mathématiciens procède par vrai ou faux ; il repose sur la perception du conflit archétypal limité à deux actants ; il est a-temporel par la simplicité figée de sa conception. Les Grecs, par exemple avec Héraclite, ont tenté de faire ressurgir le temps dans le cadre d'une dialectique fondée sur la logique linéaire. Les résultats sont étonnants, trop d'ailleurs, ce qui suggère qu'il y a autre chose derrière le paravent terminologique. On sait bien maintenant que le conflit n'est pas limité à deux mais à plusieurs actants. Or, dès qu'il y a groupe, il existe un système dual qui le régule, agit sur le mouvement de chaque élément pour assurer la stabilité spatio-temporelle de l'ensemble. C'est donc qu'il existe une théorie générale de la régulation, géométrico-mécanique, dont l'assimilation par la pensée peut susciter la formation d'un mode de raisonnement plus subtil et plus riche que le simple raisonnement dichotomique qui, par ailleurs, n'est guère adapté à la vie sociale.

On conçoit alors que des mathématiciens pensent à tourner leurs regards vers l'étude de la régulation du mouvement. Comprendre la genèse de cette régulation, en connaître les mécanismes secrets, peuvent, pour le bien de l'homme, enrichir toutes les disciplines. Nos sociétés occidentales ont méconnu l'importance du Tao que la délicate pensée chinoise avait su mettre à sa vraie place. Pourtant Platon ne disait-il pas : « Quand l'Harmonie est dénouée chez nous, dans les êtres vivants, la nature se dénoue en même temps et la douleur apparaît. Quand il y a de nouveau harmonie et retour à la nature primitive, apparaît la joie, s'il faut parler, en peu de mots, le plus brièvement possible, de choses si grandes... » L'heure est venue de méditer ces paroles divines.

Orsay, novembre 1971.

APPENDICE 2

DÉPLOIEMENT UNIVERSEL D'UNE FONCTION

1. LE THÉORÈME DE RÉDUCTION.

Considérons une fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On pensera ici à l'exemple tout simple de la parabole. *A priori*, par rapport à un système donné de coordonnées, la position du graphe de g dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ est quelconque (le *graphe* G de g est l'ensemble des couples $(x, g(x))$).

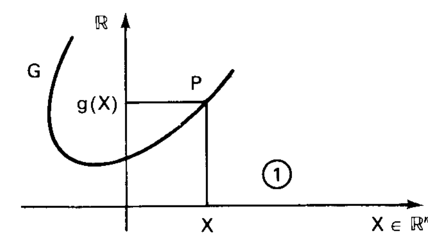

FIG. 160.

L'étude globale du graphe de g est peu facile *a priori*. Par contre, on peut procéder par des études locales qu'on raccordera entre elles si nécessaire. Une étude locale particulière consiste à se placer en un point P du graphe G et à exprimer la forme locale de G à l'aide d'un développement taylorien de g sur un voisinage de $P = (\hat{x}, g(\hat{x}))$. On sait écrire de manière analytique

$$g(x + \delta) = g(x) + \frac{\delta}{1\,!}g'(x) + «\frac{\delta^2}{2\,!}g''(x)» + \cdots .$$

Il est évidemment commode de déplacer le système de coordonnées de sorte que $(x, g(x))$ soit l'origine du repère.

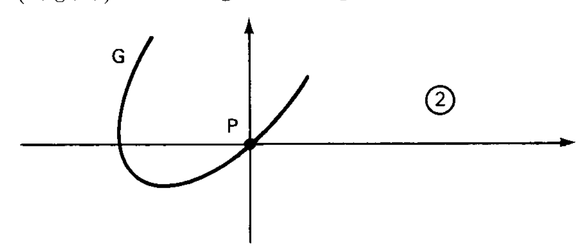

FIG. 161.

Le passage de la situation ① à la situation ② peut se faire de mille manières : on peut en effet faire pivoter comme on veut le repère autour de P. Le passage de ① à ② s'accomplit par une application qu'on peut supposer sans crainte différentiable et bicontinue, i.e. par un difféomorphisme φ. Si dans le repère initial, l'expression analytique de g est simple, la nouvelle expression analytique du même graphe dans le nouveau repère peut être apparemment compliquée. On tâchera donc de faire en sorte que la simplicité puisse être décelée.

Lorsqu'on est dans la situation ②, le développement analytique de la nouvelle fonction h définissant le même objet intrinsèque G permet d'obtenir un développement taylorien plus simple. On a en effet

$$h(\delta) = \frac{\delta}{1\,!} h'(0) + « \frac{\delta^2}{2\,!} h''(0) » + \cdots .$$

La dernière simplification analytique, facile à obtenir, consiste à choisir le repère de manière que le graphe G soit tangent à l'hyperplan $\mathbb{R}^n$ dans l'espace $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$:

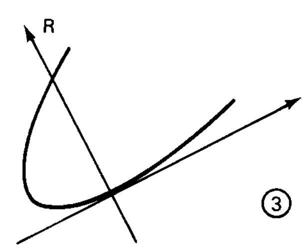

Fig. 162.

Par conséquent, à l'aide d'une rotation qui est encore un difféomorphisme on passe à la situation ③ où

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f'(0) &= 0 \end{aligned}$$

et $$f(\delta) = « \frac{\delta^2}{2\,!} f''(0) » + « \frac{\delta^3}{3\,!} f'''(0) » + \cdots .$$

Exemple : Soit la parabole

$$G = (x, g(x)) = (x, x^2 + 6\,x + 8).$$

On pose :

$$G = (y, h(y)) = \varphi(x, g(x)) = (\varphi_1(x, g(x)), \varphi_2(x, g(x)))$$

avec ici

$$\begin{cases} y = \varphi_1((x), g(x)) = x + 2 \\ h(y) = \varphi_2(x, g(x)) = g(\varphi_1(x)) = y^2 + 2\,y . \end{cases}$$

La droite $2\,y$ tangente à l'origine à G. On fait donc faire une rotation des axes d'angle α tel que $\operatorname{tg} \alpha = 2$;

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \text{entraîne :} \quad \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 5 ,$$

soit

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \text{et} \quad \sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} .$$

On pose

$$\begin{aligned} G = (z, f(z)) &= \psi(y, h(y)) \\ &= (\psi_1(y, h(y)), \psi_2(y, h(y))) , \end{aligned}$$

avec ici :

$$\begin{aligned} z &= \psi_1(y, h(y)) = y \cos \alpha + h(y) \sin \alpha \\ f(z) &= \psi_2(y, h(g)) = y \sin \alpha - h(y) \cos \alpha . \end{aligned}$$

On résout l'équation $z = y \cos \alpha + (y^2 + 2\,y) \sin \alpha$ en y, et on porte dans la valeur de y obtenue dans l'équation $f(z) = y \sin \alpha - h(y) \cos \alpha$.

