

C.P. BRUTER

Université Paris 12

0. Introduction

Examiner les rapports possibles entre topologie et analyse des systèmes suppose naturellement une connaissance claire et approfondie de ces deux disciplines. Or dès le départ nous nous heurtons à une difficulté de taille ; la théorie des systèmes est une théorie mal définie, la notion de système (1) elle-même est complexe et imprécise. On en vient à se demander si le terme de système ne devrait pas être considéré comme un terme primitif du langage à la manière d'élément en théorie des ensembles. La démarche de pensée des spécialistes de la théorie des systèmes consiste d'ailleurs à descendre du tout vers les parties ; au fur et à mesure que se poursuit cette plongée vers le partial, que s'affine l'analyse du système en ses composants, les connaissances se précisent.

La pensée physique et, à travers ses constructions axiomatiques à la Bourbaki, la pensée mathématique tentent au contraire d'aller des éléments vers l'ensemble. Le monde physique et minéral se construit par juxtaposition, selon un processus de recouvrement en couches successives d'origine extérieure à l'objet en formation. L'univers biologique, végétal comme animal croît, à l'inverse, par intussusception. La pensée organique se déploie et se différencie en référence à sa structure globale, interne et masquée. Elle évolue en suivant le relief d'un paysage épigénétique, image en miroir en quelque sorte du paysage géographique habituel.

(1) Sur la définition de cette notion, on pourra consulter : [11], [12], [16], [17], [19], [25]

Ainsi la démarche systématique traite principalement du tout vers la partie alors que la progression topologique prendrait comme point de départ l'élément et s'achèverait à la construction de l'ensemble. Pourtant, cette dualité simple n'est que d'apparence, car il existe un balancement entre l'équilibre de la partie et celle du tout, de sorte que toute construction vraie fait appel aux deux modes de progression. Selon le règne auquel cette construction appartient, une mode de progression est privilégié sur l'autre. L'image vient ici à l'esprit des cerveaux masculin et féminin avec leur hémisphères aux aptitudes inégales et complémentaires.

Cependant, pour notre propos, le trait dominant reste cette dualité entre la démarche systématique, descente vers la partie, et la progression topologique, ascension vers la totalité. Nous allons donc nous efforcer, dans cette étude, de tirer le meilleur profit du parallélisme inversé.

1. Place de la topologie dans les mathématiques. Divisions de la topologie

Les mathématiques reposent sur deux piliers : un pilier topologique et qualitatif ; un pilier arithmétique et quantitatif. La topologie étudie en premier lieu les qualités du substrat des différents objets mathématiques. Cette étude est le propos de la topologie générale. Un premier pas dans la direction du numérique est accompli avec la définition d'une forme ou variété. Cependant ces formes sont considérées en elles-mêmes, et ne possèdent aucune qualité métrique : la notion de distance entre deux points ne joue aucun rôle et n'est même pas définie. L'étude de ces formes, de leur construction, de leur composition, de leur classification, est le propos de la topologie différentielle et de la topologie algébrique. L'étude du mouvement dans les variétés est le propos de la topologie dynamique et de la dynamique qualitative.

Si l'on veut faire du quantitatif, il faut introduire explicitement des métriques. On appelle variété riemannienne (ou figure) une variété (ou forme) dotée d'une métrique riemannienne. Leur étude est le but de la

généralité. On s'attache, dans cette discipline à rechercher des caractéristiques invariantes des figures sous l'action de transformations.

L'analyse différentielle est un outil utile dans l'étude des propriétés des variétés. L'analyse examine les propriétés locales des applications d'un espace-source dans un espace-but.

2. Localisation. Voisinage et connexité

La première propriété d'un objet est celle d'exister dans l'espace et dans le temps. Il occupe toujours un certain domaine spatio-temporel. Ce sont les propriétés de ce domaine qui, en premier lieu, doivent retenir l'attention. Il est clair en effet que la simple localisation de ce domaine, l'évaluation de son étendue, les caractéristiques de sa forme, sont des éléments indicatifs des différentes qualités de l'objet.

La définition mathématique d'un domaine ou espace topologique est de nature ensembliste, ce qui présente un gros avantage. On associe à chaque élément a de l'ensemble, des voisinages V de cet élément. Quoi de plus naturel : tout objet ^{est} un ensemble social, et ce qui caractérise avant tout un tel objet est bien l'existence de relations entre les constituants. La stabilité d'une société est d'abord fonction des liens de bon voisinage que les membres de cette société entretiennent entre eux. On ne comprend bien l'évolution d'un objet qu'à la condition de tenir compte des effets de l'environnement, des influences des éléments voisins.

