[4] C.P. Bruter, « Sur quelques facteurs de la différenciation socio-économique », *Économie appliquée*, vol. 32, n° 2-3, 1979, p. 427-439.

[5] I. Ekeland, « Possibilités offertes par la théorie du contrôle pour l'identification d'un modèle possédant le meilleur pouvoir prédictif », *in* : *Élaboration et justification des modèles* (P. Delattre et M. Thellier éd.), Maloine-Doin, Paris, t. 2, p. 627-638.

[6] O. Queiroz, « Modélisation du fonctionnement cellulaire dans un contexte physiologique : Quand ? Pourquoi ? Pour quoi faire ? », *in* : *Élaboration et justification des modèles* (P. Delattre et M. Thellier éd.), Maloine-Doin, Paris, 1979, t. 1, p. 69-79.

[7] J.E. Taylor, « The Structure of Singularities in Soap-Bubble-Like and Soap-Film-Like Minimal Surfaces », *Annals of Math.*, vol. 103, 1976, p. 489-539.

[8] J.E. Taylor, « The Structure of Singularities in Solutions to Ellipsoidal Variational Problems with Constraints in R^3 », *Annals of Math.*, vol. 103, 1976, p. 541-546.

CHAPITRE IX

LA THÉORIE DES CATASTROPHES : DÉFENSE ET ILLUSTRATION[1]

... Elles constituent le moment le plus harmonieux de tous. Elles prouvent qu'il existe une harmonie préétablie. Quand une catastrophe se produit, toutes les tensions, tout s'élimine[2].

S. Dali [7]

Introduction

La théorie des catastrophes n'aura pas échappé à la règle. Comme toute théorie à sa naissance, elle aura reçu les éloges les plus flatteurs. Ils furent bientôt suivis des critiques les plus acerbes. Après l'enthousiasme des salons, les foudres des spécialistes : le jugement des esprits méticuleux tombe, sans appel, comme un couperet.

Il est surprenant de constater qu'aucune des critiques plus ou moins virulentes formulées à l'encontre de la théorie des catastrophes ne s'attaque aux fondements mêmes sur lesquels est bâtie cette théorie. Pourtant, n'est-il pas naturel, pour se convaincre de la solidité d'un édifice, pour déceler les zones fragiles où pourraient naître les fêlures, de commencer d'abord par examiner l'architecture de l'ensemble, et par éprouver la solidité des fondations ? Une expertise de ce genre l'emportera en intérêt sur celle qui, à la manière de Lévy-Leblond [13], se maintient au niveau de la philosophie générale, ou bien encore sur celle qui, à la manière de Sussman [18], se laisse aveugler par les

1. Le texte présent, paru dans *Économie appliquée*, 2, 1979, p. 439-465, est une version enrichie de « La Théorie des catastrophes : quelques aspects épistémologiques », note *CFMC*, E. 11 juill. 1977, du Centro de fisica da materia condensada, Lisbonne, et de « The Theorie of Catastrophes : Some Epistemological Aspects », *Synthese*, 39, 1978, p. 293-315.

2. Ce point de vue est parfois vrai (N. d. A.).

imperfections de certaines applications et ne parvient plus à saisir la valeur intrinsèque de la théorie. Quant à la critique récente de Smale [17] (où son auteur, et il n'a pas forcément tort, confond universalité et superficialité), elle rejoint celle de Sussman et s'attaque, à juste raison, à un mode publicitaire de présentation dans certains travaux.

Certes, toutes ces critiques sont utiles dans la mesure où elles jettent une lumière sur les faiblesses des constructions et suggèrent, implicitement ou explicitement, des moyens pour colmater les brèches, ou bien, au contraire, montrent, de manière définitive, la nécessité d'abandonner promptement une forteresse promise à la ruine prochaine. Mais la critique, pour être complète et fructueuse, doit s'attacher également à faire valoir les aspects positifs que toute œuvre porte en elle. Alors le censeur est conduit à moins de partialité, à plus de sérénité et de justesse dans son jugement.

On voit maintenant se dégager le plan de principe de cette étude : présentation de la théorie des catastrophes[3], recherche de ses points faibles, apports de cette théorie. Pour la convenance de l'exposé, pour éviter une certaine sécheresse du discours, il arrivera souvent que les deux premières parties soient imbriquées l'une dans l'autre.

9.1. Le concept de stabilité

La théorie des catastrophes – cette terminologie aurait pu être empruntée à la géologie – repose sur des considérations de philosophie naturelle auxquelles est parfois donnée une expression mathématique.

Le concept essentiel qui sous-tend cette théorie est celui de *stabilité*. Son importance ne peut échapper à personne. Pour exister et être perçu par les sens, un objet doit posséder des qualités évidentes de stabilité. Les processus embryologiques, par exemple, se reproduisent à des milliards d'exemplaires sans subir de modifications importantes : une de leurs caractéristiques principales est la stabilité.

Les mathématiciens ont proposé de formaliser la notion de stabilité de plusieurs façons. Toutes ces formalisations

3. Elle est également exposée dans [19], [20], [3]. *Topologie et perception* [4] contient, en annexe, une présentation accessible à un public de non-mathématiciens.

sont-elles adaptées aux différentes manières sous lesquelles se présente la stabilité dans l'univers concret ? Il est, pour l'instant, impossible de répondre à cette question, car l'insistance à considérer la notion de stabilité est venue plutôt des mathématiciens que des praticiens. Ces derniers, en général, ne se sont pas encore ingéniés à proposer, à partir de leurs expériences, des critères de stabilité dont le mathématicien pourrait tirer parti.

De sorte que sur la théorie des catastrophes plane une première et très légère ombre de doute qui porte, non pas sur les principes qui fondent la théorie, mais sur la façon dont ces principes sont mis en œuvre. On imagine très bien que puissent exister plusieurs notions de stabilité de qualité plus ou moins grossière. Pour chacune d'elles, selon la réalité dont on doit rendre compte, un modèle pourrait être construit d'après les canons selon lesquels est établie la théorie des catastrophes[4].

9.2 Le modèle local

Le passage du local au global rencontre toujours des difficultés. La théorie des catastrophes résout un certain nombre d'entre elles, pas toutes. Nous n'étudierons pas cette question dans tout son détail. Car il faudrait, au préalable, se livrer à une investigation approfondie et critique sur la manière dont les mathématiciens abordent ce problème. Nous nous contenterons d'évoquer, aux moments opportuns, l'existence de difficultés. Avant de pouvoir en faire état, il convient d'abord d'examiner le modèle local.

Les objets, les processus, étant localisés dans l'espace-temps, le modèle local se donne avant toute chose le territoire spatio-temporel de l'observable. On est ainsi amené à considérer un petit domaine $W = D \times T$[5] de l'espace-temps qui renferme le milieu substantiel soumis à l'observation. En se permettant quelque licence verbale, on iden-

4. La variante de Golubitsky et Schaeffer est, dans certains domaines physiques, d'une très grande pertinence (cf. leur article : « A Theory for imperfect bifurcations via singularity theory », *Commun. Pure Appl. Math.* 32 (1979) 21-98). Voir également la théorie de Thomson et Hunt [26].

5. D représente un petit domaine de l'espace usuel, T un petit intervalle temporel.

tifie parfois, soit D, soit W, avec une part élémentaire du milieu substrat lui-même. Les propriétés du substrat sont supposées constantes sur W. Cette condition peut entraîner des limitations drastiques sur la taille de W : celle-ci peut être choisie, a priori, aussi petite qu'on le désire.

Cet espace-substrat est ou bien en évolution, ou bien dans un état stationnaire. Mais, même si l'état est aujourd'hui stationnaire, il fut hier en évolution. On peut donc toujours postuler l'existence d'une cinétique locale, ou encore d'une dynamique locale D_W qui régit l'état du substrat local W.

Sur quoi agit cette dynamique ? Sur des paramètres qui caractérisent l'état de l'élément de substrat. A ce moment surgit bien sûr une difficulté inhérente à tout problème concret : sur quels critères choisir ces paramètres, comment les identifier ? Nous ne pouvons ici qu'éluder la question : la réponse qu'on pourrait lui donner dépend des connaissances diverses que possède le savant sur la réalité spécifique qu'il étudie ; des suggestions que peuvent lui fournir ses collègues des autres disciplines ; du modèle théorique qu'il a en tête, et qui, dans une certaine mesure, guide son observation ; enfin, des possibilités qui lui sont offertes de quantifier des observations.