On voit ici qu'on obtient pour l'équation de la parabole $(z, f(z))$ une expression peu simple.

Notons γ la composition des difféomorphismes φ puis ψ, γ induit sur $\mathbb{R}^n$ un difféomorphisme η, de sorte que $h(\eta(x)) = f(y)$.

Les fonctions f et h qui définissent le même graphe G sont donc équivalentes à un difféomorphisme près. Elles ont en particulier le même nombre d'extrémums : en effet $f' = h'\,\eta'$ comme η' est un difféomorphisme, les zéros de f' sont déterminés par ceux de h'. Ainsi si on fait rouler G sur l'hyperplan $\mathbb{R}^n$, sa représentation analytique change sans que varie sa forme, précisée par les extrémums de cette représentation.

Nous voici donc en un tel extrémum, à l'origine de surcroît :

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f'(0) &= 0 \end{aligned} \qquad \left(f' = \operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \right)$$

si f est à n variables.

$$f(\delta) = « \frac{\delta^2}{2\,!} f''(0) » + « \frac{\delta^3}{3\,!} f'''(0) » + \cdots$$

où :

$\delta = (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n)$

$$f''(0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \text{ calculée en } x = 0$$

« $\delta^2 f''(0)$ » $= \delta f''(0) . \delta'$, où δ' est le transposé de δ.

La matrice $f''(x) = H(f)$, matrice hessienne de f, possède un certain rang $r(x)$ pour chaque valeur de x. Pour $x = 0$, $n - r(0) = k$ s'appelle le *corang* de f en la singularité $x = 0$.

On sait qu'il existe une transformation linéaire régulière A telle que

$$Af''(0)A^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & & 0 \\ & h_{11} & 0 \\ 0 & 0 & h_{rr} \end{vmatrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\end{matrix}}\right\}_r = H .$$

On en déduit le résultat suivant (cf. II.14.8) :

Théorème de Gromoll-Meyer : *Il existe un difféomorphisme μ de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même de sorte $\mu(\delta) = \alpha$*

$$f(\mu(\delta)) = \frac{1}{2}\alpha H \alpha' + « \frac{\alpha^3}{3!} r'''(0) » + \cdots$$

$$\boxed{f(\mu(\delta)) = \sum_{i=k+1}^{n} \varepsilon_i \alpha_i^2 + r(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)} \quad \varepsilon_i = \pm 1 \qquad (1)$$

où r appelée la singularité résiduelle est une fonction des seules variables $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$, dont le développement limité au voisinage de $\alpha = 0$ commence par des termes de degré au moins égal à 3.

On dira que f écrite selon l'expression (1) se présente sous sa forme réduite.

Exemple : Considérons $f = x_1^2 + x_2^2 + \dfrac{y^4}{4}$. f se présente ici sous forme réduite. On en fabriquera une expression non réduite en effectuant un difféomorphisme (par exemple polynomial exponentiel)

$$\begin{aligned} x_1 &= \mu_1(z_1, z_2, w) \\ x_2 &= \mu_2(z_1, x_2, w) \\ y &= \mu_3(z_1, z_2, w) . \end{aligned}$$

Nous avons donné p. 263 un algorithme permettant de trouver dans les cas simples la forme réduite de f (cf. l'exemple p. 295).

On notera l'intérêt de ce théorème qui permet de réduire un nombre considérable de données *a priori* indépendantes (par exemple $n = 30\,000$) à un nombre parfois très réduit (par exemple $k = 3$) de variables pertinentes.

2. ÉQUIVALENCE POLYNOMIALE ET *k*-DÉTERMINATION.

On a vu tout à l'heure que les fonctions f et h définissaient le même graphe G, à un difféomorphisme près η. On dira donc que f et h sont des *fonctions équivalentes* ou ayant *même « forme »*.

Comme on l'a déjà remarqué f peut avoir une expression analytique simple par exemple polynomiale. h au contraire, décrira finalement le même objet, mais son expression analytique peut être fort compliquée. Notre but va être de chercher une représentation de G, si elle existe, à l'aide d'une fonction polynomiale de degré k, qui appartient au type le plus simple des fonctions calculables. L'espace fonctionnel des fonctions de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est évidemment très gros, sa dimension est infinie. On va s'efforcer de travailler sur des espaces plus petits.

Définitions :

1. Soit h et h' deux fonctions qui prennent les mêmes valeurs sur un voisinage de l'origine $U(0)$. On les considère comme équivalentes. L'ensemble des fonctions équivalentes en ce sens à h forment une classe (d'équivalence) de fonctions qu'on appelle un *germe*. On note ce germe par $(h, 0)$ où h est donc un représentant de la classe considérée. On désignera en général un germe par l'un de ses représentants, et nous confondrons ici $(h, 0)$ et h.

L'ensemble des germes à l'origine des fonctions $h = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est noté par $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}$.

2. On considère maintenant les fonctions f qui s'annulent à l'origine, et l'ensemble des germes définis par de telles fonctions. On le note par $m_n = m$.

Proposition : m est engendré par les n germes $f(x) = x_i$.

Preuve : En effet, un élément de m, f étant différentiable, admet un développement de Taylor sur $U(0)$. Celui-ci est *a priori* engendré par toutes les expressions de la forme $\sum c(p_1, p_2, ..., p_n)\, x_1^{p_1} x_2^{p_2} ... x_n^{p_n}$ où c est un coefficient, c'est-à-dire par tous les produits et sommes que l'on peut fabriquer avec $x_1, x_2, ..., x_n$.

C. Q. F. D.

Examinons maintenant des propriétés structurelles de $\mathcal{E}$ et de m.

Proposition : *$\mathcal{E}$ est un anneau.*

Preuve : En effet $\mathcal{E}$ est un groupe commutatif pour l'addition, un demi-groupe pour la multiplication (on ne peut pas diviser par une fonction nulle à l'origine).

C. Q. F. D.

Remarque : On observera que tout germe f de m peut s'écrire sous la forme

$$f = \sum_{i=1}^{n} x_i\, h_i(x) \quad \text{où} \quad h_i(x) \text{ est un germe de } \mathcal{E}\,.$$

Proposition : *m est un idéal maximal de $\mathcal{E}$.*

Preuve :

1. Rappelons qu'un idéal d'un anneau est un sous-groupe de $\mathcal{E}$ considéré comme groupe additif, stable par la multiplication de tous les éléments de $\mathcal{E}$. On a bien en effet

$$m = \{\, \mu\varphi\,;\quad \mu \in m,\ \varphi \in \mathcal{E}\,\} = m\,.$$

2. m est un idéal propre (i.e. distinct de $\mathcal{E}$) puisqu'il est strictement contenu dans $\mathcal{E}$. m ne contient pas en particulier la fonction constante $c : \mathbb{R}^n \to 1$ qui ne s'annule pas à l'origine.