Quelles sont, pour un mathématicien, les propriétés d'un voisinage V de a ? D'abord, a est contenu dans V . Ensuite, toute partie qui contient V est évidemment encore un voisinage de a . Un troisième lieu, il est clair que les éléments communs à deux voisinages de a constituent également un voisinage de a . Enfin, si on prend un point b très voisin du point a , le voisinage de a est aussi un voisinage de b .

Comme le lecteur en est bien conscient, il n'est pas besoin d'être un génie pour observer ces propriétés des voisinages. Ce qu'on appelle maintenant espace topologique est, tout simplement, un ensemble d'éléments qui, tous, possèdent des voisinages constitués d'éléments appartenant à cet ensemble. L'adjectif topologique fait savant, sans plus. Vous prenez des éléments, des voisinages de ces éléments, vous rassemblez le tout, et vous obtenez une sorte de substrat que vous appelez espace topologique.

Il est bien clair qu'un même objet peut être muni de plusieurs topologies, selon la nature des relations entre les éléments, ou selon les procédés techniques employés pour maintenir ces liens. Une petite réflexion sur cette question conduit immédiatement à définir la notion peu subtile de connexité. Nous dirons qu'une partie A est connexe si, quels que soient les éléments a et a' de cette partie, la communication est possible entre ces deux éléments. Autrement dit, il existe une suite ordonnée d'éléments $a, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, a'$, de telle sorte qu'on puisse échanger des renseignements entre a_i et a_{i+1} , en d'autres termes il existe deux voisinages respectivement de a_i et de a_{i+1} qui se rencontrent : $V(a_i) \cap V(a_{i+1}) \neq \emptyset$.⁽¹⁾ Une composante connexe de E est une partie connexe C de E maximale en ce sens qu'il n'est point d'autre partie connexe de E qui contienne C .

Il paraît vraisemblable que la plupart des objets sociaux sont munis de plusieurs topologies. Certaines sont plus "résistantes" que d'autres. Si un objet est connexe pour deux topologies distinctes, nous dirons qu'il est de connexité d'ordre 2. La stabilité d'un objet de connexité d'ordre 2 est dans doute meilleure que la stabilité d'un objet de connexité d'ordre 1. Notons que, du point de vue mathématique, on peut toujours définir sur un ensemble deux topologies au moins, la grossière et la discrète ; ces topologies n'ont aucun intérêt physique, nous n'en parlerons pas davantage.

(1) On ne prendra pas cette condition pour la définition mathématique. En effet, le second axiome des voisinages implique que le tout est voisinage de chaque élément, la condition indiquée est alors trivialement vérifiée. Une définition plus précise est de dire que l'espace ne peut s'écrire comme l'union de deux parties disjointes, telles que tout point d'une partie ait tous ses voisinages non disjoints contenus seulement dans cette partie.

3. La notion de stabilité topologique

La mathématique est la science du général. A ce titre, de manière consciente ou non, elle se préoccupe des propriétés universelles que présentent les objets. Parmi ces propriétés importantes, l'une d'elles est la stabilité.

Un objet ne pourrait en effet être saisi par les sens, s'il ne possédait pas quelques propriétés de persistance dans l'espace et au cours du temps.

Le programme qu'il convient maintenant de suivre est de préciser la notion de stabilité du point de vue mathématique, puis, avant d'étudier leur évolution, de construire nos objets de manière à ce qu'ils restent stables.

La notion la plus lâche de stabilité est celle de stabilité topologique (stabilité qualitative). On ne se préoccupe pas de considérations métriques, de longueurs. On veut seulement que soient conservées les qualités topologiques, en particulier celles associées aux voisinages.

La partie M_1 de l'espace topologique E_1 est équivalente du point de vue topologique à la partie M_2 de l'espace topologique E_2 , si les deux conditions suivantes, très naturelles, sont satisfaites : première condition, à tout point a_1 de M_1 , on peut faire correspondre un point unique $a_2 = h(a_1)$ de M_2 , et inversement, à tout point a_2 de M_2 est associé un point unique a_1 de M_1 , de sorte que $a_2 = h(a_1)$. On dit que h est une bijection : M_1 et M_2 ont donc autant de points l'un que l'autre, et la correspondance h qui permet de passer de M_1 à M_2 , et de M_2 à M_1 , est définie sans ambiguïté.

La seconde condition porte sur les voisinages. Supposons donnés a_1 et a_2 tels que $a_2 = h(a_1)$. On exige que la topologie sur E_1 est préservée par transport selon h , lorsqu'à tout voisinage de a_2 ,

$V(a_2)$ correspond un voisinage $V(a_1)$ de a_1 , dont l'image par h forme un nouveau voisinage de a_2 , $h(V(a_1))$, contenu dans $V(a_2)$.

