas le seul calcul des surfaces qui retint l'attention : également celui des longueurs, notamment sous l'influence de Descartes qui écrit dans La Géométrie : « Tout problème de géométrie peut se réduire aisément à la connaissance des longueurs de certaines courbes suffisantes à leur construction. » C'est Jakob Bernoulli (1654-1705), l'aîné d'une grande famille de mathématiciens qui, en 1690, utilise le terme d'intégrale dans sa solution du problème posé par la recherche de la courbe isochrone (trajectoire suivie par un corps qui tombe avec une vitesse uniforme). En 1696, Leibniz (1646-1716) et Johann Bernoulli (1667-1748) s'accordent pour employer le terme de « calcul intégral ».

Le développement de la notion de série a été étroitement lié à celui du calcul trigonométrique et du calcul intégral. F. Viète (1540-1603) établit la relation :

$$\cos nx = \cos^n x - \frac{n(n-1)}{1.2} \cos^{n-2} x \sin^2 x + \cdots,$$

Wallis (1616-1703) introduit les séries infinies. On obtient par le truchement des séries un moyen de lever le paradoxe de Zénon d'Elée (v. 500 A. J. C.), paradoxe qui n'a guère troublé l'esprit des mathématiciens du dix-septième. Les Eléates, en particulier Parménide (v. 500 A. J. C.) et son élève Zénon étaient, semble-t-il, avant tout des philosophes et des logiciens. Il suffit de relire le Parménide de Platon pour admirer la richesse et la subtilité de leurs arguties. Il faut se rappeler que les résultats de Gödel des années 1930 n'ont d'autre origine que la traduction numérique de cet énoncé sémantiquement absurde (1) : moi, Epiménide, Crétois et menteur, je dis vrai en affirmant que tous les Crétois sont des menteurs. Ce raisonnement est

(1) On fera l'analyse de la construction de ce type d'énoncé dans le Tome III.

tout proche de celui de Parménide et de Zénon pour qui le monde est immobile. La flèche est-elle en mouvement, demande Zénon ? Non, car si on pouvait saisir sa position à un instant donné, elle ne serait pas en mouvement. Achille peut-il rattraper la tortue ? Non, car pendant qu'Achille parcourt la moitié de la distance qui le sépare de la tortue, celle-ci avance et tout est à recommencer. La réponse platonicienne à ces paradoxes a été donnée par Eudoxe (v. 380 A. J. C.).

Il admet la divisibilité infinie des grandeurs, et la proposition suivante qui ne traduit qu'un résultat maintenant classique sur les séries : si de toute grandeur, on retire une part au moins égale à sa moitié, de ce qui reste une autre partie au moins égale à la moitié, et ainsi de suite, le reste final sera inférieur à toute grandeur de cette sorte fixée à l'avance. On peut se demander pourquoi les Grecs, qui étaient à deux doigts de la réussite, n'ont pu élaborer la notion de série et en développer les propriétés.

Séries, calcul intégral, calcul différentiel sont les trois piliers de l'Analyse. Pour Laplace (1749-1827), « Fermat (fut) le véritable inventeur du calcul différentiel ». Ce juriste (1601-1665) s'occupa de problèmes d'optique et des problèmes d'extremums. Il faut ici souligner le rôle des problèmes optiques dans le développement des mathématiques. Nous avons déjà dit que, par son intermédiaire, la notion de mouvement relatif s'était introduite dans le discours grec. Son influence a sûrement été plus profonde. Il y a quelques milliers d'années, le prêtre était non seulement l'homme de science qui percevait les secrets des dieux, mais aussi l'architecte qui bâtissait les temples où se réunissait le peuple pour adorer les divinités. Comme architecte, le prêtre devait résoudre certains problèmes de perspective, d'ombre portée. Comme homme de science, observateur minutieux de la réalité, les formes des ombres du mur, de la colonne, de la sphère, formes qui s'étalent sur le sol avec l'inclinaison des rayons du soleil, ne pouvaient laisser indifférent son esprit curieux. De là est née la géométrie de la conique, l'ellipse, la parabole, l'hyperbole. De là est née l'étude du lieu géométrique, forme du mouvement que décrit un point situé sur un rayon lumineux, sur une courbe qui se déplace selon des règles fixées. Le rayon lumineux peut se déplacer dans le plan, ou dans l'espace tridimensionnel : « si d'un certain point, l'on mène à une circonférence de cercle, non située dans le même plan que ce point, une droite prolongée de part et d'autre, et si, le point restant fixe, la droite, circulant suivant la circonférence, reprend la position d'où elle a commencé de se mouvoir, j'appelle conique la surface ainsi définie... » écrit Appollonius. Comment ne pas croire que Thalès (v. 600 A. J. C.) eut l'idée de son théorème célèbre en observant le rayon lumineux qui, passant par le faîte *f* du cyprès avant de toucher le sol en *s*, frôle la tête *t* de l'homme qui, debout, fixe l'horizon : le rapport entre les longueurs des segments *st* et *sf* est le même que celui existant entre les longueurs des segments *sh* et *sa* où *a* désigne le pied de l'arbre, *h* la position de l'homme sur le segment *sa* ?