3. m est un idéal maximal (i.e. il n'est contenu dans aucun autre idéal). En effet, s'il n'était pas maximal, il existerait un autre idéal propre m' tel que $m \subset m'$. Mais de ce fait m' contient au moins une fonction h qui ne s'annule pas à l'origine. La fonction $1/h$ appartient à $\mathcal{E}$.

Puisque, par définition d'un idéal $m'\,\mathcal{E} = m'$

$$h \times \frac{1}{h} = 1 \quad \text{appartient à } m'$$

est par suite $1\,\mathcal{E} = \mathcal{E}$ appartient à m' ce qui contredit le fait que m' est un idéal propre.

Par conséquent m' n'existe pas.

C. Q. F. D.

Tout changement de repère de G se traduit par un difféomorphisme $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ et, inversement, à tout (germe de) difféomorphisme, on peut associer un changement de repère et d'échelle, et par conséquent de représentation de G. Le fait que φ soit un germe à l'origine signifie que $\varphi(0) = 0$: on laisse invariante l'origine du repère sur G.

On note par $\mathcal{G}$ l'ensemble des germes de difféomorphismes de $\mathbb{R}^n$ à l'origine.

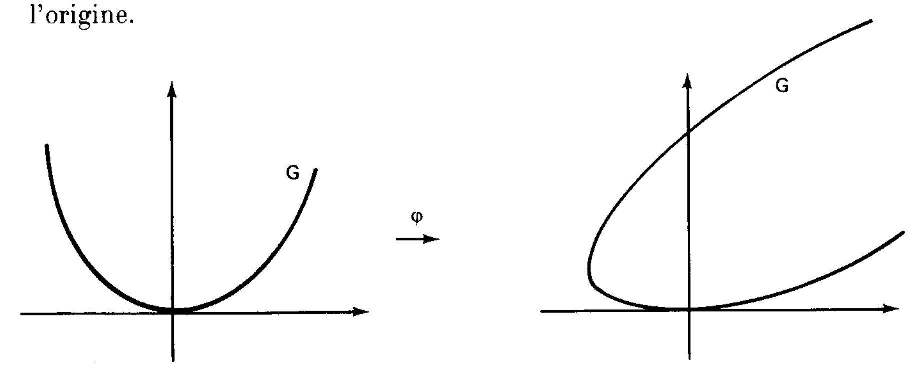

Fig. 163.

φ a déformé l'espace ① en l'espace ②, ce qui revient à faire rouler G sur l'axe des x, et à le déformer sans ajouter de singularité supplémentaire.

Les représentations de G sont donc données par l'ensemble des $f(\varphi(x)) = g(y)$, ce que nous écrivons $f\varphi = g$, où φ parcourt $\mathcal{G}$. On dit que f et g *sont équivalents à droite* (par φ).

On pourra poser $\overline{G}_f = \{\, g,\ g = f\varphi,\ \varphi \in \mathcal{G}\,\}$.

$\overline{G}_f$ s'appelle la *trajectoire* ou l'*orbite* de f dans $\mathcal{E}$ ou dans m.

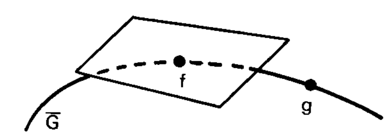

Fig. 164.

Il s'agit pour nous de reconnaître s'il existe sur cette trajectoire un germe de fonction polynomiale de degré k. Toute fonction d'un tel germe admet des dérivés nulles au-delà de l'ordre k, ou encore un développement limité d'ordre k qui suffit pour le définir. On est donc amené à introduire la définition suivante :

Définition :

1. On appelle *pro-jet d'ordre k* du germe $f \in \mathcal{E}$, $j^k f$ le développement taylorien de f limité à ses k premiers termes.

2. Deux germes f et g sont k équivalents s'ils ont le même pro k-jet sur $U(0)$. On appelle *k-jet* une classe de germes k-équivalents.

3. Un germe f est k *déterminé* si quel que soit le germe g qui lui est k équivalent, f et g appartiennent à la même trajectoire.

Remarquons que :

Proposition : *Si f est k déterminé, alors :*

1. *Si g appartient à l'orbite $\overline{G}_f$, g est aussi k déterminé.*
2. *Si g est k équivalent à f, g est également k déterminé.*

Preuve :

1. Soit h un germe k équivalent à g : alors h est aussi k équivalent à f, et puisque f est k déterminé, f et h sont sur la même trajectoire qui passe également par g. Comme h est quelconque, g est bien k déterminé.

2. La seconde affirmation n'est qu'une autre manière d'exprimer la première.

C. Q. F. D.

Introduisons l'idéal produit m^{k+1} engendré par les

$x_\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = k+1, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$;

un germe μ de m^{k+1} est de la forme

$$\mu = \sum_\alpha x_\alpha h_\alpha(x)$$

où $h\ (x)$ désigne un germe de $\mathcal{E}$.

D'après la formule de Taylor :

Proposition : *Si f est un germe de $\mathcal{E}$ il existe μ de m^{k+1} de sorte que $f(x) = j^k f(x) + \mu$.*

Essayons de déterminer des germes de fonction que l'on peut considérer comme appartenant à une sorte d'espace tangent au point f à l'orbite passant par f. Un germe de fonction g voisin de f est défini par un difféomorphisme ψ

$$g = f\psi .$$

On le suppose paramétré par t, $\psi = \psi(t)$ de sorte que, dans « l'espace tangent » à f, le « vecteur tangent » associé à ψ est un nouveau germe de fonctions défini par

$$\tilde{f} = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - f}{t}.$$

Comme $\psi(t)$ est très voisin de l'application identique I, on peut poser :

$$\psi(t)(x) = [I + t\delta(\psi(t))](x) = (I + t\delta)(x) = x + t\delta(x)$$

où δ est un difféomorphisme tel que $\psi(t)(0) = 0$, soit $\delta(0) = 0$.

On en déduit que :

$$\begin{aligned}(g(t) - f)\,x &= f(\psi(t)(x)) - f(x) = f(x + t\delta(x)) - f(x) \\ &= t\delta(x).f'(x)\end{aligned}$$

d'où :

$$\tilde{f}(x) = \delta(x) \cdot f'(x) = \sum_{i=i}^{n} \delta_i(x) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Notons par $\Delta(f) = \Delta$ l'idéal de $\mathcal{E}$ engendré par les germes de fonctions $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ et par $m\Delta$ l'idéal produit de m par Δ (i.e. l'idéal engendré par les germes de fonctions $x_j \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = g_k(x)$) .