On dit que h est continue. En fait, la seconde condition exige davantage : il faut non seulement que l'application h de M_1 vers M_2 soit continue, mais qu'également, l'application h^{-1} de M_2 vers M_1 soit elle-même continue : h est bicontinue.

Lorsque toutes ces conditions sont réunies, M_1 et M_2 sont équivalentes du point de vue topologique, l'application h est une équivalence topologique ou encore un homéomorphisme. M_1 et M_2 sont homéomorphes, et h est une application qui respecte la stabilité topologique. Pour une fois, les mathématiciens disposent d'un vocabulaire important pour exprimer la même notion.

Un exemple montrera combien la notion de stabilité topologique est une notion de stabilité faible. Prenons un morceau de pâte à modeler : on peut la pétrir et lui donner la forme d'une boule, celle d'un cube, celle d'un "patatoïde" quelconque : toutes ces formes sont homéomorphes. Voici au contraire un exemple de deux formes qui ne sont pas homéomorphes : celle du cercle S_1 et celle du disque D_1 (le segment $[-1, +1]$) ; si on tente de circonscrire S_1 avec D_1 , on est amené à confondre les extrémités de D_1 : à un certain point de S_1 correspondraient deux points de D_1 , ses extrémités : il n'y aurait donc pas toujours bijection entre les points de D_1 et ceux de S_1 .

Quelles que soient les qualités de la notion de stabilité que l'on emploie, l'intérêt du concept est considérable. Pour être d'une utilité quelconque, tout calcul prévisionnel doit obligatoirement être étayé par une étude de la stabilité des résultats, en fonction des variations qui peuvent affecter les données et diverses contraintes.

4. Sur les espaces topologiques considérés en mathématiques

On peut dire, de manière un peu abrupte, que les mathématiciens considèrent, pour l'essentiel, deux types d'espaces. Les espaces numériques dans lesquels peuvent être plongées les formes, et les espaces

fonctionnels ou espaces des applications d'une forme dans une autre, ou encore des représentations d'une forme par d'autres.

Il faut constamment avoir présent à l'esprit que les mathématiques sur lesquelles travaillent les mathématiciens contemporains doivent principalement être comprises comme une représentation de l'espace et des objets du monde physique. C'est en pratique ce point de vue que Félix Klein expose dans son discours sur "Riemann et son influence sur les mathématiques modernes" (Vienne, 1894) : "Il y est question" (dans des courts fragments de l'œuvre posthume de Riemann) "de quelques principes qui n'ont en commun que cette idée aujourd'hui bien généralement adoptée, du moins par la nouvelle école de physiciens qui suit Maxwell dans sa théorie électromagnétique de la lumière. C'est l'hypothèse d'après laquelle l'espace est rempli d'un fluide répandu d'une manière continue et qui est, en même temps, le véhicule des manifestations de la lumière, de l'électricité et de la gravité... Je veux faire observer, en y insistant, que c'est dans cet ordre d'idées qu'il faut chercher la source des développements mathématiques purs dûs à Riemann". Le rôle joué en physique par la négation des forces agissant à distance et l'explication des phénomènes au moyen des forces intérieures d'un éther qui remplit l'espace, ce rôle, dis-je, est joué, en mathématiques, par la définition des fonctions au moyen de leur mode d'existence dans le domaine infinitésimal et, par conséquent, en particulier au moyen des équations différentielles auxquelles elles satisfont".

Riemann lui-même dans son article sur les "hypothèses qui servent de fondement à la géométrie", écrit que les considérations auxquelles il parvient, ont pour destination finale de servir la physique : "Ceci nous conduit dans le domaine d'une autre science, dans le domaine de la physique, où l'objet auquel est destiné ce travail ne nous permet pas de pénétrer aujourd'hui".

Un adepte de l'approche globale des phénomènes ne peut suivre Riemann lorsqu'il écrit : "Les questions sur l'immesurablement grand sont des questions inutiles pour l'explication de la nature". Il se trouve

que l'immensurablement grand, aussi bien que l'infiniment petit, échappe véritablement à notre entendement, et qu'il est exact que l'infiniment petit paraît mieux faire partie de notre nature que l'immensurablement grand. De par notre constitution, il nous est davantage possible d'apercevoir les détails de l'écorce que l'étendue de la forêt. Néanmoins, il n'est pas sûr que ce rejet de prendre en considération l'immensurablement grand, ne soit pas, en définitive, une échappatoire et une erreur.