Si on doit à l'optique statique d'importants développements de la géométrie, on lui doit également, grâce à Appollonius, l'introduction de la notion d'Extrémalité dont l'application systématique a toujours été la source de découvertes profondes en physique comme en mathématiques : « Dans ce cinquième livre, j'expose des propositions relatives aux longueurs maxima et minima... » écrit Appollonius. Le principe d'extrémalité qui, de nos jours encore, reste mal compris et insuffisamment employé, Fermat en avait deviné tout l'intérêt. Dans « De Maximis et Minimis », il démontre proprement la loi optique de Descartes ($\sin i = n \sin r$) : « Notre démonstration s'appuie sur ce seul postulat que la nature opère par les moyens et les voies les plus faciles et les plus aisées. Car c'est ainsi que nous croyons qu'il doit être énoncé, et non pas, comme on le fait d'ordinaire, en disant que la nature opère par les voies les plus courtes ». Fermat s'attache donc à trouver les extremums des courbes. Il n'ignore pas que « les maxima et minima sont ... uniques et singuliers, comme le dit Pappus et le savaient déjà les Anciens ». Pour les déterminer « on peut remarquer que, dans certains cas, les questions de maxima et de minima peuvent se résoudre plus élégamment et peut-être plus géométriquement, au moyen de la construction d'une tangente... » écrit-il dans un mémoire « Sur les solutions des problèmes de géométrie par les courbes les plus simples ». Or, la pente de la tangente en un point à une courbe plane n'est autre que la dérivée à l'équation de la courbe en ce point : on voit ici comment la géométrie se lie à l'analyse. Les travaux de Fermat, complétés par ceux de Wallis, auteur notamment d'une « Grammatica Lingua Anglicanae » (1653), et de Barrow (1630-1677), aboutirent à la création du calcul différentiel presque simultanément mais indépendamment (1) l'un de l'autre par Leibniz et Newton (1642-1727). Les travaux de Newton précédèrent ceux de Leibniz, mais il ne les publia point immédiatement. Ils datent des années 1665-1666 et, comme les travaux géométriques de Fermat, ont pour origine l'optique. Ils portent non seulement sur le calcul différentiel, mais aussi sur la classification des cubiques dont il donne presque toutes les formes possibles (73 sur 78), sur les propriétés générales des courbes et sur la « construction organique des courbes ». La méthode de travail qu'emploie Newton mérite d'être notée : il utilise pour construire ses courbes un organum, un genre de pantogra-

(1) Ce point est controversé. Avec raison : l'Académie de Prusse (Berlin) a établi, vers le milieu du XVIIIe siècle, que Leibniz avait eu connaissance des travaux de Newton, et s'en était largement inspiré pour ses propres publications (cf. Buffon, Oeuvres, T. 12, p. 140-153, Garnier, 1855).

phe, et assoit ainsi son raisonnement, ses découvertes sur l'expérience directe. Ce n'est qu'en 1686, dans ses « Philosophiae Naturalis Principia Mathematica » qu'il fait pour la première fois allusion publiquement à sa méthode des fluxions qu'il a élaborée. « Les quantités que je considère ici (sont) variables et indéterminées, ... croissantes ou décroissantes, pour ainsi dire sous l'influence d'un flux ou mouvement perpétuel ; et j'appelle moment leur incrément ou décrément instantané... Ce sera la même chose, si, au lieu de moments, nous nous servons des vitesses d'incrément et de décrément (qui peuvent être appelées les mouvements, les variations, et fluxions de ces quantités). » Ainsi la vitesse d'incrément se confond avec la fluxion, c'est-à-dire la dérivée. Dans le texte de Newton que nous venons de citer, nous avons sauté la phrase que voici : « mais prenez soin à ne pas considérer des particules finies comme des moments : elles sont engendrées par les moments... » Derrière cette mise en garde, se profile la théorie actuelle des distributions mise au point il y a quelques années par L. Schwartz à partir des travaux du physicien Dirac, un spécialiste de la mécanique quantique. On en appréciera d'autant la justesse des concepts introduits par Newton dont la profonde perception du monde physique a fait un des meilleurs mathématiciens que l'Europe ait produit.