Supposons qu'on ait pu dresser la liste de ces paramètres. Ceux-ci vont se répartir en deux groupes. Le premier groupe contient les paramètres x_i qui échappent au contrôle direct de l'observateur : ce sont les *paramètres internes.* L'expérimentateur est, au contraire, capable de fixer la valeur des paramètres u_j du second groupe : ce sont les *paramètres de contrôle,* appelés encore *paramètres externes.* L'ensemble des valeurs que peuvent prendre les paramètres externes est désigné par V_w. V_w s'appelle la variété-*fibre* au-dessus de W. La dynamique D_w agit sur les points de V_w.

9.3 Étude de la dynamique D_w

Examinons les principales propriétés de D_w. Dans les cas les plus simples, le temps propre aux différents phénomènes qui se déroulent à l'intérieur de W est le même. Ce temps propre τ est donc ici unidimensionnel. Mais on peut bien sûr concevoir des temps multidimensionnels

adaptés à des phénomènes inhomogènes quant au temps ; la théorie du feuilletage des variétés traite le cas de ces dynamiques à temps multidimensionnel. De toute façon, le temps τ est un temps local[6] ; il peut être infiniment plus rapide que le temps des physiciens ou que le temps humain, de sorte que, le plus souvent, nous observons seulement le résultat final de l'action de D_w : tel est, tout au moins, le point de vue adopté dans la théorie des catastrophes. Son bien-fondé mérite dans chaque application d'être examiné avec soin.

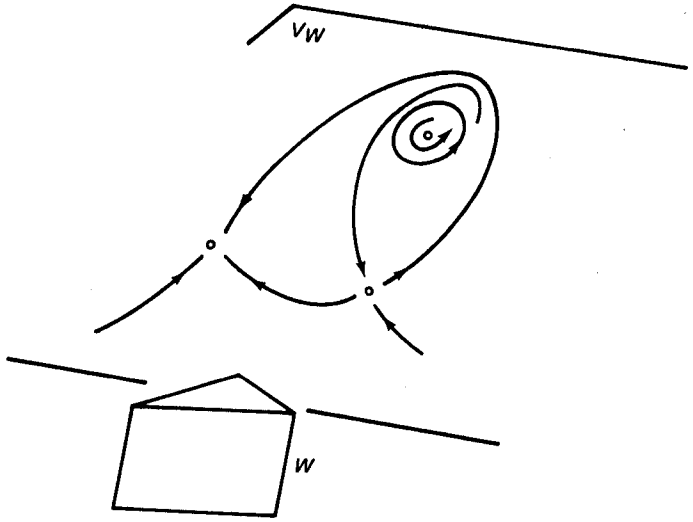


Fig. 1.

Cette dynamique associe à chaque valeur du temps τ un point $x(\tau)$ de l'espace des paramètres V_w. Lorsque τ varie, son image $x(\tau)$ décrit une courbe appelée une *orbite* ou une *trajectoire* de la dynamique D_w. Les vecteurs tangents en chaque point de toutes les trajectoires définies par cette dynamique forment un champ de vecteurs X – les trajectoires sont les sillons d'un champ, les vecteurs sont analo-

6. Afin de clarifier un peu, dans mon esprit, le cadre conceptuel à l'intérieur duquel se construit la théorie, j'ai introduit, en 1970, la notion de temps local. Bien que cette notion ne soit pas encore, même à l'heure actuelle, très explicite, il m'a paru utile de la maintenir dans la rédaction du séminaire sur les *Modèles mathématiques de la morphogenèse* (IHES, 1970-1971) ; le texte de ce séminaire a été publié dans la *Lezione Fermiane* et dans [19]. Il serait naturellement souhaitable de connaître des exemples précis de relations entre divers temps locaux et le temps physique ordinaire.

gues aux tiges de blé qu'on aurait coupées à leurs racines et couchées tangentiellement aux sillons. On montre, sous des conditions qu'on peut supposer satisfaites, que la donnée de ces vecteurs X suffit pour reconstituer le réseau des trajectoires qui feuillettent l'espace des paramètres V_w.

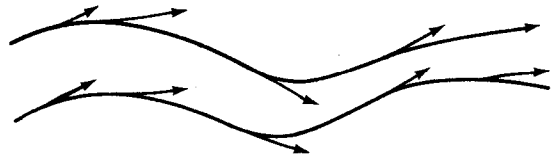


Fig. 2.

Au bout d'un certain temps, en principe infini, une trajectoire vient se stabiliser autour d'un *attracteur* : ce peut être un point, un cercle, un tore, etc. Si l'attracteur, supposé stable, est un point $\hat{x}$ de V_w, les valeurs des coordonnées de ce point représentent les valeurs possibles des paramètres caractéristiques du point standard de l'espace substrat considéré W. Si cet attracteur est une courbe fermée, ces mêmes valeurs varient périodiquement au cours du temps τ, pourvu encore que l'attracteur considéré soit stable. L'essentiel à retenir ici est que l'attracteur stable correspond au résultat final de l'action de la dynamique D_w ; c'est le lieu des observables dans V_w.

Le phénomène observé présente des propriétés de stabilité. Pour caractériser cet état de choses, les mathématiciens ont introduit, entre autres, la notion précise de stabilité structurelle. Ils posent qu'un système dynamique $D = (V, X)$ ou encore un réseau de trajectoires est *structurellement stable* si une légère modification des paramètres qui définissent les composantes des vecteurs du champ n'entraîne pas de changement dans l'allure, dans le dessin général des trajectoires. On se moque des considérations métriques propres à chaque trajectoire, on ne conserve que l'égalité générale des proportions entre trajectoires. Cette idée d'examiner les problèmes de stabilité sous l'angle de l'*invariance des proportions* mériterait d'être approfondie.

La formulation mathématique classique de la stabilité structurelle consiste à dire que si X^r est un champ de vecteurs sur V_w, dérivable jusqu'à l'ordre r (on le dit de classe C^r), il est structurellemment stable si tout champ de vecteurs X'^r, de même type que X^r, appartenant à un voisinage

de X^r, définit un réseau de trajectoires qui se déduit du premier par homéomorphisme, c'est-à-dire par une application bijective et bicontinue. On dit alors que les systèmes dynamiques $D = (V, X^r)$ et $D' = (V, X'^r)$, ou encore que les champs de vecteurs X^r et X'^r sont *topologiquement équivalents,* ou bien *topologiquement conjugués.*

On peut naturellement broder autour de cette définition[7] : imposer des limites à l'étendue du voisinage qui entoure X^r et à l'intérieur duquel on pourra choisir X'^r, ou bien fixer des limites à la distance qui peut séparer la nouvelle trajectoire de l'ancienne. On peut encore relâcher quelques conditions qui définissent la stabilité structurelle classique. Par exemple Smale suppose que l'équivalence topologique, au lieu de peser sur le réseau entier des trajectoires, ne porte que sur les attracteurs et les répulseurs du système dynamique : c'est la *Ω-stabilité structurelle*[8].

On voit ici que, selon la nature du problème concret qu'il faut traiter, on choisira telle forme de stabilité plutôt que telle autre. On a donc, *a priori,* autant de modèles que de définitions acceptables de la stabilité structurelle et de choix possibles de la dynamique.

9.4 Les dynamiques gradients et la théorie des catastrophes élémentaires

Les plus simples parmi les systèmes dynamiques n'ont pour attracteurs que des points : ce sont les *systèmes dynamiques gradients,* structurellement stables, dont les champs de vecteurs comportent seulement des vecteurs X dérivant de potentiels.

Voici ce qu'on entend par là : supposons que n soit la dimension de l'espace V, que $X_1, X_2, ..., X_n$ soient les composantes d'un vecteur X du champ tangent à une trajectoire en $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Par définition, ces composantes ont pour valeur :

7. On remarquera, par ailleurs, que la définition de la stabilité structurelle, en tenant compte de petites variations quelconques des paramètres, ramène l'étude de certains types de systèmes dynamiques stochastiques à une étude géométrique et déterministe de systèmes dynamiques très généraux.

8. Ω désigne en fait l'ensemble des points non errants du système dynamique.

$$X = \begin{cases} X_1(x) = -\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ X_2(x) = -\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ X_n(x) = -\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{cases}$$

où f est une fonction dite « potentiel » qui évalue au point $x \in V$ la valeur $f(x) \in R$ du potentiel auquel sont soumis tous les points de V.