Riemann s'attache donc principalement à "l'immensurablement petit. C'est sur l'exactitude avec laquelle nous suivons les phénomènes dans l'infiniment petit, que repose essentiellement notre connaissance de leurs rapports de causalité". C'est aussi oublier d'une part qu'il ne peut y avoir causalité sans stabilité, d'autre part qu'une apparence de continuité et de simplicité peut cacher une multiplicité locale d'événements secondaires, perceptibles à un ordre d'infinitude dans le petit bien supérieur à celui au niveau duquel les phénomènes sont saisis par l'expérience ou perçus par les sens. S'il appartient au destin prométhéen de l'homme de poursuivre sa recherche vers la connaissance de l'immensurablement grand comme de l'immensurablement petit, il reste sage également de suivre la règle d'humilité hébraïque, et de croire que ces extrêmes seront à jamais hors de notre compréhension. Le savant restera toujours sollicité entre l'appel révolutionnaire de l'intelligence, et la soumission sclérosante à l'institution naturelle.

Maïs poursuivons la lecture de Riemann : "Les progrès des derniers siècles dans la connaissance de la nature mécanique dépendent presque seulement de l'exactitude de la construction, qui est devenue possible, grâce à l'invention de l'analyse de l'infini, et aux principes simples découverts par Archimède, par Galilée et par Newton, et dont se sert la Physique moderne. Mais dans les sciences naturelles, où les principes simples manquent encore pour de telles constructions, on cherche à connaître le rapport de causalité en suivant les phénomènes dans l'étendue très petite, aussi loin que le permet le microscope. Les questions sur les rapports métriques de l'espace dans l'immensurablement petit ne sont donc pas des questions superflues". Quelques lignes plus loin, Riemann

n'hésite pas, à juste raison, à émettre des doutes sur l'aptitude même des modèles géométriques dont il assait les fondations, à représenter l'état du monde physique dans des échelles d'infiniment petit d'ordre élevé : "Or, il semble que les concepts empiriques, sur lesquels sont fondées les déterminations métriques de l'étendue, le concept du corps solide et celui du rayon lumineux, cessent de subsister dans l'infiniment petit. Il est donc très légitime de supposer que les rapports métriques de l'espace dans l'infiniment petit ne sont pas conformes aux hypothèses de la géométrie, et c'est ce qu'il faudrait effectivement admettre, du moment où l'on obtiendrait par là une explication plus simple des phénomènes". Les spécialistes de la mécanique quantique et des particules élémentaires ne perdraient sans doute rien à réfléchir sur ces propos.

On peut donc concevoir les espaces numériques en tant qu'espaces topologiques comme des images plus ou moins fines de l'éther. Des forces internes lui impriment des courbures et des torsions locales, ces forces et courbures sont représentées numériquement par des métriques locales qui définissent la géométrie de l'espace.

Les principaux espaces numériques sont : les espaces numériques "discrets" \mathbb{N} , l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$ l'ensemble des entiers, \mathbb{Q}_m l'ensemble des rationnels $\frac{p}{q}$ tronqués à la m-ième décimale (de ratio, rapport, p, q sont des entiers). Les ordinateurs travaillent sur des éléments appartenant à ces espaces. Viennent ensuite les espaces numériques "continus" comprenant \mathbb{Q} , l'ensemble des rationnels $\frac{p}{q}$, l'ensemble des réels \mathbb{R} formé de tous les nombres qui sont soit rationnels, soit irrationnels comme $\sqrt{2}$, soit algébriques comme les valeurs qui annulent un polynôme), soit transcendants

comme e, π, \dots) \in l'ensemble des nombre complexes $1 a + \sqrt{-1} b$ où a et b sont réels, \mathbb{H} l'ensemble des quaternions de la forme $1 a + \sqrt{-1} b + j c + k d$ où 1, -1, j, k sont des unités fixes liées entre elles par des relations et a, b, c, d sont réels.

Deux problèmes se posent à nous : étudier les propriétés topologiques des espaces numériques continus ; examiner la formation des objets au sein de cet espace.

Si le second problème peut retenir l'intérêt immédiat du spécialiste des systèmes -si toutefois un tel spécialiste existe- le premier problème ne paraît pas, à première vue, présenter une grande importance pratique. En fait, derrière cette étude, se cache non seulement le problème de la définition des formes, mais aussi celui du passage, en mathématiques tout au moins, du local au global. Il est supérieurement nécessaire d'introduire quelques notions préliminaires.

5. La notion de métrique

L'espoir majeur de l'homme d'action qui fait appel à l'aide des mathématiques est de parvenir à des prévisions quantifiées. Dans cette perspective, les mathématiciens ont précisé la notion de distance entre deux états, entre deux lieux, entre deux points quelconques P et M d'un espace.