Il élabora une méthode pour résoudre un problème posé par Leibniz : trouver les trajectoires orthogonales à une famille de trajectoires données. C'est inconsciemment, probablement influencé par l'optique qui étudie les trajectoires de rayons lumineux orthogonales aux surfaces, que Leibniz a soulevé cette question ; elle fut reprise par Johann Bernoulli : on l'avait laissée tomber, écrit-il en 1717 « sub praetextu, quod nollius fit utilitatis ». C'est, à notre connaissance, la première allusion à un débat sur l'utilité des mathématiques. Là encore, on se prend à rêver quand on songe à l'intérêt de la notion sous-jacente. On remplace aujourd'hui le terme d'orthogonalité par celui de transversalité qui recouvre une situation plus générale ; l'origine de ce dernier terme remonte à l'Antiquité, une droite peut être transversale à un faisceau de droites ; il a été utilisé dans son acception actuelle par Kneser et par Thom qui lui a donné sa pleine valeur de généralité. La maxime philosophique que R. Thom énonce « tout manque de stabilité est dû à un défaut de transversalité », en montre la signification profonde. On ne sera jamais assez prudent dans notre jugement sur la valeur utilitaire d'une question scientifique. Faut-il rappeler cette réflexion de bon sens que nous légua Montaigne : « Tout sert en ménage » ?

Mais revenons aux travaux des géomètres du XVIII^{e} siècle qui se consacrèrent pour beaucoup d'entre eux à l'étude des mouvements : c'est le cas de Lagrange (1736-1813) qui dans ses « Recherches sur la Nature et la Propagation du Son » inventa, comme le reconnut Euler

(1707-1783), la théorie du calcul des variations. Les mathématiciens de l'époque s'intéressèrent à la résolution de certaines équations différentielles auxquelles ils ont en général laissé leur nom, et qui provenaient souvent des problèmes de mécanique stellaire qu'ils rencontraient. Les équations différentielles donnent la valeur de la vitesse ou de l'accélération d'un point sur une trajectoire en fonction de sa position sur cette trajectoire, dont il s'agit de déterminer la forme par connaissance de l'équation explicite. Parmi ces mathématiciens, aussi nombreux que célèbres, nous retiendrons le nom de Clairaut (1713-1765) : il fut le premier à étudier consciemment les problèmes de déformation de trajectoires, un des grands sujets actuels de réflexion des mathématiciens.

Le nom de Fourier (1768-1830) est attaché à l'étude du mouvement de propagation de la chaleur dans la matière. Il donna l'équation différentielle de ce mouvement, et la méthode pour la résoudre ; tout étudiant en mathématiques s'initie aujourd'hui aux séries trigonométriques de Fourier qui décrivent le mouvement ondulatoire, périodique, de la plupart des phénomènes naturels. Il est instructif de lire dans son mémoire que : « l'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques. Non seulement cette étude, en offrant aux recherches un but déterminé, a l'avantage d'exclure les questions vagues et les calculs sans issue, elle est encore un moyen assuré de former l'Analyse elle-même, et les éléments qu'il nous importe le plus de connaître et que cette science doit toujours conserver : ces éléments fondamentaux sont ceux qui se reproduisent dans tous les effets naturels ». A ces paroles font écho celles, plus récentes (1970), de Thom : « Il est probablement sain de suggérer que les problèmes *naturels* d'Analyse non linéaire trouveront leur origine dans la Physique, la Biologie, la Psychologie, etc., et non pas dans l'étude *a priori* de la théorie des Equations aux Dérivées Partielles. »