Ainsi $\tilde{f}(x)$ appartient à $m\Delta$ ainsi que toute fonction $\sum g_k(x)\ h_k(x)$ où $h_k(x) \in \mathcal{E}$.

On démontre le résultat suivant :

Théorème (Mather) : *Si f est k déterminé : $m^{k+1} \subset m\Delta$.*
Si $m^{k+1} \subset m^2\,\Delta$: f est k déterminé.

Exemples 1. $f(x, y, z) = x^2 + \frac{3}{2} y^2 + y^3 - 3\,yz^2$ (Poston et Stewart).

Bien sûr : $j^3 f = f$.

Calculons :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\,x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3\,y + 3\,y^2 - 3\,z^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 3 + 6\,y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} = -\,6\,z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\,6\,yz \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\,6\,y\,.$$

On en déduit qu'à l'origine : $f(0) = f'(0) = (0, 0, 0)$

$$f''(0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Comme $f''(0)$ est d'ordre 2, donc de corang 1, on en déduit qu'il existe un changement de variables tel que

$$g(x', y', z') = \varepsilon_1\,x'^2 + \varepsilon_2\,y'^2 + h(z').$$

Comme $j^3 f = f$, on peut penser que f, g et h sont 3-déterminés, i.e. :

$$m^4 \subset m^2[2x, 3[y + y^2 - z^2], -6yz].$$

Puisque Δ contient x, les termes en x de m^4 (engendré par les $x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} z^{\alpha_3}$ $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 4)$) sont contenus dans $m^2 x$. Il suffit donc d'examiner les autres termes de m^4. Comme $m^2 = (x^2, xy, y^2, yz, z^2, zx)$, on voit aussitôt que seul le terme z^4 de m^4 ne peut s'exprimer à l'aide de termes provenant de

$$m^2(y + y^2 - z^2) \quad \text{et} \quad m^2(-6yz)$$

$$z^4 \neq Q_1(y + y^2 - z^2) + Q_2(-6yz)$$

où Q_1 et Q_2 sont deux polynômes de degré pair.
Par conséquent si f est k déterminé, $k > 3$. Vérifions que $m^5 \subset m\Delta$.

Posons :

$$\begin{aligned}
&P_1 = y^2(y + y^2 - z^2) && P_{10} = z^3(y + y^2 - z^2)\\
&P_2 = yz(y + y^2 - z^2) && P_{11} = y^3(yz)\\
&P_3 = z^2(y + y^2 - z^2) && P_{12} = y^2 z(yz)\\
&P_4 = y^2(yz) && P_{13} = yz^2(yz)\\
&P_5 = yz(yz) && P_{14} = z^3(yz)\\
&P_6 = z^2(yz) && P_{15} = y_5 = y^4(y + y^2 - z^2)
\end{aligned}$$

tronqué à l'ordre 5.

Alors :

$$\begin{aligned}
&y^5 = P_{15} && y^3 z^2 = P_{12} && yz^4 = P_{14}\\
&y^4 z = P_{11} && y^2 z^3 = P_{13} && z^5 = P_6 - P_{10} + P_{13}.
\end{aligned}$$

Par conséquent f est 4 déterminé et, selon toute vraisemblance :

$$g(x', y', z') = \varepsilon x'^2 + \varepsilon' y'^2 + \varepsilon'' z'^4.$$

2. On peut, dans l'exemple précédent, supprimer sans problème le terme en x et considérer simplement :

$$f(y, z) = \frac{3}{2} + y^3 - 3yz^2$$

f admet pour hessienne à l'origine, la matrice $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

On écrit $f(y, z) = \frac{3}{2}\left[y^2 + 2y\left(\frac{y^2}{3} - z^2\right)\right]$ et pour éliminer les termes de degré 3 contenant y, on pose :

$$\begin{cases} u_1 = y + \left(\dfrac{y^2}{3} - z^2\right) \\ u_2 = z \end{cases}$$

soit :

$$y^2 + 3y - 3(u_2^2 + u_1) = 0$$

et, posant $f(y, z) = h(u_1, u_2)$,

$$h(u_1, u_2) = \frac{3}{2}u_1^2 - \frac{3}{2}\left[\frac{y^2}{3} - z^2\right]^2.$$

On en déduit :

$$y = [-3 + \sqrt{9 + 12(u_1 + u_2^2)}]\frac{1}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}(1 + \alpha)^{1/2}$$

soit, en utilisant le développement en série de $(1 + \alpha)^n$,

$$= -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{4}{3}(u_1 + u_2^2) - \frac{1}{8}\frac{16}{9}(u_1 + u_2^2)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{64}\frac{64}{27}(u_1 + u_2^2)^3 + \cdots\right)$$

$$= u_1 - \frac{1}{3}u_1^2 + u_2^2 + \frac{1}{18}u_1^3 - \frac{2}{3}u_1 u_2^3 + \cdots$$

On en déduit que

$$\frac{y^2}{3} = \frac{u_1^2}{3} + \text{termes d'ordre supérieur}$$

d'où

$$j^4 h(u_1, u_2) = \frac{3}{2}u_1^2 - \frac{3}{2}j^4\left[\frac{y^2}{3} - u_2^2\right]^2 = \frac{3}{2}u_1^2 - \frac{3}{2}\left[\frac{u_1^2}{3} - u_2^2\right]^2$$
$$= \frac{3}{2}u_1^2 - \frac{1}{6}u_1^4 + u_1^2 u_2^2 - \frac{3}{2}u_2^4.$$

Il faut maintenant éliminer le terme de degré 4 contenant u_1 :

$$j^4 h(u_1, u_2) = \frac{3}{2} u_1^2 + u_1\left[u_1 u_2^2 - \frac{1}{6} u_1^3\right] - \frac{3}{2} u_2^4$$
$$= \frac{3}{2}\left[u_1^2 + \frac{2 u_1}{3}\left(u_1 u_2^2 - \frac{1}{6} u_1^3\right) - u_2^4\right].$$

Posons :

$$\begin{cases} v_1 = u_1 + \frac{1}{3}\left(u_1 u_2^2 - \frac{1}{6} u_1^3\right) \\ v_2 = u_2 \end{cases}$$

alors :

$$j^4 g(v_1, v_2) = \frac{3}{2}(v_1^2 - v_2^4)$$

$+$ terme $\left(-\frac{1}{6}\left(u_1 u_2^2 - \frac{1}{6} u_1^3\right)^2\right)$ d'ordre supérieur à 4 non pris en compte.