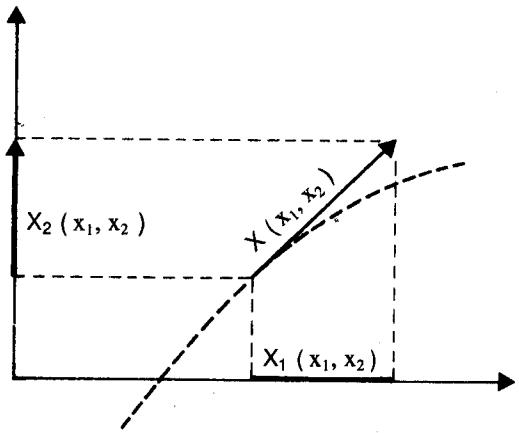


Fig. 3

La théorie des catastrophes *élémentaires* ne fait appel qu'à des dynamiques gradients. On peut donc, à ce titre, la considérer comme *la plus simple* parmi toutes les théories des catastrophes possibles. On peut justifier l'attention portée à cette théorie de la manière suivante : l'expérience nous a appris que la nature, pour autant qu'elle le peut, tend à opérer par les voies les plus simples. Puisque les dynamiques gradients possèdent cette qualité de simplicité, on doit s'attendre à ce que ces dynamiques soient très répandues. Il en est bien ainsi en physique : gravitation, électromagnétisme et optique, thermodynamique parfois.

Dans les domaines où l'on ne saurait encore se prononcer sur la présence de telles dynamiques, il est convenable de commencer par postuler leur existence. Et l'on peut penser que si cette hypothèse se révélait fausse en toute rigueur, il est probable que la dynamique réalisée par la nature serait *voisine* d'une dynamique gradient. Une telle dynamique peut donc servir de première approximation à la

dynamique réelle. Si vraiment l'approximation obtenue avec la dynamique gradient se montrait trop imparfaite, alors on opterait pour une dynamique plus générale.

Remarquons à ce propos que, puisque les dynamiques gradients ont les propriétés les plus rudimentaires, le véritable développement « taylorien » d'un champ de vecteurs général ne s'obtient pas par l'introduction mécanique de monômes de degré croissant, mais par une décomposition du genre suivant :

X = champ de gradients plus ou moins couplé avec un champ hamiltonien plus ou moins couplé avec un champ d'Anosov plus ou moins couplé avec un champ de Morse-Smale[9], etc.

Signalons qu'une telle décomposition a déjà été obtenue par J. Roels [16] pour les champs de vecteurs sur une surface symplectique. Je conjecture que, pour des raisons physiques, le lemme de Roels peut être étendu à toute dimension : tout champ de vecteurs est somme d'un champ de vecteurs de type gradient et d'un champ de vecteurs conservatif, c'est-à-dire possèdent des intégrales premières. Supposons alors qu'un champ de vecteurs donné gouverne l'évolution d'un phénomène particulier. Si la composante conservative est de poids faible comparé à celui de la composante gradient, l'emploi de la théorie élémentaire des catastrophes permet d'étudier le phénomène avec une bonne approximation. En fait, ce cas devrait être le plus fréquent : puisque les systèmes gradients sont en général structurellement stables, alors que les systèmes conservatifs sont au contraire et en général structurellement instables, si le phénomène étudié fait montre de quelque stabilité, la composante gradient doit l'emporter sur la composante conservative.

Rappelons que, pour les champs de gradients structurellement stables que nous considérerons désormais, les seuls attracteurs présents sont des points (dits hyperboliques). En ces points, le potentiel atteint un extremum.

On peut se demander quelles conditions deux fonctions potentiel f et f' doivent remplir pour donner naissance à deux systèmes dynamiques Ω-topologiquement équiva-

9. On suppose, bien sûr, que ce champ n'est pas lui-même un champ de gradients. La décomposition en une somme de composantes de type gradient et de composantes du type conservatif est vraie, au moins localement. Le problème global reste ouvert.

lents. La réponse, donnée par J. Guckenheimer [10], est la suivante : si f et f' sont deux réalisations d'un même déploiement universel F, les systèmes dynamiques gradients ont leurs attracteurs topologiquement conjugués. Avant d'expliquer ces derniers termes, notons que ce résultat est crucial dans la théorie des catastrophes élémentaires, où l'on suppose que, passant du domaine local W au domaine local W', la dynamique gradient ne change pas de caractère.

On peut maintenant mieux se rendre compte de la nature rudimentaire de la théorie des catastrophes élémentaires. C'est une théorie élémentaire, car elle suppose la dynamique de type fort simple – elle est de type gradient ; cette dynamique est structurellement stable sur tout le substrat. Ce qui permet d'*étendre trivialement le modèle local en un modèle global.* Il est bien évident qu'une théorie aussi « naïve » ne peut prétendre décrire la totalité des phénomènes naturels.

Dans quels cas la théorie des catastrophes élémentaires est-elle pertinente ? En physique d'abord. La physique nous offre un petit cortège de lois auxquelles sont associés des potentiels, et qui possèdent la propriété d'être d'une *stabilité spatio-temporelle stupéfiante. Cette stabilité semble d'autant plus grande que le tissu substantiel est plus fin, que le substrat présente des caractères d'homogénéité plus affirmés.*

La nature de l'éther sur lequel opère le champ électromagnétique, par exemple, échappe à toute imagination. La théorie des catastrophes élémentaires, où les potentiels font loi, est donc parfaitement adaptée à l'étude des variations de densité optique ; le succès le plus franc de la théorie a d'ailleurs été obtenu dans l'étude des caustiques [1], [10], [11] : les expérimentateurs ont pu retrouver des formes non triviales prévues par la théorie. Il existe d'autres domaines de la physique où la texture du substrat est moins ténue : dans une phase homogène, par exemple, qu'elle soit solide, liquide ou gazeuse ; la loi physique n'est pas tout à fait du type potentiel ; il est alors naturel que, dans son application à la thermodynamique [21], la théorie des catastrophes élémentaires fasse figure de théorie approchée. Dans la mesure où le milieu embryonnaire se divise en parties homogènes que l'on peut apparenter à des phases, il est encore possible, comme nous l'avons

proposé, d'utiliser la théorie des catastrophes élémentaires (cf. [2], [22], [27] ; voir également [4]).

Dans les cas où l'homogénéité du substrat s'estompe, les interactions des forces entre domaines inhomogènes voisins finissent par interdire l'emploi de potentiels structurellement stables pour décrire les évolutions du comportement local. Dans ces cas, on ne peut plus faire appel aux modèles de la théorie des catastrophes élémentaires.

9.5. La notion de déploiement universel

Du point de vue historique, il serait possible de faire remonter cette théorie jusqu'à Weierstrass pour le théorème de préparation, et à B. Riemann, qui avait reconnu la possibilité de classer les applications et suggéré des travaux de géométrie analytique complexe. L'étude des déformations dans cette géométrie (Cartan, Grauert, par exemple, cf. les exposés de Houzel au séminaire Cartan 1960/1961, voir également [15]) a conduit H. Whitney, puis R. Thom, à examiner différents aspects du problème dans le cas réel. La théorie des points critiques de M. Morse a également joué un rôle certain dans la conception de la théorie du déploiement universel. Cette théorie fut mise au point par J. Mather dans les années 67 à 70, en liaison avec les travaux de Malgrange, Tougeron et R. Thom.

Voici comment se pose le problème. Soit f et f' les fonctions potentielles correspondant à deux systèmes dynamiques gradients Ω-topologiquement conjugués. On cherche à mettre en évidence une fonction « verselle » F(x, u) dépendant des paramètres internes $u = (u_1, u_2, ..., u_p)$, de sorte qu'en modifiant ces paramètres on puisse, en premier lieu, retrouver soit f, soit f' : f et f' sont alors appelées des *réalisations de F.* F doit également vérifier la condition supplémentaire suivante, tout à fait essentielle : si on déplace légèrement la position du point (x, u), celle des paramètres caractérisant l'état du substrat, la valeur du potentiel F (x, u) doit, sauf sur un ensemble de mesure nulle, varier elle-même fort peu. En d'autres termes, si (x', u') appartient à un voisinage de (x, u), alors F (x', u') doit appartenir à un voisinage de F(x, u). On peut résumer cette discussion par le diagramme suivant :

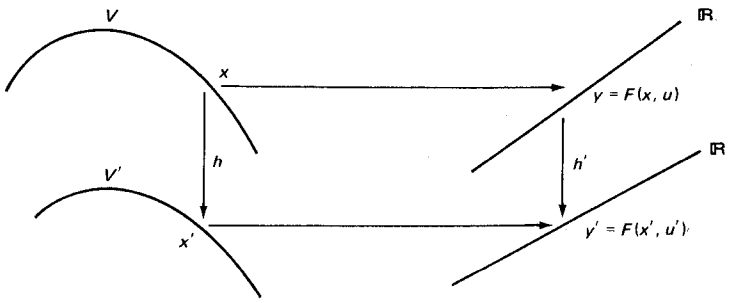


Fig. 4.

h est l'application qui transforme x en x' ; cette application est bijective, elle est tout comme son inverse indéfiniment différentiable ; on dit que h est un difféomorphisme ; h' est également un difféomorphisme ; il transforme $F(x, u) = y$ en $F(x', u') = y'$. Parmi toutes les fonctions F, il en existe une seule dont le nombre p de paramètres u_i est minimal : cette fonction $\hat{F}$ dont l'expression est $\hat{F} = f + u_1 g_1 + u_2 g_2 + \ldots + u_p g_p$ est appelée le *déploiement universel* de f. Dans les cas où le nombre total d'extrémums de f est fini, le déploiement $\hat{F}$ peut être mis sous forme purement polynômiale. La théorie du déploiement universel s'étend aux cas où l'on impose des restrictions à la différentiabilité de h et de h'.