La distance entre Paris et Marseille est, peut-être, voisine de $1000\pi/3 = 1047, \dots$ km. C'est en tout cas un nombre décimal positif ou nul, un élément de l'ensemble noté \mathbb{R}^+ . Naturellement, la distance entre Marseille et Marseille est nulle, $d(M, M) = 0$, quel que soit l'élément M de l'espace. Un trajet étant donné, la distance kilométrique est la même pour aller de Paris à Marseille, ou de Marseille à Paris : $d(P, M) = d(M, P)$. Enfin, il est bien connu qu'on rallonge le parcours si l'on fait un détour. Si au lieu d'aller directement à Marseille, le voyageur s'écarte de la route pour faire un crochet par Simiane-la-Rotonde, il est certain que $d(P, M) \leq d(P, S) + d(S, M)$.

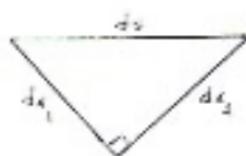
La notion de distance est aussi difficile à saisir que celle de voisinage. Un espace topologique muni d'une distance s'appelle un espace métrique. Dans la fond, en pratique, tous les espaces sont topologiques et presque tous sont métriques.

Mais on observera cette curiosité : un espace topologique étant donné, on peut lui associer plusieurs métriques, et très différentes les unes des autres.

Prenez par exemple une feuille de papier représentant un plan, c'est-à-dire des points entourés de voisinages "plats". Une distance entre deux points de cet espace peut être évaluée en litres d'essence que parcourt une "voiture éralon", ou bien en kilomètres selon un trajet défini par la morphologie des routes ou des rues qui permettent de se rendre d'un point à un autre.

Certaines de ces métriques ont une formulation analytique simple. D'abord une notation : étant donnés deux points très voisins l'un de l'autre, on note par ds la longueur du chemin qui les joint. Pour évaluer cette longueur, on utilise en général le théorème de Pythagore, dans lequel intervient le carré de ds soit ds^2 . Le théorème de Pythagore classique permet de définir des métriques pythagoriciennes : dans le plan

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2$$



dans l'espace à trois dimensions

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

Naturellement, on peut songer à établir des métriques plus générales,

$$ds^2 = a_1 dx_1^2 + a_2 dx_2^2 + a_3 dx_3^2$$

où a_1, a_2, a_3 sont des constantes, telles que ds^2 reste positif. De telles métriques sont dites euclydiennes. Si les coefficients a_i ne sont plus constants, mais fonction $a_i(x_1, x_2, x_3)$ des points (x_1, x_2, x_3) de l'espace dans lequel on se déplace, les métriques correspondantes sont dites riemanniennes. En physique, on utilise fréquemment la métrique relativiste

$$ds^2 = D (dx_4)^2 - A (dx_1)^2 - B (dx_2)^2 - C (dx_3)^2$$

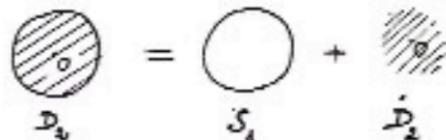
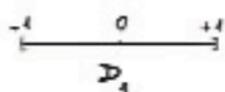
où $A = B = C = D = 1$, $x_4 = ct$, c désignant la vitesse de la lumière, t le "temps des physiciens". En biologie, l'étude géométrique de la sensation conduit à faire appel à la métrique sensorielle [3]

$$ds^2 = b_1 \left(\frac{dy_1}{y_1} \right)^2 + b_2 \left(\frac{dy_2}{y_2} \right)^2 + b_3 \left(\frac{dy_3}{y_3} \right)^2.$$

6. Le jeu des Boules. La théorie des sphères. Voisinsages ouverts et fermés

Les plus stables d'entre les objets primaires construits par la Nature ont la forme de boules. Que l'on songe à la forme des astres, de la coquille de noix, de l'église byzantine, des domaines occupés par les villages et les villes. Aussi, désormais, les boules vont jouer un rôle fondamental dans la construction de nos objets mathématiques. Elles seront les briques qui, assemblées, constitueront nos édifices. Cette approche des formes est contraire à l'esprit de la théorie des systèmes, où l'on préfère la démarche organique. Les mathématiciens n'ont pas encore réussi à mettre en oeuvre cette démarche de manière explicite dans la construction de leurs objets.

Il est très facile de définir la boule de centre a , de rayon l , située dans un espace topologique muni d'une métrique d . Cette boule $D(a)$ est le lieu des points x de l'espace métrique considéré, situés à une distance d du point a inférieure ou égale à l : $d(a, x) \leq l$.



En dimension 1, la boule $D_1(0) = D_1$ dans \mathbb{R} , centrée à l'origine, est le segment $[-1, +1]$. Pour obtenir la boule D_2 en dimension 2, on fait tourner D_1 autour de son centre ; la boule D_2 s'appelle également un disque. En faisant pivoter le disque autour de l'un de ses diamètres D_1 , on obtient la boule du pétanqueur D_3 , etc...