Ainsi la fonction de départ $f(y, z) = \frac{3}{2} y^2 + y^3 - 3 yz^2$ décrit le même objet, défini dans un autre repère par la fonction

$$g(v_1, v_2) = \frac{3}{2} v_1^2 - \frac{3}{2} v_2^4.$$

3. DÉPLOIEMENT UNIVERSEL.

Soit $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}, 0)$ un germe de fonction.
On plonge f dans une famille plus vaste

$$F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$$

de sorte que $F(x, 0) = f(x)$.

Une telle famille s'appelle un *déploiement* de f. Un germe $F(x, u)$ pour $u \in \mathbb{R}^p$ est une réalisation du déploiement.

On ne considère que des déploiements définissant des objets de *même type* que G, i.e. des objets qui possèdent le même nombre d'extrémums locaux, appelés *points critiques* ou *singularités* (réelles, complexes, confondues ou non) que G.

Deux réalisations d'un tel déploiement appartiennent à l'orbite de f dans $\mathcal{E}_{n+p}$. Si p est trop petit, il se peut que les réalisations g appartenant à cette orbite ne fassent pas apparaître tous les extrémums locaux potentiellement contenus dans l'expression analytique de g. Si p est très grand, il se peut qu'il y ait des paramètres u_i superfétatoires qui ne peuvent faire apparaître de singularités nouvelles.

Le déploiement qui correspond à la valeur nécessaire et suffisante de p pour laquelle toutes les singularités peuvent apparaître est appelé *universel* (les autres sont dénommés *versels*). La valeur correspondante de p s'appelle la *codimension de f*.

Supposons que l'on considère un germe de fonction à une variable $f : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$, pour lequel toutes les singularités sont ramassées à l'origine 0. Par exemple, $f = \frac{x^4}{4}$ concentre à l'origine 3 singularités (0 est racine triple de $f'(0) = 0$). On déploie cette singularité :

— soit en gardant une singularité à l'origine, et les deux autres encore confondues en un autre point,

— soit en gardant une singularité à l'origine, et en séparant les singularités encore confondues dans la situation précédente.

Pour parvenir à réaliser entièrement ce déploiement, il est nécessaire d'ajouter deux paramètres u_1 et u_2 de sorte que

$$g(x, u_1, u_2) = \frac{x^4}{4} + u_2 \frac{x^2}{2} + u_1 x :$$

les extrémums locaux $(\hat{x}, g(\hat{x}, u_1, u_2))$ vérifient

$$g'_x(\hat{x}, u_1, u_2) = \hat{x}^3 + u_2 \hat{x} + u_1 = 0$$

leur disposition appartient à l'une des trois classes précédentes.

Théorème :

1. *Soit $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ un germe de fonction à l'origine. Alors codimension (f) = dimension de l'espace m/Δ.*

2. *Si la codimension p de f est finie, le déploiement universel de f s'écrit :*

$$F(x, u) = f(x) + \sum_{i=1}^{p} u_i g_i(x),$$

où $(g_1, g_2, \ldots, g_p)$ constitue une base de m/Δ.

Théorème : *f est k déterminé si et seulement si sa codimension est finie.*

Exemples 1. *Soit $f : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ défini par $f(x) = x^n g(x)$, $g(0) \neq 0$, $n > 2$.*

L'idéal $\Delta(f)$ est engendré par la dérivée

$$\frac{df}{dx}(x) = x^{n-1}(ng(x) + xg'(x))$$

soit par la fonction x^{n-1}.
Quelle est la dimension de m/Δ ?
m/Δ représente des classes d'équivalence de germes de fonctions. Deux germes h et h' de m appartiennent à la même classe si et seulement si

$$h - h' = g \text{ de } \Delta .$$

Or d'après Taylor :

$$h(x) = u_0 + u_1 x + \cdots + u_{n-2} x^{n-2} + x^{n-1} r(x)$$

avec $u_0 = h(0) = 0$, $u_i = \dfrac{h^{(i)}(0)}{i\,!}$ (dérivée d'ordre i de h prise en 0).
Dire que $h - h' = g$ est équivalent à imposer la condition : $j^{n-2} h = j^{n-2} h'$.
Deux germes appartenant à la même classe ont donc même jet d'ordre $n - 2$; il y a donc autant de classes que de types de jets d'ordre $n - 2$; l'ensemble de ces classes est celui des combinaisons linéaires

$$\sum_{i=1}^{n-2} u_i x^i$$

dont l'ensemble $(x, x^2, \ldots, x^{n-2})$ forme une base de dimension $n - 2$.
Ainsi le déploiement universel de $f(x) = x^n g(x)$ est de la forme :

$$F(x, u) = x^n g(x) + u_{n-2} x^{n-2} + \cdots + u_1 x .$$

On suppose $g(x) = 1$. Le premier ensemble de catastrophe de $F(x, u)$, et souvent, par extension f lui-même, s'appelle si :

$n = 3$ le *pli*
$n = 4$ le *cusp* ou la *surface de Riemann-Hugoniot* ou la *fronce*
$n = 5$ la *queue d'aronde*
$n = 6$ le *papillon*.

2. *Soit* $f(x, y) = x^3 + y^3$. Δ est engendré par

$$\left(x^2 = \frac{\partial f}{\partial x}, y^2 = \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Δ ne contient ni x, ni y, ni xy :

$$h(x) = u_1 x + u_2 y + u_3 xy + a(x, y) x^2 + b(x, y) y^2 .$$

La codimension de f (la dimension de m/Δ) est 3 et f a pour déploiement universel :

$$F(x, y, u_1, u_2, u_3) = x^3 + y^3 + u_3 xy + u_2 y + u_1 x .$$

Ce déploiement et son ensemble de catastrophe s'appellent l'*ombilic elliptique*.

3. *Soit* $f(x, y) = x^2 y + y^4$: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2\,xy$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 4\,y^3$.
Δ ne contient ni x, ni y, ni y^2, ni x^2 seul.
Par suite le déploiement universel de f, appelé l'*ombilic parabolique*, est :

$$F(\alpha, y, u_1, u_2, u_3, u_4) = x^2 y + y^4 + u_4 x^2 + u_3 y^2 + u_2 y + u_1 x .$$

4. *Soit* $f(x, y) = x^3 - 3\,xy^2$. Δ est engendré par

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} = 3\,x^2 - 3\,y^2, \frac{\partial f}{\partial_2 y} = -\,6\,xy\right).$$

Δ ne contient ni x, ni y, ni m^2 dans son intégralité : m^2 possède trois générateurs, x^2, xy, y^2. Si on fait un changement de base de m^2, $u = x^2 - y^2$, xy, v, alors

$$x^2 = h_1(x, y)\,u + h_2(x, y)\,v$$
$$y^2 = h'_1(x, y)\,u + h'_2(x, y)\,v .$$

Une grande latitude nous est laissée dans le choix des h_i, h'_i et v. Ainsi on peut choisir

$$v = y^2, \quad v = x^2, \quad v = x^2 + y^2 .$$

Cette dernière expression exprime une sorte de symétrie entre x et y, symétrie déjà présente dans les termes imposés u et xy. On adoptera comme déploiement universel de f l'expression

$$F(x, y, u, u_2, u_3) = x^3 - 3\,xy^2 + u_3(x^2 + y^2) + u_2 y + u_1 x .$$

Ce déploiement est appelé l'*ombilic hyperbolique*.