Il faut signaler la propriété importante suivante : Morse, Gromoll et Meyer ont montré que toute fonction f de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dont la dérivée s'annule à l'origine – l'origine est donc un extremum de f et, par suite, un attracteur du système dynamique gradient défini par la fonction f –, peut se mettre au voisinage de l'origine sous la forme : $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = r(y_1, y_2, \ldots, y_k) + \varepsilon_{k+1} x_{k+1}^2 + \varepsilon_{k+2} x_{k+2}^2 + \ldots + \varepsilon_n x_n^2$, où $\varepsilon_i = \pm 1$, et où y_i résulte d'un changement de variables opéré sur les x_i.

Il se trouve que les termes en x_i^2 ne jouent *aucun rôle* dans la construction du déploiement universel de f. Seule la fonction r des k variables $y_1, y_2, \ldots, y_k$ détermine la nature du déploiement et, en définitive, la morphologie locale de la dynamique.

En d'autres termes, parmi les milliers de paramètres concevables ou même mesurables associés à une observation (par exemple n = 50 000), la théorie mathématique montre que seuls un petit nombre d'entre eux (par exemple k = 3) jouent un rôle véritable, sont pertinents et méritent d'être effectivement pris en compte. *Ce théorème de réduction justifie en partie l'étendue des applications possibles de la théorie des catastrophes élémentaires.*

Notons enfin qu'on peut interpréter la propriété de stabilité de F de la manière suivante : lorsque (x, u) varie, le nombre total d'extremums de F, comptés avec leur multiplicité, doit rester *invariant*[10].

La liste des déploiements universels dont le nombre de paramètres internes ne dépasse pas quatre a été établie pour la première fois par Thom. Le plus connu de ces déploiements, et l'un des plus élémentaires, est appelé le *potentiel de Riemann-Hugoniot*. Il a pour expression analytique :

$$F(x, u) = \frac{x^4}{4} + u_2 \frac{x^2}{2} + u_3 x$$

9.6 La notion de catastrophe

L'intérêt majeur de la théorie est de *rendre compréhensible l'apparition de discontinuités* (apparentes) dans un milieu.

Lorsqu'on passe d'un domaine W à un domaine W', les paramètres externes changent en général de valeur. Il existe donc une application $G : W \longrightarrow u$ qui, à chaque domaine élémentaire W, fait correspondre une valeur $u \in R^p$ des paramètres externes. Nous allons voir que les variations de u, même continues, peuvent entraîner des changements discontinus dans les valeurs des paramètres internes.

Un exemple suffira pour illustrer ce propos. Supposons

$$u = (u_2, u_3) \text{ et } F(x, u) = \frac{x^4}{4} + u_2 \frac{x^2}{2} + u_3 x.$$

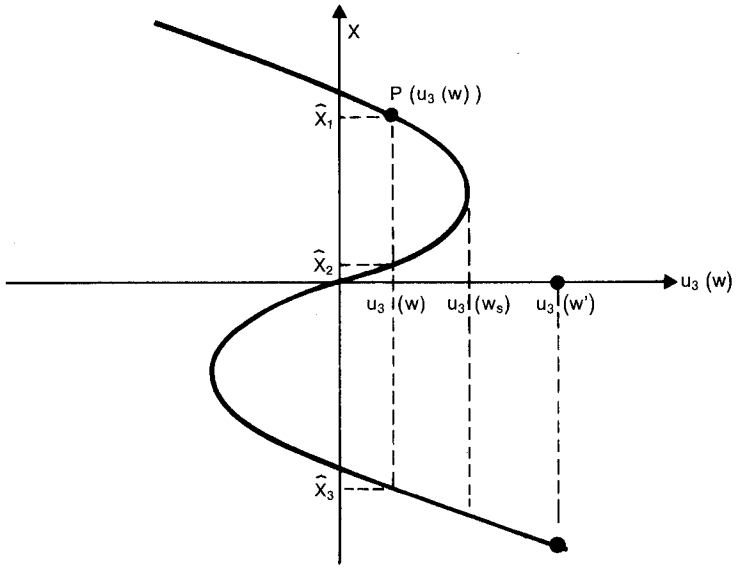
Ce potentiel définit le mouvement du paramètre unidimensionnel x. Celui-ci se stabilise sur l'attracteur $\hat{\chi}$, stable ou instable, en lequel

$$F'_x(\hat{x}, u) = \hat{x}^3 + u_2 \hat{x} + u_3 = 0.$$

Supposons que le paramètre externe u_2 ait une valeur fixée une fois pour toutes, et négative. Dessinons le

10. Ce résultat, conjecturé par l'auteur en 1970, a été publié indépendamment par Damon et Calligo en 1974 [6].

graphe de la fonction $u_3 = -(x^3 + u_2 x)$ – ce graphe est appelé *la fronce.*



Pour une valeur u_3 donnée, l'équation $F'_x(x, u)$ peut avoir une, deux ou trois racines $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$, $\hat{x}_3$. Ces valeurs de x correspondent aux extremums du potentiel F (x, u) :

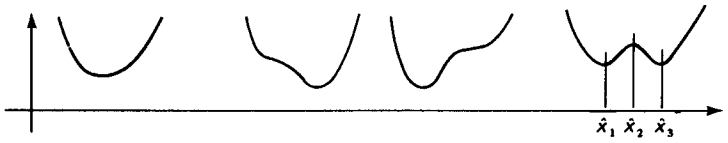


Fig. 6.

Naturellement, un extremum tel que $\hat{x}_2$, qui assure un maximum local du potentiel, correspond à un attracteur instable : il n'a pas, en principe, de réalité physique longtemps assurée, on n'observe guère sa présence. Au contraire, les valeurs $\hat{x}_1$ et $\hat{x}_3$ qui assurent des minimums du potentiel correspondent à des attracteurs stables et observables.

Soit $P(u_3(W))$, le point de la fronce de coordonnées $(u_3(W), \hat{x}_1)$. Supposons qu'il caractérise l'état local du substrat W, et que le déplacement à l'intérieur du substrat, de

W à W', se traduise par une variation continue de u_3 de la gauche vers la droite. On remarque que, lorsque u_3 franchit la valeur $u_3(W_s)$, la valeur de $\hat{x}$ qui annule la dérivée du potentiel passe brusquement de la plage supérieure de la fronce à la plage inférieure : il y a *« catastrophe »* en $u_3(W_s)$.

Naturellement, ce saut dans la valeur de $\hat{x}$ au voisinage de W_s s'exprime sous la forme de modifications importantes dans l'aspect du substrat. Le lieu des domaines W_s où se produisent ces changements locaux d'aspect sera appelé le *domaine d'accidents A* du substrat (accident vient de *accedere*, survenir). L'image par G du domaine d'accident du substrat s'appelle l'*ensemble K de catastrophe* du modèle formel – qui rend compte de l'état du substrat.

La discussion peut porter, ici, sur le choix de l'attracteur par le substrat lorsque, à priori, plusieurs choix sont possibles. Thom a envisagé cette question par référence aux données de la physique. Le substrat peut « décider » avec plus ou moins de retard, d'« hésitation », de se placer au potentiel le plus bas. On ne dispose pour l'instant d'aucun critère formel pour fixer le choix final, car, avant tout, les raisons physiques fines qui président à celui-ci nous sont encore inconnues. La théorie est donc, sur ce point, à l'heure actuelle, d'une grande souplesse : ce qui autorise le succès comme l'erreur dans l'application de la théorie. Notons, là encore, que le choix du potentiel le plus bas se fait d'autant plus facilement que le substrat est plus homogène.