Les boules ont des bords, des parois, des sortes d'écorce infiniment minces qu'on appelle des sphères. Le bord de la boule D_1 , noté ∂D_1 est la sphère S_0 ; S_0 se compose des deux points -1 et $+1$, ensemble des points x tels que $d(0, x) = 1$. Le bord de la boule D_2 , noté ∂D_2 , est la sphère S_1 ; $S_1 = \partial D_2$, ensemble des points x du plan tels que $d(0, x) = 1$, est également le cercle (de rayon unité, de centre l'origine).

Le bord de la boule D_3 , noté ∂D_3 , est la sphère S_2 . On continue ainsi : le bord de D_n est S_{n-1} .

Si on prend une orange D_3 , et si on enlève son écorce S_2 , il reste l'intérieur de l'orange, noté $\overset{\circ}{D}_3$: $D_3 = \partial D_3 + \overset{\circ}{D}_3 = S_2 + \overset{\circ}{D}_3$. L'intérieur de la boule n'est pas vide. Pour examiner l'intérieur de l'orange, il faut en enlever l'écorce, dont "l'ouvrir", en déchirant cette écorce. Une boule dont on a enlevé le bord (l'écorce) est dite ouverte: D_3 est la boule ouverte de dimension 3. Le disque D_2 moins le cercle S_1 est le disque ouvert de dimension 2, $\overset{\circ}{D}_2$. Le segment $[-1, +1]$ auquel on a ôté les points -1 et $+1$ est le segment ouvert $\overset{\circ}{D}_1 =]-1, +1[$.

Au contraire, le spécialiste en farces et attrapas peut refermer l'écorce autour de l'orange "ouverte". L'orange initiale, tout comme $D_1, D_2, D_3, \dots, D_n, \dots$, était donc au départ un orange, une boule fermée.

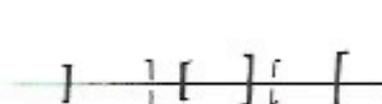
Une partie de \mathbb{R} homéomorphe à la boule fermée D_1 est appelée un intervalle fermé ... de \mathbb{R} . Une partie de \mathbb{R} homéomorphe à la boule ouverte $\overset{\circ}{D}_1$ est un intervalle ouvert On peut naturellement faire des unions finies d'intervalles ouverts ou fermés, et on obtiendra encore des parties de \mathbb{R} que l'on dira ouvertes ou fermées : lorsque ces parties forment un ensemble connexe, on est en présence d'intervalles, mais il n'y a point de raison, a priori, qu'il en soit ainsi.

Naturellement, ces notions s'étendent en dimension supérieure. Un ouvert de \mathbb{R}^2 , de \mathbb{R}^n , est homéomorphe à une réunion de parties de $\overset{\circ}{D}_2$ ou de $\overset{\circ}{D}_n$ homéomorphes à $\overset{\circ}{D}_2$ ou $\overset{\circ}{D}_n$. Un fermé de \mathbb{R}^2 ou de \mathbb{R}^n est homéomorphe à une réunion de parties de D_2 ou de D_n homéomorphes aux boules fermées D_2 ou D_n .

Nous sommes maintenant armés pour définir la notion de variété topologique.

7. Variété topologique de dimension n

Les briques de notre construction sont des boules ouvertes. D^n est la boule ouverte de dimension n , un ouvert de \mathbb{R}^n est une sorte d'empilement de boules ouvertes de type D^n , la réunion de ces boules ; on remarquera que les "interpénétrations" entre boules sont possibles ; la dimension d'un ouvert de \mathbb{R}^n est également n .



Un ouvert de \mathbb{R}



Un ouvert de \mathbb{R}^2

Nous pouvons maintenant passer à la définition d'une variété topologique réelle ouverte de dimension n . D'abord quelques exemples : la droite géométrique \mathbb{R} est une telle variété. Si vous pliez ce fil mathématique, vous obtenez une courbe possédant de nombreuses ondulations, cette courbe est encore une variété ouverte de dimension 1. Le plan est une variété ouverte, et toute surface obtenue par "déformation" de ce plan reste une variété ouverte de dimension 2. C'est le cas de toute portion de sphère S^2 "ouverte".

Voici la définition constructive : une variété topologique réelle, ouverte, de dimension n , V^n , est un espace topologique dit séparé (c'est-à-dire deux points quelconques de cet espace possèdent des voisinages respectifs disjoints les uns des autres), dont tout point possède un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^n (donc à une réunion de boules ouvertes de \mathbb{R}^n).