5. *Tout germe f de m, non singulier à l'origine*, est de codimension nulle. En effet $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ prise en 0 est non nulle pour un indice i au moins, de sorte que cette fonction $g(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ est inversible dans $\mathcal{E}$. Par suite (cf. la démonstration de la proposition selon laquelle m est un idéal maximal de $\mathcal{E}$) l'idéal engendré par Δ est m. Le cas typique est le germe de fonction $e^x - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n_i}$ ou celui du germe de fonction $e^{-\frac{1}{x^2}}$.

6. *Tout germe f qui se présente à l'origine sous la forme*

$$\underline{f(x) = f(0) \pm x_1^2 \pm \cdots \pm x_n^2}$$

est également de codimension nulle puisque m et Δ ont mêmes générateurs :

$$\Delta = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2\,x_1, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = 2\,x_n\right).$$

7. *Par contre le germe représenté par $x^2 y$* est de codimension infinie, puisque $\Delta = \frac{\partial f}{\partial y} = x^2$ ne contient aucune puissance de y.

BIBLIOGRAPHIE

Cette bibliographie succincte comporte principalement des ouvrages récents qui traitent soit de systèmes dynamiques, soit de théorie des catastrophes.

[1] V. I. Arnold. — *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[2] C. P. Bruter. — *Les Architectures du Feu, Considérations sur les Modèles*. Flammarion, Paris, 1982.

[3] J. Guckenheimer, P. Holmes. — *Non linear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vectorfields*. Springer-Verlag, New York, 1983.

[4] G. Iooss, D. D. Joseph. — *Elementary Stability and Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1980.

[5] M. C. Irwin. — *Smooth Dynamical Systems*. Academic Press, New York, 1980.

[6] Y.-C. Lu. — *Singularity Theory and an Introduction to Catastrophe Theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[7] J. Palis, W. de Melo. — *Geometric Theory of Dynamical Systems, an Introduction*. Springer-Verlag, New York, 1982.

[8] T. Poston, I. N. Stewart. — *Taylor Expansions and Catastrophes*. Pitman, London, 1976.

[9] T. Poston, I. N. Stewart. — *Catastrophe Theory and its Applications*. Pitman, London, 1978.

[10] R. Thom. — *Structural Stability and Morphogenesis*. Benjamin, Reading, 1975.

[11] D. Vetger. — *Bifurcation of Gradient Vectorfields*. Thèse, Rijksuniversiteit te Groningen, 1983.

[12] E. C. Zeeman. — *Catastrophe Theory*. Pitman, London, 1977.

INDEX TERMINOLOGIQUE

Ame, II.4.7.
anneau, II.9.1.
— local, II.9.1.
anse creuse, II.8.1.
— pleine, II.8.1.
antipodal, II.4.7.
appartenir, II.4.1.
application, II.4.3.
— d'attachement, II.8.1.
— bijective, II.4.3.
— continue, II.4.3.
— contractante, II.10.4.
— dilatante, II.10.4.
— identique, II.4.7.
— injective, II.4.3.
— inverse, II.4.3.
— linéaire, II.10.3.
— stable, II.9.2.
— surjective, II.4.3.
arête, II.4.7.
argument, II.11.3.
associativité, II.7.1.
asymptotiquement stable, II.12.2.
attracteur, II.12.1.

Base, II.6.2.
— d'un espace vectoriel, II.10.1.
bassin, II.12.1.
bec à bec, II.4.7.
bifurcation, II.12.3.
— de Hopf, II.12.3.
bijection, II.4.3.
bord, II.4.7
boule, II.4.7.
— ouverte, II.4.7.
bouquet, II.8.1.

Caractéristique d'Euler-Poincaré, II.6.1.
cartésien, II.4.7.
cellule, II.4.7.
centre, II.11.3.
centre organisateur, I.3 (O. P. 19).
champ de vecteurs, II.5.2.
— métabolique, II.14.4.
chirurgie, II.8.2.
C^k-topologie, II.14.6.
classe d'équivalence, II.7.2.
— d'homotopie, II.7.3.
cobordant, II.8.2.
codimension, II.14.4.
compact, II.4.5.
complémentaire, II.4.4.
complexe, II.4.6.
— d'Eilenberg-Mac-Lane, II.7.5.
composante, II.4.7.
condition de transversalité faible, II.13.2.
— forte, II.13.3.
contenir, II.4.1.
continue, II.4.3.
convention de Maxwell, II.14.3.
connexe, II.4.2.
— par arcs, II.7.4.
contractile, II.7.3.
corps, II.9.1.
— des scalaires, II.10.1.
corang, II.14.4.
courbe, II.6.1.
— de self-intersection, II.14.6.
couronne, II.4.3.
cube, II.4.7.
cusp de Whitney, II.14.5.
cut-locus, II.12.1.
cycle attractant, II.12.3.
— hyperbolique, II.13.2.
cylindre creux, II.4.7.
— plein, II.4.7.

Déformation, II.9.2.
degré, II.5.2.
demi-groupe, II.9.1.
dense, II.13.1.
dépendance linéaire, II.10.2.
déploiement versel, II.9.2.
— universel, II.9.2.
dérivée, II.5.1.
— partielle, II.5.4.
difféomorphisme, II.6.1.
— d'Anosov, II.13.3.
différentiable, II.5.1.
différentielle, II.4.4.
dimension, II.10.2.

discriminant, II.14.7.
disjoint, II.4.2.
dual, II.10.5.

Engendrer, II.10.2.
ensemble
— algébrique, II.14.6.
— de bifurcation, II.14.6.
— de catastrophe, II.14.2.
— de conflit, II.14.6.
— invariant, II.12.1.
— limite, II.12.1.
— stratifié, II.14.6.
entier, II.4.4.
équivalence
— relation d', II.7.2.
— topologique, II.4.3.
espace
— cinématique, II.11.1.
— écran, II.11.1.
— interne, II.11.1.
— métrique, II.4.6.
— substrat, II.11.1.
— topologique, II.4.1.
— vectoriel, II.10.1.
étoile, II.14.6.