Un autre point de controverse concerne l'application G, appelée quelquefois *application d'évolution ou onde de croissance.* Nous ne savons rien sur les types d'applications auxquels la nature fait appel. On peut raisonner en utilisant l'argument de simplicité : G serait, pour le moins, continue, et, dans un grand nombre de cas, « assez simple », voire proche de l'identité : l'ensemble de catastrophe K, calculé au moyen du modèle formel, donnerait une bonne image du domaine d'accidents observables A. D'où l'idée de dire que si, dans la nature, on observe une morphologie qui ressemble à celle d'un ensemble de catastrophe, l'état du substrat est régi par une dynamique gradient dont le potentiel a justement pour expression celui qui détermine l'ensemble de catastrophe observé.

G a été initialement définie comme allant de l'univers substantiel vers l'univers idéal des entités mathématiques. On retrouve ici la démarche première de la reconstruction par l'homme du monde des idées. Mais, une fois ce monde des idées dévoilé, il faut le renvoyer vers le monde des objets substantiels. On doit donc considérer des applications H de l'espace des paramètres internes dans l'espace-temps, qui associent à tout point d'un ensemble de catastrophe multidimensionnel un point de $\mathbb{R}^4$, où se cristallise l'accident morphologique. Ces applications H ne sont pas quelconques, mais les critères de leur classification font encore défaut.

Pour terminer ce paragraphe, on n'oubliera pas que les déploiements universels polynômiaux que l'on rencontre par exemple dans la théorie des catastrophes élémentaires sont des modèles standard. La nature peut employer des fonctions topologiquement équivalentes à ces polynômes, et dont les expressions analytiques ne sont pas très simples. L'examen du dessin des courbes peut donner d'utiles indications : elles peuvent, bien évidemment, être trompeuses. Il est assez facile de confondre le graphe de $y = x^4$ avec celui de $y = x^6$; une courbe en S donnée *a priori* n'a pas forcément comme modèle un polynôme en x^3, mais, peut-être, un polynôme en x^{2p+1} où $p > 1$. Des études mathématiques et expérimentales approfondies – obtenues par la variation des différents paramètres – permettent probablement en de nombreuses occasions de lever le doute.

9.7 La théorie des catastrophes, théorie inachevée

Rappelons les principaux points sur lesquels la théorie des catastrophes souffre d'obscurités. La théorie des catastrophes est basée sur certaines définitions de la stabilité : que valent-elles pratiquement[4] ? La théorie des catastrophes fait appel à des espaces de paramètres : sur quels critères les définir ? La théorie des catastrophes utilise des dynamiques locales : quelles sont la nature et les propriétés des temps locaux que l'on considère ? La théorie des catastrophes élémentaires repose sur l'emploi de dynamiques gradients : jusqu'à quel point peut-on les utiliser ? Ces dynamiques gradients sont supposées structurellement stables sur tout le substrat : dans quelle mesure cette contrainte est-elle admissible ? Dans quels cas l'emploi d'une théorie des catastrophes non élémentaires serait-il pertinent ? Comment faire un choix dans l'immensité des morphologies-modèles ? La théorie des catastrophes considère des applications entre ces espaces-modèles et l'espace-substrat : que peut-on dire de ces applications ?

Toutes ces questions pendantes montrent à quel point la théorie des catastrophes n'est pas une théorie achevée.

On peut songer à étendre la théorie élémentaire. Des modèles plus généraux peuvent admettre : 1. Une dynamique de type gradient sur tout le substrat ; mais, d'un point à l'autre de ce substrat, cette dynamique peut connaître des évolutions (bifurcations, complexifications, passage de variables de l'état interne (resp. externe) à l'état externe (resp. interne). 2. Une dynamique structurellement stable sur tout le substrat, mais pas forcément de type gradient. 3. Une dynamique non structurellement stable sur tout le substrat et de type quelconque.

Comme seule l'étude des dynamiques à deux dimensions est bien avancée, on acceptera volontiers que le travail qui reste à accomplir pour fabriquer des modèles catastrophiques plus généraux soit immense et difficile.

Les premiers résultats sur les propriétés des dynamiques de type quelconque laissent d'ailleurs perplexe le théoricien : les systèmes dynamiques structurellement stables sont finalement plus rares qu'on ne l'imaginait au départ ; on peut rencontrer des ensembles cantoriens – par conséquent de cardinal infini – constitués d'attracteurs stables ou instables ; on peut passer de manière « catastrophique » d'une valeur du paramètre x_i à une autre, et ce saut de valeur peut être accompagné d'une modification drastique de la nature de l'attracteur.

On ne sait pas encore, en général, identifier ces phénomènes mathématiques à des observables physiques. On peut même alors se demander si certains de ces énoncés ne seraient pas « structurellement instables » dans le monde des idées, dans la mesure où ils ne correspondraient à rien de tangible dans le monde substantiel. Il est nécessaire de poser cette question. La réponse ne peut qu'être d'une prudence extrême. Car il arrive que des résultats mathématiques ne servent que des siècles après avoir été établis. Car les meilleurs progrès en physique ne s'obtiennent que par

la considération de situations idéales dont nous sommes bien sûrs qu'elles n'ont pas de réalité physique (pendule sans frottement, etc.). L'extension de la théorie des catastrophes non élémentaires se heurte donc à des difficultés non triviales, tant de nature mathématique que de nature physique.

La théorie des catastrophes élémentaires elle-même n'en finit pas de poser des problèmes. On ne sait pas encore établir de couplage dynamique entre les paramètres externes et les paramètres internes. Il n'y a aucune raison pour imposer toujours un passage trivial du modèle local au modèle global. On ne peut limiter le nombre de paramètres externes à quatre, celui des paramètres internes à deux. Dans ces conditions, les ensembles de catastrophe deviennent des objets multidimensionnels fort compliqués. On ne voit pas à quelles règles obéiraient les applications H qui permettraient de passer de ces morphologies-modèles multidimensionnelles aux domaines d'accidents des espaces-substrats.

La théorie des catastrophes, même élémentaires, présente en plus l'inconvénient de se prêter difficilement à l'étude quantitative. Dans bien des cas, les paramètres internes et externes, à supposer qu'ils soient bien reconnus, ne sont pas accessibles aux mesures. Étant donné qu'en principe on n'observe qu'un seul attracteur par dynamique locale, alors que ces attracteurs peuvent être en nombre élevé, reconstituer ces dynamiques, à la façon du paléontologue qui tenterait de retrouver la totalité du squelette d'un animal nouveau à partir d'un seul bout d'os n'est guère pensable.

Sommes-nous, en définitive, en présence d'un constat d'échec ?

9.8 Succès de la théorie des catastrophes

La théorie des catastrophes a rencontré d'indéniables succès, elle fait maintenant partie de la petite cohorte des théories scientifiques qui auront permis de comprendre mieux la nature et l'état des choses.

Ce succès, elle le doit d'abord à la grande culture et à la grande intuition de son fondateur. Thom a su réunir des idées déjà connues pour en faire une synthèse originale, il

sait généraliser avec à-propos. La dynamique hamiltonienne, par exemple, utilise la notion d'espace fibré ; dans cette théorie physique, la fibre au-dessus du domaine élémentaire est munie d'une dynamique caractérisée par un champ de vecteurs hamiltonien : sa propriété de « stabilité » se traduit sous la forme de l'invariance des volumes au cours du déplacement temporel.

Thom, en quelque sorte, a proposé des formes de variante et de généralisation de la théorie hamiltonienne. La variante résulte d'abord des travaux de Morse sur l'étude des singularités en électrostatique. Thom fait agir sur la fibre un champ de gradients au lieu d'un champ hamiltonien. La propriété d'invariance de la forme volume est remplacée par la propriété de stabilité d'une fonction potentielle. L'idée de la théorie des catastrophes élémentaires émerge presque naturellement, presque irrésistiblement.

La généralisation consiste à remplacer la dynamique hamiltonienne ou de gradients par une dynamique quelconque, l'invariance de la forme volume ou la stabilité du potentiel par la stabilité structurelle de la dynamique. Cette généralisation est un peu rapide : les systèmes dynamiques hamiltoniens sont en général instables – ce qui n'ôte rien à leur intérêt –, autrement dit la stabilité structurelle n'implique pas l'invariance d'une forme volume, de même que l'invariance de la forme volume n'entraîne pas la stabilité structurelle. Or, dans de nombreux cas concrets (liquides, cytoplasmes...), les volumes[11] restent pratiquement invariants sur d'assez longues périodes de temps. Les propriétés des dynamiques doivent refléter ces contraintes issues de l'observation.

Les véritables dynamiques que l'on doit considérer ne sont pas de formulation élémentaire. En effet, elles doivent tenir compte de la présence de multiples phénomènes d'usure, qui, en général, conduisent à éliminer les attracteurs trop peu stables, surtout dans les cas où ceux-ci forment des ensembles denses. De plus, ces dynamiques doivent prendre en compte l'influence du passé comme celle du futur. Les physiciens modernes en viennent à rejeter les systèmes hamiltoniens où l'on se moque du passé (cf. [9]).