En pratique on se donne un ensemble (le plus petit possible) d'ouverts U_i qui recouvrent V^n . Chaque ouvert s'appelle une carte, et l'ensemble de ces ouverts un atlas. En fait, comme U_i est homéomorphe, par définition, à un ouvert W_i de \mathbb{R}^n , les mathématiciens appellent carte la donnée du couple (U_i, φ_i) où $\varphi_i : U_i \rightarrow W_i$ désigne l'homéomorphisme auquel il vient d'être fait allusion.

Naturellement, une variété topologique ouverte peut être fermée en rajoutant un bord. Par exemple à D^2 , on rajoute S^1 , et on obtient D^2 qui est une variété topologique fermée de dimension 2. On remarquera ici, le fait est général, que la dimension du bord est inférieur de une unité à la dimension de la variété fermée.

Toutes les variétés que l'on considère ici sont des variétés homogènes du point de vue de la dimension. Si ce n'était pas le cas, on parlerait alors de variétés branchées: exemple de variété branchue, un morceau de drap déchiré, dont les franges forment des éléments de variété de dimension 1, collés en quelque sorte au corps du drap, une variété de dimension 2.

Les variétés qui retiennent le plus souvent l'attention des mathématiciens sont des variétés différentiables. Ce sont des variétés topologiques qui possèdent une propriété supplémentaire. Cette propriété a trait aux raccordements des ouverts U_i entre eux, raccordements qui se font sans discontinuité aucune, de manière "lisse" pourrait-on dire. Le paragraphe qui suit est un préalable qui permettra ensuite de préciser la question.

8. La notion d'application et de variété différentiable

Soit y la position d'un mobile à l'instant x . Puisque cette position dépend de l'instant choisi, en est fonction, on peut écrire $y = f(x)$ ou

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto y \in \mathbb{R}.$$

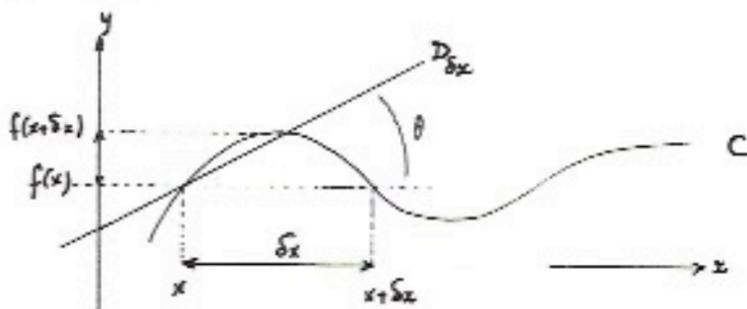
La vitesse moyenne du mobile v entre les dates x et $x + \delta x = x'$ est égale au rapport entre la distance parcourue $y' - y$ et le temps mis à parcourir cette distance $x' - x = \delta x$:

$$v = (y' - y) / (x' - x) = (f(x + \delta x) - f(x)) / \delta x.$$

La vitesse instantanée à l'instant x , ou dérivée de f en x , est la limite de v quand l'intervalle temporel δx tend vers zéro :

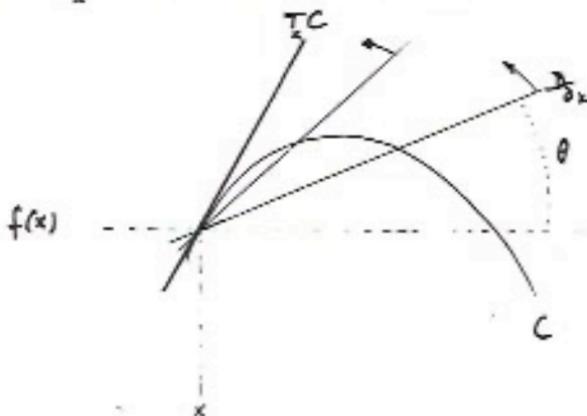
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{(\delta x \rightarrow 0)} (f(x + \delta x) - f(x)) / \delta x.$$

Il est important, pour la suite de l'exposé, de bien comprendre la signification géométrique de cette dérivée. Le dessin va tout expliquer. Représentons dans le plan (x, y) la position y du mobile en fonction de l'instant x , et désignons par C la courbe obtenue, en général une variété différentiable de dimension 1.



Traçons la droite $D_{\delta x}$ joignant les points $(x, f(x))$ et $(x + \delta x, f(x + \delta x))$. Cette droite fait un angle θ avec l'horizontale et, par définition, $\text{tg } \theta = v$.