Les lignes de Fourier reflètent l'amorce d'un clivage qui n'a cessé depuis de s'accentuer entre mathématiciens et spécialistes d'autres disciplines. Jusqu'à la fin du siècle dernier, tous les mathématiciens étaient à la fois, et plus ou moins, physiciens, astronomes, qu'on appelait aussi géomètres, voire linguistes et philosophes. Mais avec le temps, la matière mathématique se constituait, et devenait assez riche pour être l'objet de travaux se rapportant uniquement à elle. Cependant, les véritables géomètres ont toujours tenu à ne pas se couper du réel, soubassement des mathématiques. Ils se distinguent par-là d'une tendance qui s'est affirmée chez certains mathématiciens modernes, et contre laquelle s'élevait avec force F. Klein (1849-1929) : « Nous sentons que, sous l'influence des développements modernes, notre Science, à mesure qu'elle avance à pas rapides, tend de plus en plus à s'isoler. Le rapport interne entre les Mathématiques et les Sciences naturelles théoriques, tel qu'il existait au point de jonction de deux domaines lorsque commença le développement de l'Analyse moderne, paraît devoir se rompre. C'est là un grand danger et qui grandit de jour en jour. » Il ajoutait « aussi, nous, membres de la Société Mathématique, nous voulons le combattre de toutes nos forces ... ». Disons que, pour le moins, son combat n'a pas été d'un égal succès. Les lignes que nous venons de citer sont extraites d'un discours que F. Klein prononça sur « Riemann et son influence sur les Mathématiques Modernes. » Tout comme Archimède dont nous avons vu la méthode de travail, ou Newton qui fabriquait ses courbes par des moyens mécaniques, le grand géomètre Riemann se livrait à des expériences physiques pour découvrir ou vérifier ses théorèmes. Klein insiste sur « le rapport intime de Riemann et de la Physique Mathématique ». Quand on sait que Riemann s'occupait notamment des théories électro-magnétiques, on voit tout ce que son œuvre doit au mouvement.

Avec Poincaré (1854-1912), on renoue le lien des mathématiques avec la mécanique céleste. Il s'attaque au problème à n corps : n solides soumis à l'action mutuelle de forces newtonniennes et dont on veut connaître les mouvements relatifs. Poincaré démontre avec Bruns que les mathématiques classiques sont impuissantes à résoudre quantitativement ce problème. Galilée avait jeté les bases de la mécanique quantitative, Poincaré fonde la dynamique qualitative qui se propose simplement de trouver les formes des trajectoires définies par des équations différentielles (donc par les valeurs des pentes des tangentes en chaque point des trajectoires). Le changement d'optique est profond : jusqu'à présent, les savants européens ne voulaient faire que de la science soit-disant quantitative. Ils reconnaissent maintenant que la science qualitative est d'aussi grande valeur que la précédente, et, renouant avec les Grecs, Platon et Aristote, portent leur attention sur la forme des objets, résultante de la dynamique des forces.

L'œuvre très vaste de Poincaré intéresse l'épistémologue qui trouve dans les écrits de ce savant de précieuses indications sur la manière dont fonctionne la pensée mathématique. Qui n'a pas lu « La Valeur de la Science » ou bien « La Science et l'hypothèse » ? Il est possible que depuis la parution de ces ouvrages, nous ayons un peu progressé dans notre compréhension de la nature et de l'activité de la pensée. L'acte essentiel de la pensée est de simuler les mouvements de notre environnement interne et externe : dans notre cerveau se fait une sorte de représentation de cet environnement, une espèce de modèle réduit, qui se comporte exactement comme cet environnement. Par « se comporte », entendons que les trajectoires des mouvements sont semblables. La différence essentielle est que bien souvent, la rapidité d'exécution du jeu des acteurs de notre scène interne est beaucoup plus rapide que celle des acteurs de la scène réelle. Ce qui

nous sauve dans bien des cas, car connaissant le dénouement de la pièce avant qu'elle ne soit complètement jouée, nous pouvons agir pour influer sur le cours des événements et modifier l'issue finale du drame. Que faut-il entendre par environnement interne et externe ? Pour l'environnement externe, il n'y a guère de difficulté à saisir ce que nous voulons dire. Parler de l'environnement interne est plus délicat : il s'agit non seulement, comme le pensait Poincaré, de nos muscles dont nous percevons les mouvements, mais aussi de chacun de nos organes, de chacune des composantes de notre activité physiologique dont il est nécessaire pour notre survie de déceler les changements. Cette pensée n'est que le prolongement naturel de ce mécanisme interne qui maintient en équilibre les différents éléments constitutifs de notre biologie. Un tel mécanisme porte le nom de système de régulation. Mais il est clair que cet équilibre ne s'obtient que par un jeu de comparaisons incessantes entre l'état présent de chacun de ces éléments, et l'état idéal dans lequel ils devraient se maintenir. Ce va-et-vient comparateur de notre système nerveux induit en notre pensée un flux analogue et incessant de comparaisons entre nos diverses images mentales qui, elles-mêmes, ont besoin d'être stabilisées et régulées. Ce sera bien sûr une trivialité de dire que la création mathématique est issue du mouvement de la pensée, sur lequel Bergson et Piaget eurent souvent l'occasion de réfléchir. Préciser la nature du substrat qui se meut, sa morphologie, ses déformations permises, les phases de ces mouvements est un travail délicat et peu avancé.