11. On ne saurait bien sûr confondre une forme volume sur un espace coordonnées-vitesses, liée à une densité d'énergie, et un volume dans l'espace ordinaire.

Quant au rôle joué par le futur, chacun de nous en connaît l'importance grâce aux facultés d'anticipation, de prévision, dans lesquelles nous voudrions exceller. La prise en considération de temps multidimensionnels permet de tenir compte des influences concomitantes et réciproques du passé et du futur sur le présent en devenir.

Comme par ailleurs, au cours des décennies, des siècles ou des millénaires, on constate des évolutions marquées par des croissances, par des disparitions, par l'émergence de propriétés nouvelles, par des restructurations, il importe de savoir retracer le dédale mathématique de ces évolutions, le cheminement au sein de la kyrielle mal ordonnée des bifurcations des dynamiques multidimensionnelles.

On peut dire que la théorie des catastrophes soulève ou remet sur la sellette une quantité très importante de problèmes mathématiques et épistémologiques : elle est à cet égard un aiguillon particulièrement actif de la recherche et de la réflexion. Ce n'est pas là le moindre mérite de la théorie des catastrophes.

Il n'est pas de discipline qui ne se sente concernée par cette théorie : elle aura connu un grand succès de popularité. Or, on ne peut pas tromper l'intuition d'un très large public : celui-ci a éprouvé le sentiment, tout comme Salvador Dali [7], que la théorie des catastrophes apportait quelque chose de véritablement neuf.

Cet apport se situe à trois niveaux : celui des concepts, celui de l'observation, celui de la compréhension et de la représentation.

Sur le plan des concepts, la théorie des catastrophes aura non seulement réussi à diffuser un certain nombre de notions et d'approches mathématiques utiles et pertinentes, mais surtout elle aura permis à tous de prendre conscience de l'intérêt majeur que présente le concept de stabilité. Il convient de faire remarquer ici que la théorie des catastrophes s'articule autour de la dichotomie qui nous paraît centrale : permanent-transitoire, ou encore stable-instable, dont la forme continu-discontinu n'est souvent qu'un avatar. La théorie des catastrophes enrichit donc notre manière de penser d'un concept dynamique.

Bien évidemment, cette façon neuve de penser conduit à transformer nos habitudes d'observation. En premier lieu, la théorie des catastrophes, en tant que théorie morphologique, a donné une impulsion nouvelle à l'observation des formes. Les questions du pourquoi et du comment se posent à nouveau à leur propos. En second lieu, l'observation s'intéresse maintenant de très près aux évolutions, elle s'attache à distinguer les phénomènes transitoires ou instables des phénomènes permanents ou stables. La présence du modèle de la théorie des catastrophes conduit les expérimentateurs à rechercher des facteurs explicatifs nouveaux, à essayer de mettre en évidence des évolutions brutales. On sait maintenant, par exemple, que la considération d'un seul paramètre n'apporte rien, en général, à l'intelligence d'un phénomène. Par contre, si l'on a deux paramètres de contrôle u_2 et u_3, il existe souvent, quand on les fait varier simultanément dans le plan (u_2, u_3), une courbe au voisinage de laquelle des variations qualitatives de forme, de vitesse de transformation apparaissent soudain. Ce savoir théorique modifie le comportement des expérimentateurs, qu'ils soient biologistes, spécialistes en physique nucléaire [12] ou en résistance des matériaux : il les pousse à entreprendre des expériences qui illustrent les grands principes sur lesquels est fondée la théorie des catastrophes [25], [26]. En leur redonnant vigueur, en modernisant les processus d'observation, la théorie des catastrophes prépare ainsi de nouvelles découvertes, de nouvelles percées de la science.

Sur le plan de la compréhension, la théorie des catastrophes fait voir pourquoi et comment des discontinuités ou des failles peuvent apparaître au sein d'un même milieu. Cet apport à l'intelligence des phénomènes est loin d'être négligeable, même si, *a posteriori,* la solution donnée par cette théorie au problème de la présence de discontinuités paraît élémentaire. A vrai dire, la possibilité de brusques variations dans les valeurs d'un paramètre est connue depuis longtemps. Ce phénomène mathématique avait déjà été observé par Liénard, par exemple, il y a près de 50 ans [14]. Mais Thom, en créant non sans audace une théorie physique, a su montrer tout le parti que l'on pouvait tirer de considérations dynamiques simples.

L'un des intérêts étonnants de la théorie des catastrophes est, en outre, de donner une unité structurelle à des phénomènes très divers, appartenant aux règnes les plus éloignés de la nature. La théorie structuraliste classique est une théorie statique : on y analyse l'organisation

la stabilité du phénomène par le fait que cette courbe est le graphe d'une fonction « stable » ou « invariante » au sens de la théorie du déploiement universel (paragraphe 9.5). On examine comment cette courbe varie en fonction de paramètres qui jouent le rôle de paramètres de contrôle, et dont l'expérience doit déterminer les valeurs. On tâche, en même temps, de trouver leurs valeurs pour lesquelles des événements catastrophiques apparaîtraient. De telles utilisations de la théorie des catastrophes sont fréquentes. On les rencontre surtout dans les disciplines expérimentales.

Dans les disciplines non expérimentales, l'usage de la théorie des catastrophes est légèrement différent. Cette théorie permet de codifier certains schémas dynamiques que l'on pressent derrière toutes les activités et derrière toutes les constructions naturelles. Dans la majorité des cas, et à l'heure actuelle, ces schémas dynamiques ne sont guère accessibles à l'expérimentation. L'intuition perçoit leur existence et quelques-uns de leurs traits principaux. Faute de données précises, et en première approximation, on les identifie avec des schémas dynamiques inspirés par la théorie des catastrophes élémentaires. Qu'un bon nombre de ces identifications soient abusives et déplacées, cela est fort probable. Mais, pour la première fois dans notre histoire, grâce à la métaphore mathématique, nous avons la possibilité de dégager de leur gangue millénaire des organisations conceptuelles, des schémas d'action mentale. Une nouvelle symbolique se met en place qui emploie le même langage pour décrire des structures narratives, linguistiques ou picturales.

La valeur de cette symbolique est sujette à caution, et il ne manquera certainement pas de bons esprits, très positifs, pour lui dénier toute valeur. C'est faire fi avec légèreté de l'intuition de ceux qui font appel à cette symbolique. C'est oublier que le développement de la connaissance passe par des phases préalables où l'imagination se déploie dans toutes les directions, avant de finir par enserrer, dans des mailles de plus en plus fines et de plus en plus résistantes, les constructions de la vie les plus subtiles. L'histoire saura gré à la théorie des catastrophes d'avoir permis aux forces de l'irrationnel créateur de s'échapper de l'enclos dans lequel les théories classiques les tenaient enfermées. Et que cette théorie en vienne à susciter la genèse

d'œuvres littéraires au sens pur du terme, comme ce conte pour « enfants » de J.P. Duport-Rosan[12], *la Princesse bleue* [8], est une preuve sans équivoque de l'étonnante fécondité de la théorie et des schémas géométriques qu'elle propose.

9.9 Un exemple d'emploi métaphorique de la théorie des catastrophes

L'exemple que nous choisissons d'exposer ici est un exemple de fond. Le schéma d'explication quelque peu philosophique tracé dans *Topologie et perception* [3] et [4] fait appel à un certain nombre d'observations sur le comportement des objets et sur les rapports qui peuvent exister entre eux. Ce nombre d'observations de base dépasse la vingtaine ; par conséquent, ce serait faire preuve de malhonnêteté intellectuelle que de mettre en avant une de ces observations premières et de prétendre qu'elle permet de tout interpréter, et qu'elle est le reflet sinon l'expression de telle ou telle apologie. Ces précautions oratoires sont nécessaires quand on sait que nous acceptons comme observation première cette formule célèbre d'Héraclite : « La guerre est le père de toutes choses et le roi de toutes choses. » Il est certain qu'une mésintelligence ou plutôt une certaine intelligence de cet aphorisme peut prêter le flanc à de nombreuses et très valables critiques, à des excès inadmissibles dans la pratique sociale : les autres observations premières, ou leurs conséquences logiques, l'indiquent assez clairement. Évidemment, l'emploi du terme « guerre » est ici générique : il désigne toutes les formes possibles du combat, moral, intellectuel, économique, physique.