Factorielle, II.5.3.
fermé, II.4.4
fibre, II.6.2
fibré tangent, II.6.2.
— trivial, II.6.2.
flot, II.7.7.
fonction, II.4.3.
— k-lipschitzienne, II.11.2.
— de Liapounov, II.12.2.
— de Morse, II.6.1.
— potentielle, II.5.4.
— rang, II.10.6.
forme quadratique définie positive, II.6.2.
foyer instable, II.11.3.
— stable, II.11.3.
fronce, II.5.4.

Générateur, II.10.2.
générique, II.13.1.
germe de fonctions, II.9.1.
gradient de potentiel, II.5.4.
graphe, II.4.7.
groupe, II.7.1.
— additif, II.9.1.
— de cohomologie, II.7.5.
— des entiers modulo p, II.7.1.
— fondamental (ou de Poincaré), II.7.4.
— d'homotopie (ou de Hurewicz), II.7.4.
— isomorphe, II.7.4.
— de Lie, II.7.6.
— multiplicatif, II.9.1.
— à un paramètre, II.7.7.
— trivial, II.7.4.

H-cobordisme, II.8.2.
homéomorphisme, II.4.3.
homotopie, II.7.3.
hyperbolique, II.13.2.
hypocycloïde à trois rebroussements, II.14.7.

Indice, II.6.1.
injection, II.4.3.
intégrale première, II.12.3.
interaction libre, II.13.5.
intersection, II.4.1.
intervalle fermé, II.4.4.
— ouvert, II.4.4.
inverse, II.4.3.
isomorphisme, II.10.5.

Jet, II.14.6.

Lèvre, II.14.7.
ligne de gradient, II.14.7.
— de niveau, II.14.7.
linéairement dépendant, II.10.2.
lisse, II.5.1.

Matrice jacobienne, II.5.4.
— de transformation, II.10.3.
matroïde, II.10.6.
méridien, II.4.7.
modification sphérique, II.8.2.
module, II.11.3.
monôme, II.5.3.
morphologie bec à bec, II.14.7.
— lèvre, II.14.7.

Neutre, II.7.1.
nœud instable, II.11.3.
— stable, II.11.3.
nombre de Betti, II.7.5.
nombre complexe, II.11.3.

Ombilic elliptique, II.9.2.
— hyperbolique, II.9.2.
— parabolique, II.9.2.
onde d'évolution, II.14.4.
— de croissance, II.14.4.
orbite, II.5.4.
orientable, II.8.2.
ossature, II.12.1.
ouvert, II.4.4.

Papillon,
parabole semi- cubique, II.14.5.
partition, II.7.2.
piquant, II.14.7.
plan tangent, II.5.4.
pli, II.14.7.
plongement, II.8.1.
poil, II.14.7.
point d'accumulation, II.4.5.
— antipodal, II.4.7.
— de basculement, II.12.3.
— base, II.7.4.
— col, II.6.1.
— critique, II.6.1.
— critique dégénéré, II.6.1.
— errant, II.13.2.
— fixe, II.6.2.
— hyperbolique, II.13.2.
— limite, II.4.5.
— non errant, II.13.2.
— ω-limite, II.12.1.
— de repos, II.6.2.
— selle, II.6.1.
— stationnaire, II.6.2.
potentiel élémentaire de Thom, II.14.4.
produit cartésien, II.4.7.
propriété générique, II.13.1.
puits, II.12.1.

Quasi transverse, II.14.6.
queue d'aronde, II.14.7.

Rang d'une matrice, II.10.3.
— d'un matroïde, II.10.6.
rationnel, II.4.4.
recouvrement, II.4.5.
réel, II.4.4.
réflexivité, II.7.2.
résonner, II.13.5.
rétracte, II.8.2.
— par déformation, II.8.2.
ruban de Moebius, II.8.2.

Selle de singe, II.14.7.
séparatrice, II.12.1.
simplexe, II.4.7.
singularité, II.6.2.
— résiduelle, II.14.4.
somme pointée, II.8.1.
sommet, II.4.7.
sphère, II.4.7.
— exotique, II.7.5.
squelette, II.12.1.
stable, II.9.2.
stabilisation d'un seuil, II.14.7.
stigme, II.10.6.
strate, II.14.6.
structurellement stable, II.13.1.
surface, II.6.1.
— d'attachement, II.8.1.
— de Riemann-Hugoniot, II.5.4.
surjective, II.4.3.
symétrique, II.7.1.
système dynamique, II.6.2.
— d'Anosov, II.13.4.
— conservatif, II.12.2.
— gradient, II.13.3.
— hamiltonien, II.12.2.
— de Liénard-Van der Pol, II.12.
— de Morse-Smale, II.13.4.
— structurellement stable, II.13.
système d'équations différentielles, II.5.4.
— autonomes, II.11.1.
— non autonomes, II.11.1.
— linéaires, II.11.2.
système de régulation, II.13.5.

Trajectoire, II.5.4.
transformation linéaire, II.10.3.
transitivité, II.7.2.
transversal, II.13.2.
transversalité faible, II.13.2.
— forte, II.13.3.
topologie, II.4.1.
tore, II.4.7.
type d'homotopie, II.7.3.

Union, II.4.2.

Valeur propre, II.10.4.
variété différentiable, II.6.1.
— à bord, II.6.1.
— branchue, II.12.1.
— cobordante, II.6.1, II.8.2.
— à flot stable, II.8.2.
— linéaire affine, II.10.2.
— limite, II.13.2.
— des phases, II.11.1.
— orientable, II.8.2.
— parallélisable, II.6.2.
— simplement connexe, II.7.5.
— riemannienne, II.6.2.
vecteur, II.10.1.
— propre, II.10.4.
voisinage, II.4.1.
— ouvert, II.4.4.