Toute analyse de l'activité de la pensée mathématique, et même de la pensée tout court, car la première n'est qu'un exemple de la seconde, ne peut se faire pour l'instant qu'à travers l'étude du langage, mot, phrase et discours. Cette nécessité est l'une des meilleures justifications de l'intérêt des études linguistiques qui se développent aujourd'hui. Il s'agit d'arriver à comprendre par quel processus un mot en appelle un autre pour amener à la construction d'une ou plusieurs phrases, comment la signification d'une phrase ébranle les différentes couches de notre mémoire pour susciter la création d'un discours. On peut distinguer deux types de discours : le démonstratif et l'évocatif. Le discours évocatif, on le trouve dans certains romans, dans certaines poésies, fixe la pensée qui erre, flotte et observe, en même temps qu'il lui sert de révélateur. Comme le démonstratif, le discours évocatif et intelligible procède par concaténation de formes homologues. La nature de ces formes, de la concaténation est bien sûr variable. Il peut y avoir concaténation immédiate de deux formes, l'une dite mâle, l'autre dite femelle, dont les bords respectifs sont agencés de manière telle qu'elles s'emboîtent, « cobordent » l'une dans l'autre pour créer une forme nouvelle. La concaténation peut se faire à distance quand par exemple la forme du toit d'une montagne évoque le dessin se détachant dans le ciel du fronton d'un temple. On est ici en présence d'un phénomène de résonance entre formes homologues. La différence entre le discours démonstratif et le discours évocatif tient au fait que la finalité de celui-ci n'est pas d'une évidente clarté à notre conscience. Au contraire, le discours démonstratif répond à une finalité précise en fonction de laquelle il s'organise compte tenu de certaines règles spécifiques à la nature du sujet traité. Certains esprits sont très habiles à construire le discours démonstratif. Ce ne sont pas forcément les plus doués pour définir la finalité à démontrer, dont le mécanisme de conception relève de la pensée évocatrice, plus connue sous le vocable d'intuition. Son activité est interne à la conscience et a souvent du mal à se révéler par le verbe ; elle se bloque sur la nouveauté d'une de ses constructions, de ses observations, parce que le processus de concaténation devient difficile à poursuivre justement à cause de cette nouveauté. Par effet de choc, celle-ci émerge alors de l'inconscient et peut s'exprimer par le langage. Il ne restera plus pour convaincre l'auditeur que de restituer par un discours démonstratif le détail du cheminement constructif qu'a suivi la pensée évocatrice.

L'étude de l'évolution des théories mathématiques sera peut-être un jour une source de travaux féconds sur la compréhension du développement semi-continu de la pensée, dont on cherchera à connaître l'embryologie, la paléontologie. On pourra par exemple établir l'histoire de la théorie des groupes sur laquelle on possède une documentation très complète. Elle a pour origine la recherche de toutes les solutions des équations algébriques. Les pionniers furent Lagrange, Ruffini (1765-1822) et Cauchy (1789-1857) avec son « Mémoire sur le nombre de valeurs qu'une fonction peut acquérir lorsqu'on permute de toutes les façons possibles les quantités qu'elle renferme ». On peut se demander comment l'idée de permutation est venue à ces auteurs. La perception, dans bien des cas l'observation inconsciente du mouvement de rotation des roues dentées des horloges, l'interversion de deux pions sur un échiquier, de deux cartes à l'intérieur d'un jeu laissent une trace dans le subconscient qui simule ces mouvements. Or, le cerveau travaille par analogie, c'est-à-dire par reproduction de formes homologues stables. Il est donc amené à utiliser les propriétés du mouvement de permutation qu'il avait eu l'occasion d'enregistrer dans sa perception de l'environnement. C'est ainsi que, à partir des travaux de ses prédécesseurs, Galois (1811-1832) a donné corps à la théorie des groupes. Il n'eut pas le loisir de tirer tout le parti possible de ses découvertes. C'est Jordan (1838-1922) qui, dans sa thèse, entrevit les applications géométriques de la théorie des groupes : « On pourrait voir une image de ce résultat dans le théorème de mécanique qui ramène le mouvement général d'un solide à un mouvement de translation, combiné avec une rotation autour du centre de gravité. »