Il arrive parfois, dans les sociétés composées d'objets évolués, que l'entreprise « guerrière » soit la manifestation de « l'impulsion mauvaise » dont parle la *Genèse*, de réactions agressives, l'expression de comportements très personnels et égoïstes. Bien souvent, les combats sont de nature destructrice, et il n'est pas toujours facile de montrer les leçons positives qu'il en résulte à long terme si ce n'est à court terme. De toute façon, les effets de la guerre sont destabilisants. A la faveur de cette destabilisation, les nécessités du combat peuvent conduire à faire naître des

coalitions, des alliances nouvelles. La « guerre » peut donc avoir un pouvoir structurant. C'est dans la compréhension, l'assimilation et la ritualisation, sous le poids d'une expérience millénaire, des comportements associatifs imposés par la nécessité, qu'il faut trouver l'origine, chez les êtres sociaux développés, des attitudes et des conceptions généreuses. Elles sont, par rapport aux comportements égoïstes, dans la même proportion que le néocortex comparé au cerveau limbique.

La situation pour laquelle nous souhaitons proposer un modèle est celle du conflit, qui se trouve au cœur de toutes les évolutions. C'est naturellement par le conflit primitif entre deux actants seulement qu'il convient d'entreprendre cette modélisation.

Les deux protagonistes peuvent être indifférents l'un à l'autre, s'observer avec plus ou moins d'attention, se heurter avec plus ou moins de vigueur. Enfin, les « effets pervers », comme les appellent parfois les sociologues, les renversements de situation ne sont pas rares, ils sont en général très rapides.

Les littératures anciennes, chinoise et grecque en particulier, fourmillent d'exemples de tels retournements d'états. Dans tous ces exemples, un homme d'action commence par réussir par l'emploi d'un procédé contraire aux règles de la justice, qu'il s'agisse des lois physiques ou des lois biologiques, humaines et morales. Enhardi puis enivré par ses succès, cet homme d'action finit par commettre des excès ; excès fatals si, comme Icare ou Œdipe, par exemple, il viole une des lois précédentes. Dans de nombreux cas, la crainte d'être en partie eux-mêmes victimes de ces excès soit de manière directe, soit sous la contagion de leur effet mimétique, l'expérience inconsciente accumulée au cours des siècles, poussent les hommes à déchoir l'homme d'action parvenu au faîte de sa carrière, dans la mesure où aucune contrainte ne l'empêche plus de promulguer des lois destructrices. Ayant perdu le sens des valeurs et la vision globale du monde, oubliant, comme le dit Khalil Gibran dans *le Prophète*, qu'on ne peut « séparer le juste de l'injuste et le bon du méchant », l'homme d'action soumis à l'emprise de sa passion, « cédant à un désir insensé » selon l'expression d'Eschyle, abusé par ses premiers succès, court à sa perte. Ainsi, l'homme d'action qui flatte tout un chacun pour s'en assurer la voix, puis se re-

tourne contre lui et faillit à sa promesse par conviction profonde, ou pour satisfaire les désirs de lobbies plus puissants en apparence que celui qu'il attaque, connaît le juste destin d'une manière de destitution.

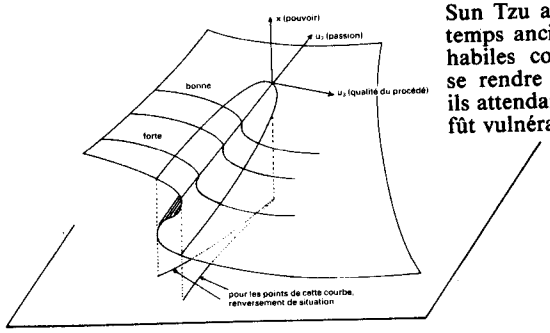
Est-il un moyen de donner une représentation géométrique de ces situations que connaissent tous les hommes ? Comment procéder ? Voici un schéma, fort rudimentaire sans doute, proposé en 1970, et repris dans [5]. Certaines applications de la théorie des catastrophes, attribuées à Zeeman, rentrent dans ce cadre.

Naturellement, puisqu'il faut maintenir une vision globale du couple de protagonistes, le modèle rudimentaire de la théorie des catastrophes suggère d'associer à ce couple une fonction d'« énergie » globale F, dont le graphe ait une forme semblable à celle de l'un des dessins de la figure 6 : chaque minimum représente un actant, et une fonction présentant deux minimums nous suffit puisque nous ne sommes en présence que de deux actants. On choisit pour F la fonction dont l'expression soit la plus simple possible, soit

$$F(x, u) = \frac{x^4}{4} + u_2 \frac{x^2}{2} + u_3 x.$$

Le lieu des extremums de F quand u_2 et u_3 varient est la fronce – dont nous avons dessiné, figure 5, une section par un plan vertical pour u_2 négatif.

Si la représentation par F du couple de protagonistes est quelque peu fondée, on doit pouvoir donner une interprétation réaliste aux différents points de la surface, en conformité avec les données de l'observation.



Sun Tzu a dit : « Dans les temps anciens les guerriers habiles commençaient par se rendre invincibles, puis ils attendaient que l'ennemi fût vulnérable. »

La confrontation entre ces données et la forme de la surface suggère immédiatement de ne prendre d'abord en considération que des domaines W = DxT où D est fixé. Si nous supposions D variable, alors on enrichirait l'analyse précédente en introduisant des situations où le pouvoir s'efface sur un certain territoire, alors que, sur d'autres, il peut se maintenir ou même se renforcer. Dans la situation très simple où nous nous plaçons, le pouvoir est uniforme sur tout le domaine considéré. Nous examinons sa variation temporelle.

Supposons que u_2 représente l'intensité de la passion qu'éprouve l'homme d'action – orientée dans le sens des fortes passions vers les plus faibles. La variable u_3 représente la qualité du procédé employé pour satisfaire cette passion, par exemple celle du pouvoir, x, que l'un des protagonistes exerce sur l'autre. La partie de la surface pour laquelle u_2 est positif représente l'ensemble des situations où les deux protagonistes sont indifférents l'un à l'autre – bien qu'au voisinage de l'origine on puisse penser qu'ils commencent à se regarder en chiens de faïence. La partie de la surface pour laquelle u_2 est négatif correspond à des situations de conflit ouvert.

On peut contester avec vigueur la validité de ce schéma géométrique avec lequel il est possible de jouer déjà un peu. Pris pour argent comptant, ne peut-il pas, par exemple, encourager certains dans des attitudes conformes à leurs ambitions et à leur caractère, mais que la morale réprouve ? Quel peut être l'intérêt opératoire d'un modèle où la signification proposée des différentes variables est si vague et si peu approfondie ? Ce modèle local (il est contenu dans tout modèle plus riche qui serait caractérisé par une fonction polynômiale à une ou plusieurs variables de degré au moins égal à quatre) n'est-il pas trop élémentaire pour que son analyse apporte des renseignements et des aperçus que l'on ne connaissait déjà ?

Ces critiques sont majeures, mais personne ne les ignore tant elles sont évidentes. C'est donc en effet avec un sentiment de doute et de prudence que chacun examine et retient ce modèle. Pour l'instant tout du moins, le danger d'un mauvais usage du modèle paraît peu fondé. C'est encore un objet de curiosité.

Et c'est bien là que réside l'un des grands intérêts du modèle. Il apporte une incitation à une réflexion plus ap-

profondie, il sert d'amorce à une étude plus détaillée et plus fine, par la prise en considération d'autres facteurs, comme par exemple l'influence d'éventuels groupes de pressions, ou bien les effets qu'engendre la répétition d'erreurs semblables entre elles.

N'est-il pas, par ailleurs, plaisant pour l'esprit d'avoir à sa disposition un schéma géométrique qui permet, d'un bloc, de se représenter tout un ensemble de situations et d'événements ? L'outil permet de réaliser une grande économie de moyens : c'est une raison pour laquelle il restera, même si les progrès dans l'analyse des situations avancent peu. Enfin, il apporte à chacun cette vision globale qui fait trop souvent totalement défaut, et qui débouche sur la sagesse du comportement.

On peut lire dans le traité *Pirké Aboth* de la *Michna* que « l'astronomie et la géométrie sont des appendices de la sagesse ». La théorie des catastrophes nous laisse entendre qu'elles peuvent aussi en être la source, confirmant ainsi la conviction profonde dont Platon nous a fait part dans son *Epinomis*[13].

Conclusion

Le bilan des apports et des faiblesses de la théorie des catastrophes est largement positif en faveur des premiers. La science ne travaille pas seulement avec le simple appareil de mesure. Elle est tout autant tributaire de l'outil conceptuel. La théorie des catastrophes apporte, sur ce plan, un appareil neuf. A lui seul, il ne permet pas de tout expliquer, mais, en orientant de manière nouvelle et dynamique l'observation, il fait entrevoir des perspectives de développement enrichissantes.