TABLE DES MATIÈRES

Préliminaires 5

PREMIÈRE PARTIE. — **Données Philosophiques** 11

I.1 *Un chapitre nécessaire* 13
I.2 *Observations premières sur la nature des objets* 16
I.3 *Observations premières sur la construction des objets* 22
I.4 *Autres observations à valeur générale* 43
I.5 *La question du finalisme* 50
I.6 *L'incertitude du hasard* 52

SECONDE PARTIE. — **Données Mathématiques** 55

II.1 *La fonction de la pensée* 57
II.2 *Nature des mathématiques* 60
II.3 *Intérêt des mathématiques* 64
II.4 *Le voisinage, la déformation, et leurs représentations en mathématiques* 65
II.4.1 Notion d'espace topologique 65
II.4.2 La notion de connexité 67
II.4.3 Les représentations et leur diversité 68
II.4.4 Le continu physique et le continu mathématique. Ouverts et fermés 72
II.4.5 La notion de compacité 77
II.4.6 Notions métriques 79
II.4.7 Formes topologiques élémentaires 80

II.5 *Notions d'Analyse* 89
II.5.1 Notion de dérivée 89
II.5.2 Interprétation géométrique et dynamique de la dérivée 93
II.5.3 La formule de Taylor 95
II.5.4 Dérivée d'une application. Potentiels et gradients. Equations différentielles 100

II.6 *Notions de géométrie différentielle* 104
II.6.1 Variétés différentiables. Etude locale des variétés 104
II.6.2 Fibrés triviaux et tangents. Variétés riemanniennes 113

II.7 *La notion de groupe et ses applications à la classification des variétés* 118
II.7.1 Exemples numériques et définition 118
II.7.2 Les problèmes de classification. La relation d'équivalence 122
II.7.3 Les espaces d'applications et la notion d'homotopie 123
II.7.4 Groupes d'homotopie et applications 125
II.7.5 Complexes d'Eilenberg-Mac-Lane et groupes d'homologie 127
II.7.6 Les groupes continus en tant que variétés 129
II.7.7 Groupe engendré par un champ de vecteurs 129

II.8 *Construction des variétés* 130
II.8.1 Techniques élémentaires : union, produit, somme pointée, attachement d'anses 130
II.8.2 Orientation, cobordisme et chirurgie 136
II.9 *La notion d'anneau. Le déploiement universel* 140
II.9.1 Exemples et définitions 140
II.9.2 Théorie approchée du déploiement universel : position du problème 143
II.9.3 Théorie approchée du déploiement universel : solution du problème 146
II.10 *Espaces vectoriels* 152
II.10.1 Exemple et définition d'un espace vectoriel 152
II.10.2 Génération des espaces vectoriels 154
II.10.3 Déformations ou transformations linéaires, matrices 158
II.10.4 Vecteurs et valeurs propres d'une application linéaire 162
II.10.5 Dualité dans les espaces vectoriels 163
II.10.6 La notion de matroïde 164
II.11 *Mouvement, équations et systèmes différentiels* 168
II.11.1 Définitions et exemples 168
II.11.2 Existence de solutions 173
II.11.3 Systèmes différentiels linéaires 174
II.12 *Stabilité des systèmes dynamiques à la Liapounov* 185
II.12.1 Ensembles-limites et attracteurs 185
II.12.2 Stabilité à la Liapounov 189
II.12.3 Les équations de Liénard et de Van der Pol 191
II.13 *Stabilité structurelle dans les systèmes dynamiques* 197
II.13.1 Définition de la stabilité structurelle 197
II.13.2 Systèmes dynamiques définis sur une variété de dimension 2 198
II.13.3 Systèmes dynamiques gradients 203
II.13.4 Systèmes dynamiques d'Anosov et le cas général (Morse-Smale) 205
II.13.5 Le problème de la résonance 209
II.14 *La théorie des catastrophes* 213
II.14.1 Une théorie phénoménologique 213
II.14.2 Le modèle 214
II.14.3 Détermination du point représentant l'état local du processus 215
II.14.4 Evolution du déploiement en fonction de la position spatiale 219
II.14.5 Ensemble catastrophe associé à la fronce 227
II.14.6 Notion de stratification, son importance 229
II.14.7 Ensembles de bifurcation des potentiels élémentaires 235
II.14.8 De l'usage de la théorie des catastrophes élémentaires 259
APPENDICE 1. — **Mathématiques et mouvement** 269
APPENDICE 2. — **Déploiement universel d'une fonction** 285
Bibliographie 301
Index Terminologique 303

COLLECTION « RECHERCHES INTERDISCIPLINAIRES »

Ouvrages déjà parus :

L'évolution des systèmes moléculaires, par P. Delattre.

Système, structure, fonction, évolution (2e édit.), par P. Delattre.

Topologie et perception, par C. P. Bruter.
Tome I. — Bases philosophiques et mathématiques (2e édit.).
Tome II. — Aspects neurophysiologiques.

La mycologie et ses corollaires, par G. Becker.

L'archipel scientifique, par P. Weiss (traduit de l'anglais).

L'arc et la corde, par E. Bernard-Weil.

Evolution individuelle et évolution collective, par E. Got.

L'analyse dimensionnelle et l'épistémologie, par G. Monod-Herzen.

Structure et dynamique des systèmes, séminaires interdisciplinaires du Collège de France.

L'idée de régulation dans les sciences, séminaires interdisciplinaires du Collège de France.

Organe et fonction, par R. Bernier et P. Pirlot.

Thermodynamique et biologie, par J. Tonnelat.
Volume I. — Entropie, désordre et complexité.
Volume II. — L'ordre issu du hasard.

Logique des neurones et du système nerveux, par P. Nelson.

La notion d'organisation dans l'histoire de la biologie, par J. Schiller.

Elaboration et justification des modèles. Applications en biologie. Actes du Colloque du CNRS, CEA, ENS, IHES (2 volumes), présentés par P. Delattre et M. Thellier.

Recherches d'écologie théorique, ouvrage collectif publié sous la direction de R. Barbault, P. Blandin, J.A. Meyer.

Eléments pour une théorie de la biologie, par A. Pichot.

Analogie et connaissance, séminaires interdisciplinaires du Collège de France.
Tome I. Aspects historiques.
Tome II. De la poésie à la science.

La morphogenèse, de la biologie aux mathématiques. Actes de 3 colloques organisés par l'Ecole Pratique des Hautes Etudes, ouvrage collectif publié sous la direction de Y. Bouligand.

Aspects de la théorie générale des systèmes, par J. Eugène.

Les difficultés de la quantification et de la mesure. Actes du Colloque de l'Université de Dijon publiés sous la direction de J. Parain-Vial.

L'autonomie du vivant, par P. Vendryès.

Neuro-physiologie des instincts et de la pensée, par P. Nelson.

Les critères de vérité dans la recherche scientifique, ouvrage collectif publié sous la direction de M. Buscaglia, C. Lalive d'Epinay, B. Morel, H. Ruegg, J. Vonèche.

Information et communication, séminaires interdisciplinaires du Collège de France.

Epistémologie, par M. Bunge.

La fin et les moyens. Etudes sur la finalité biologique et ses mécanismes, sous la direction de J.-L. Parrot.

Les catastrophes de la parole de Roman Jakobson à René Thom, par J. Petitot-Cocorda.

L'homme bio-éthique. Pour une déontologie de la recherche sur le vivant, par A. Fagot-Largeault.