Ces applications géométriques nécessitaient l'introduction de la notion de groupe continu, et l'étude de ces groupes ; elle fut entreprise et développée par le mathématicien norvégien S. Lie (1842-1899). Dès lors, la géométrie s'intéressa à l'action des groupes de mouvements de déplacements, en particulier rotations, translations, symétries, sur les divers éléments constitutifs des espaces sur laquelle elle est définie. Les mécaniques de Newton, d'Einstein, dont le même soubassement géométrique était masqué par l'appareil analytique, furent refondues, grâce notamment à E. Cartan (1869-1951). Aujourd'hui, par un enseignement préalable de géométrie différentielle, tout étudiant peut acquérir, sans grand effort conceptuel, la connaissance des différents types de mécanique que l'observation du monde physique nous a amenés à construire.

Ces mécaniques se présentent comme cas particuliers des systèmes dynamiques, probabilistes ou non. Dans cette théorie, on étudie les trajectoires possibles que suit un mobile dont on connaît à chaque instant la vitesse. Dans les cas intéressants, la réunion de ces trajectoires forme ce qu'on appelle une variété V, — par exemple un plan, une sphère — et au voisinage d'un point a sur la trajectoire, le déplacement du mobile peut être défini par un groupe continu de mouvements Φ, dont les éléments φ_t dépendent du paramètre temporel t : si à l'intant 0 le mobile est en a, $\varphi_0(a) = a$; à l'instant antérieur $-\tau$, très proche de 0, le mobile occupait sur la trajectoire la position $a_{-\tau}$ voisine de a : $\varphi_{-\tau}(a) = a_{-\tau}$; pareillement à l'instant τ, $\varphi_\tau(a) = a_\tau$; et $\varphi_\tau(\varphi_{-\tau}(a)) = \varphi_{\tau-\tau}(a) = a$. On peut donc définir dans ce cas le système dynamique par la donnée d'une variété V et d'un certain groupe de transformations Φ des points de la variété. On dit que Φ est un opérateur sur V. Le terme d'opérateur est fréquemment utilisé en mathématiques, dans des cas plus divers que celui que nous venons de citer en exemple, mais son emploi traduit toujours un mouvement de transformation des éléments d'un certain espace.

L'étude des systèmes dynamiques a influencé et continue de marquer profondément le développement des mathématiques contemporaines : ainsi elle est à l'origine de la notion introduite par Reeb de feuilletage d'une variété, notion sur laquelle travaillent de nombreux chercheurs. Si les lignes de trajectoire d'un mouvement sont dessinées sur un plan, elles feuillettent le plan. Ces lignes sont solution d'un système d'équations différentielles de dimension 1. Si le système d'équations différentielles est de dimension 2 et possède de bonnes solutions, celles-ci seront des surfaces, parfois planes, qui feuillettent la variété sur laquelle est défini le système d'équations différentielles. Par exemple, les feuilles d'un livre feuillettent le parallélépipède formé par ce livre. On peut se demander si, lorsqu'on modifie très légèrement les paramètres de ces équations différentielles, on définit toujours un feuilletage, et si le nouveau feuilletage obtenu est très voisin du feuilletage précédent.

Poincaré s'était posé des problèmes de ce genre, également Riemann quand il étudiait les déformations de variétés, ou Clairaut quand il se préoccupait des déformations de trajectoires. Nombreux furent et sont les mathématiciens de ce siècle attachés à l'étude de ces problèmes de stabilité. Pourtant, ce n'est que récemment, grâce à l'avancement des travaux mathématiques que l'intérêt philosophique de la notion de stabilité a été dégagé.