Qu'en bien des domaines la prévision quantitative si ce n'est qualitative soit encore hors de notre atteinte n'a rien de déshonorant. L'astronomie est l'un des plus beaux fleurons de la science ; c'est également l'un des plus anciens. Nous ignorons combien de millénaires séparent de Ptolémée les premiers hommes qui ont interrogé le ciel. Entre le système de Ptolémée et la théorie d'Einstein, il n'y a rien

13. Il semble peu probable, selon les experts, que Platon ait effectivement écrit cet ouvrage.

moins que dix-sept siècles. Et, malgré tout, en dépit des succès de l'astronomie empirique comme mathématique, le simple problème à trois corps n'a toujours pas trouvé de solution définitive. L'impatience dont certains font preuve à vouloir qu'une seule idée résolve d'un trait et en quelques heures la totalité des problèmes que se pose la science ne témoigne pas en faveur du réalisme et du bon sens scientifique de ces savants. L'attitude un peu négative de Thom à l'égard de la valeur prédictive de la théorie des catastrophes sur le plan quantitatif, quels que soient les mobiles qui accompagnent cette prise de position, ne manque pas de justesse si l'on considère les situations présentes de l'information expérimentale et de la théorie des catastrophes elle-même.

Dans son état actuel de jeunesse, cette théorie est, à la manière de la cellule germinale, totipotente. Elle contient le meilleur et le pire. Mais, au fil des âges, elle prendra une assise expérimentale plus grande, son domaine de validité sera mieux cerné[14], son champ d'application mieux défini. Les techniques, les possibilités, les critères et les objectifs de l'observation auront changé. Quel sera le statut, dans dix-sept siècles, de la théorie des catastrophes, comment aura-t-il évolué ?

Tout l'effort de la pensée humaine est orienté vers la simulation de l'environnement, jusqu'à un terme que l'on s'attache, chaque jour, à reculer davantage. Cet effort humain semble s'inscrire dans le cadre d'une démarche générale du développement animal. Prendre conscience de la présence de ce courant qui nous emporte devrait nous permettre d'en expliquer un jour la raison d'être. Alors pourra-t-on se demander s'il convient de lutter contre lui, ou de le suivre, si nous sommes, définitivement, les pions d'un échiquier, ou des dieux en devenir. La théorie des catastrophes ne sera-t-elle plus qu'un jeu entre les mains des dieux, ou bien apparaîtra-t-elle comme l'expression d'une forme divine qui nous permet de jouer avec elle ? Comme les jouets que l'on donne aux enfants pour mieux les aider à connaître le monde...

14. Par exemple, il est maintenant établi que l'ensemble de catastrophe K défini pour les fonctions F se confond avec l'ensemble de bifurcation B des systèmes gradients dérivant des potentiels F et associés à la métrique pythagoricienne, dans le seul cas où la variable x est unidimensionnelle.
Dans le cas où x est multidimensionnelle, l'existence d'une métrique pour laquelle K et B sont identiques est encore à l'état de conjecture.

BIBLIOGRAPHIE *

[1] M.V. Berry et J.F. Nye, « Fine structure in Caustic Junction », *Nature*, 267, 1977, p. 34-36.

[2] C.P. Bruter, « Quelques aspects de la percepto-linguistique », *TA Informations*, 2, 1972, p. 15-19.

[3] C.P. Bruter, *Topologie et perception*, tome 1, Bases philosophiques (préface de R. Thom), Maloine-Doin, Paris, 1974, avec corrections et compléments 1978 (épuisé).

[4] C.P. Bruter, *Topologie et perception*, tome 2, Aspects neurophysiologiques, Maloine-Doin, 1976.

[5] C.P. Bruter « Secondes remarques sur la percepto-linguistique », *Publ. Centro internazionale di semiotica e di linguistica*, Università di Urbino, serie A, n° 6, juin 1971.

[6] J. Damon, A. Calligo, « A Topological Invariant for Stable Map Germs », *Inventiones Math.*, 32, 1976, p. 103-132.

[7] S. Dali, « Les mandales de Dali », *Le Sauvage*, oct. 1976, p. 92-103.

[8] J.P. Duport-Rosan, *La Princesse bleue*, Éditions Le Cormier, Louvain-la-Neuve, 1978.

[9] F. Fer, *L'Irréversibilité*, Gauthier-Villars, Paris, 1977.

[10] J. Guckenheimer, « Catastrophes and Partial Differential Equations », *Ann. Inst. Fourier*, 23, 1973, p. 31-59.

[11] K. Jänisch, « Caustics and Catastrophes », *Math. Ann.*, 209, 1974, p. 161-180.

[12] C.G. Källman, « Cusp Catastrophes and Phase Transition in Dense Nuclear Matter and Finite Nuclei », *Physica Scripta*, 14, 1976, p. 197-198.

[13] J.M. Lévy-Leblond, « Des mathématiques catastrophiques », *Critique*, 33, 1977, p. 430-441.

[14] A. Liénard, « Étude des oscillations entretenues », *Revue générale de l'électricité*, 23, 1928, p. 901-954.

[15] V.P. Palamodov, « Deformations of Complex Spaces », *Russian Math. Surveys*, vol. 31, n° 3, 1976, p. 129-197.

[16] J. Roels, « Sur la décomposition locale d'un champ de vecteurs sur une surface symplectique en un gradient et un champ hamiltonien », *C.R. Académie des sciences*, Paris, série A, t. 278, 1974, p. 29-31.

[17] S. Smale, « Catastrophe Theory ; Selected Papers » by E.C. Zeeman, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 84, 6, 1978, p. 1360-1368.

[18] H. Sussman et R. Zahler, « Catastrophe Theory as Applied to the Social and Biological Sciences : A Critique », *Synthese*, 37, 1978, p. 117-216.

[19] R. Thom, *Morphogenèse et stabilité structurelle*, Édiscience, Paris, 1972.

* Une bibliographie complète sur la théorie des catastrophes contient aujourd'hui plusieurs centaines de titres. Zeeman, à l'université de Warwick, s'efforce de la tenir à jour.

[20] R. Thom, *Modèles mathématiques de la morphogenèse*, Éditions 10/18, Paris, 1974 (première édition).
[21] R. Thom, « Phase Transitions as Catastrophes », *Stat. Mechanics*, Univers. Chicago Press, 1972, p. 93-109.
[22] R. Thom, « A Global Dynamique Scheme for Vertebrate Embryology », *Lecture on Maths. in the Life Sciences*, vol. 5, 1973, p. 3-45.
[23] R. Thom, « L'évolution temporelle des catastrophes », *Applications of Global Analysis*, 1973, p. 61-69.
[24] R. Thom, « La théorie des catastrophes, état présent et perspectives », *Manifold*, 14, 1973, p. 16-23.
[25] J.M.T. Thompson, « Experiments in Catastrophe », *Nature*, 254, 1975, p. 392-395.
[26] J.M.T. Thompson et G.W. Hunt, *A General Theory of Elastic Stability*, Wiley, Londres, 1973.
[27] E.C. Zeeman, « Primary and Secondary Waves in Developmental Biology », *Lecture on Maths. in the Life Sciences*, vol. 7, 1974.
[28] E.C. Zeeman, « Catastrophes Theory, a Reply to Thom », *Manifold*, 15, 1974, p. 6-15.

CONCLUSION[1]

Les apprentis forgerons que nous sommes ne cessent de se soumettre à la discipline rude de l'école. Nous essayons de faire couler dans les justes canaux l'énergie de notre intellect, de façonner les démarches vagabondes de notre pensée, de manière à développer en nous les qualités d'observation et les aptitudes à reconstruire le déroulement causal des événements. A cet égard, les modèles, qui ont pour vertu de nous rendre momentanément maîtres de la vitesse des évolutions, et par là de nous donner le loisir d'observer avec le plus grand soin les étapes des changements, constituent un outil privilégié : les hommes n'ont jamais cessé d'y recourir, ni de chercher à en accroître la diversité et les qualités de représentation.

Sans doute, par suite de ses capacités limitées, l'entendement a tendance à se rebeller contre l'excessive variété. Il lui cherche des contreparties, en essayant de tout réduire à des principes directeurs, à des propriétés intrinsèques et universelles en nombre restreint. Cette réflexion sur les directives architecturales de l'univers est du ressort de la philosophie naturelle. Tous les grands savants l'ont pratiquée et ont reconnu leur dette à son égard. Dans sa *Leçon inaugurale sur la philosophie naturelle*, Boltzmann note : « Non seulement Robert Mayer, qui fut un philosophe complet, mais aussi Maxwell, Helmoltz, Kirchoff,

1. Rédigée en mars 1981.