Une expérience n'est reproductible, une forme n'est présente, que pour autant qu'elles sont structurellement stables. » Ces vérités sont premières, à l'intuition d'en comprendre la portée, à l'art de savoir les utiliser. L'image suivante permet de voir comment on procède : imaginez une montagne ; si les flancs de la montagne sur laquelle vous grimpez sont assez « pentus », vous aurez tendance, sous l'effet de la pesanteur, à tomber ; si vous atteignez le sommet de la colline, en ce sommet, l'effet de la pesanteur ne vous jouera aucun mauvais tour, vous pouvez rester debout sur vos deux pieds sans crainte de vous retrouver par terre. Vous voyez donc, par cet exemple, qu'un phénomène stable, la stabilité de votre personne, est liée à un phénomène extrême, être au point le plus élevé de la montagne ; ce point, ce sommet est unique, on l'appelle une singularité. On conçoit donc qu'on s'intéresse aux problèmes d'extrémalité, à la recherche des singularités, à la forme des variétés au voisinage des singularités, aux problèmes de stabilité. Si en effet au voisinage du sommet, la montagne est très en pente, il n'est pas conseillé de trop remuer sous peine de perdre l'équilibre. Si par contre, en ce voisinage, la montagne est très arrondie, vous êtes beaucoup plus libre de vos mouvements, et la singularité est dite structurellement stable. Le travail des mathématiciens, en particulier H. Whitney, R. Thom, J. Mather, a donc été de rechercher les conditions selon lesquelles les singularités des applications sont structurellement stables, c'est-à-dire, étant donné un pic aigu défini par une application « ligne de niveau » f, de trouver une méthode pour rogner les aspérités du pic en déformant localement l'application f. On réalise ces déformations en fabriquant une famille $\mathcal{F}$ d'applications F de la forme $F = f + u_1 g_1 + \cdots + u_n g_n$ où les $g_1, \ldots, g_n$ dépendent de f et où $u_1, \ldots, u_n$ sont des paramètres. Selon les valeurs de ces paramètres, F est ou n'est pas structurellement stable. L'ensemble des valeurs des u_i à partir desquels F n'est plus stable s'appelle l'ensemble de catastrophe associé à la famille $\mathcal{F}$.

La théorie des catastrophes, combinée avec la théorie des systèmes dynamiques, permet de faire des modèles explicatifs de l'évolution d'un très grand nombre de phénomènes physiques, biologiques et même linguistiques. On doit à R. Thom de les avoir conçus. Comme selon Alain, « il faut prendre l'idée de celui-là même qui l'a inventée », nous nous permettrons de renvoyer le lecteur qui désire prendre connaissance de ces modèles d'évolution dynamique aux écrits du géomètre qui les a établis, et en particulier à son ouvrage « Stabilité Structurelle et Morphogenèse » ([SSM]).

Il est naturel de penser que, sous l'influence des problèmes posés par l'étude de ces modèles, la mathématique du mouvement connaîtra de nouveaux développements. Si, maintenant, on jette un coup d'œil rétrospectif sur l'esquisse historique que nous venons de dessiner, on reste confondu par la somme des concepts des résultats, des observations que la Mathématique doit aux diverses manifestations du Mouvement. Une remarque s'impose. De même que les études linguistiques, psychologiques, nous révèlent que la prise de conscience du spatial est antérieure à celle du temporel, ce point de vue était partagé par Bergson, de la même façon nous voyons qu'en mathématiques, la saisie du mouvement, c'est-à-dire de ce qui n'est pas fixe à notre échelle de la perception temporelle, a suivi la description géométrique et arithmétique d'un monde rigide. Il y a là, exprimé partiellement par le second principe de la thermodynamique, un phénomène général d'évolution de la nature et de notre pensée. L'inanimé, dit-on, précède l'animé, et dans l'ordre biologique, le mollusque dont la prise de conscience du temporel n'est pas bien grande, mais déjà meilleure qu'une couche de sédiments marins, précède le reptile et les mammifères dont l'homme est un des plus récents rameaux. Chez celui-ci, la prise de conscience du temporel existe, mais elle est tardive. Que signifie pour un enfant le vocable temps ? Nous-mêmes sommes mal à l'aise pour définir le concept qu'il recouvre. Pourtant, nous constatons que l'esprit humain devient de plus en plus apte à l'appréhender dans sa durée et dans ses effets ; l'acuité de la perception du temps augmente avec celle de l'espace. Nous étions en mesure, il y a 6 000 ans, de saisir les phénomènes « circulaires » très stables. Nos modèles mathématiques étaient alors statiques. Ils devinrent dynamiques avec Galilée et nous pûmes mathématiser le mouvement des planètes. L'étude plus fine de l'environnement conduisit au développement de la Physique mathématique à laquelle l'Analyse doit tant ; J. Leray et A. Lichnerowicz, entre autres, ont bâti leur œuvre en puisant auprès de cette source féconde l'enrichissement de la mathématique. Maintenant, nous devenons capables de mathématiser l'évolution des systèmes biologiques, d'adapter notre échelle de temps aux phénomènes que nous appelions transitoires. Sans doute l'évolution dans ce sens doit encore se poursuivre, s'affermir, et on peut s'attendre à voir de nouvelles notions mathématiques apparaître, inspirées par un approfondissement des diverses expressions du temps. Il se pourrait également que cette évolution influe sur notre manière de raisonner. Le raisonnement linéaire utilisé par les mathématiciens procède par vrai ou faux ; il repose sur la perception du conflit archétypal limité à deux actants ; il est *a*-temporel par la simplicité figée de sa conception. Les Grecs, par exemple avec Héraclite, ont tenté de faire ressurgir le temps dans le cadre d'une dialectique fondée sur la logique linéaire. Les résultats sont étonnants, trop d'ailleurs, ce qui suggère qu'il y a autre chose derrière le paravent terminologique. On sait bien maintenant que le conflit n'est pas limité à deux mais à plusieurs actants. Or, dès qu'il y a groupe, il existe un système dual qui le régule, agit sur le mouvement de chaque élément pour assurer la stabilité spatio-temporelle de l'ensemble. C'est donc qu'il existe une théorie générale de la régulation, géométrico-mécanique, dont l'assimilation par la pensée peut susciter la formation d'un mode de raisonnement plus subtil et plus riche que le simple raisonnement dichotomique qui, par ailleurs, n'est guère adapté à la vie sociale.

On conçoit alors que des mathématiciens pensent à tourner leurs regards vers l'étude de la régulation du mouvement. Comprendre la genèse de cette régulation, en connaître les mécanismes secrets, peuvent, pour le bien de l'homme, enrichir toutes les disciplines. Nos sociétés occidentales ont méconnu l'importance du Tao que la délicate pensée chinoise avait su mettre à sa vraie place. Pourtant Platon ne disait-il pas : « Quand l'Harmonie est dénouée chez nous, dans les êtres vivants, la nature se dénoue en même temps et la douleur apparaît. Quand il y a de nouveau harmonie et retour à la nature primitive, apparaît la joie, s'il faut parler, en peu de mots, le plus brièvement possible, de choses si grandes... » L'heure est venue de méditer ces paroles divines.

Orsay, novembre 1971.

APPENDICE 2

DÉPLOIEMENT UNIVERSEL D'UNE FONCTION

1. LE THÉORÈME DE RÉDUCTION.

Considérons une fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On pensera ici à l'exemple tout simple de la parabole. *A priori*, par rapport à un système donné de coordonnées, la position du graphe de g dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ est quelconque (le *graphe* G de g est l'ensemble des couples $(x, g(x))$).

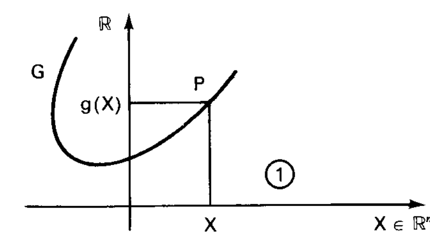

Fig. 160.

L'étude globale du graphe de g est peu facile *a priori*. Par contre, on peut procéder par des études locales qu'on raccordera entre elles si nécessaire. Une étude locale particulière consiste à se placer en un point P du graphe G et à exprimer la forme locale de G à l'aide d'un développement taylorien de g sur un voisinage de $P = (\hat{x}, g(\hat{x}))$. On sait écrire de manière analytique

$$g(x + \delta) = g(x) + \frac{\delta}{1\,!} g'(x) + \text{«} \frac{\delta^2}{2\,!} g''(x) \text{»} + \cdots .$$

Il est évidemment commode de déplacer le système de coordonnées de sorte que $(x, g(x))$ soit l'origine du repère.

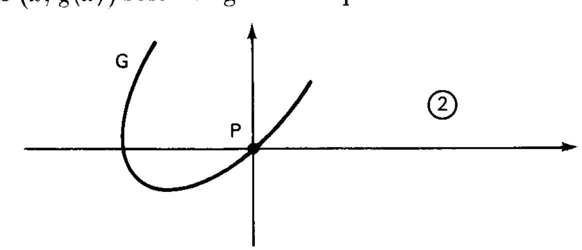

Fig. 161.