Lorsque δx tend vers 0, la droite $D_{\delta x}$ pivote autour du point $(x, f(x))$, et sa position limite est la tangente $T_x C$ au point x à la courbe C ; $T_x C$ fait l'angle $\hat{\theta}$ avec l'horizontale, et $\hat{v} = dy/dx = \text{tg } \hat{\theta}$.



Ainsi la vitesse instantanée \hat{v} , égale à $\text{tg } \hat{\theta}$, peut être représentée par la tangente à la courbe C. Si donc on se donne en chaque point de C, un vecteur unité porté par la tangente à la courbe en ce point, la tangente de l'angle que fait ce vecteur avec l'horizontale, est égale à la vitesse instantanée du mobile : il y a donc équivalence entre vecteurs tangents et vitesses.

Supposons maintenant que le temps ne soit plus unidimensionnel. La position y du mobile est fonction du temps multidimensionnel (x_1, x_2, \dots, x_n) . On retrouve le cas unidimensionnel en fixant les composantes x_2, \dots, x_n du temps. Dans ces conditions, on peut fabriquer une vitesse instantanée $\partial y / \partial x_1$ dans la direction temporelle x_1 . Fixons de la même façon les composantes temporelles x_1, x_3, \dots, x_n : on peut fabriquer une vitesse instantanée $\partial y / \partial x_2$ dans la direction temporelle x_2 .

A la fonction $f : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \rightarrow y \in \mathbb{R}$, on a fait correspondre son vecteur dérivée, qu'on appelle aussi son gradient, $\nabla f = (\partial f / \partial x_1, \partial f / \partial x_2, \dots, \partial f / \partial x_n)$ (on a remplacé y par $f(x_1, \dots, x_n)$ dans la notation ∂y).

Supposons maintenant que la position du point mobile se trouve définie par m coordonnées spatiales y_1, y_2, \dots, y_m , chaque coordonnée y_i étant elle-même une fonction f_i du temps multidimensionnel (x_1, x_2, \dots, x_n) : $y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Dans ces conditions on a une application

$$F : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \rightarrow (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$$

définie par m composantes f_1, f_2, \dots, f_m . Ce qui distingue donc une fonction d'une application est la dimension de l'espace but. Dans le cas d'une fonction, l'espace-but est à une dimension ; dans le cas d'une

application, l'espace-but est à m dimensions, m fonctions sont donc nécessaires pour définir cette application.

La notion d'application étant supposée assimilée, il ne reste plus qu'à préciser ce qu'on entend par application différentiable. On veut dire par là qu'il existe des dérivées jusqu'à l'ordre infini.

Si l'on a $y = f(x)$, sa dérivée est encore une fonction de x , qui peut, ou non, admettre une dérivée. On suppose que cette dérivée existe, et qu'on peut répéter, à l'infini, le processus de dérivation. Si $y = f(x_1, \dots, x_n)$, la fonction est (indéfiniment) différentiable si toutes les dérivées partielles successives admettent elles-mêmes des dérivées partielles jusqu'à l'ordre infini. Une application F est (indéfiniment) différentiable si toutes les fonctions composantes f_i sont elles-mêmes indéfiniment différentiables.

Introduisons enfin la notion de variété différentiable.

Une variété différentiable est d'abord une variété topologique. Une variété topologique possède des cartes (U_i, φ_i) . On veut passer d'une carte à l'autre "différentiablement". Comment va-t-on procéder pour changer de carte ?

Voici d'abord la carte (U_i, φ_i) :



Puis la carte (U_j, φ_j) :



On considère la partie commune à U_i et U_j : $U_i \cap U_j$. Pour que la variété topologique soit également différentiable, il faut que l'application qui permet de passer de $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ à $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ soit différentiable.

9. Questions locales et globales : un aperçu

Si l'on se reporte à la définition des variétés topologiques réelles, on constate que ces objets mathématiques sont homéomorphes à des parties de \mathbb{R}^n , voire à \mathbb{R}^n tout entier. Comme nous avons de la peine à imaginer l'infini, nous nous en tiendrons au cas où les domaines occupés par les plongements de ces variétés dans \mathbb{R}^n sont bornés.

Leurs propriétés topologiques sont alors les mêmes que celles des parties de \mathbb{R}^n . Nous n'entrerons pas ici dans le détail de l'analyse technique de ces propriétés. Ces parties, dites localement compactes si ce n'est compactes, sont caractérisées par l'homogénéité de leur texture. Une propriété de ces objets observée localement sur un voisinage d'un point de l'objet s'étend en général en une propriété globale, vérifiée sur le voisinage de tout point de l'objet.

Pour une dimension n donnée, le passage du local au global se fait trivialement pour un type d'objet donné.

Les variations, lorsque change la dimension n , des propriétés d'un objet de type donné peuvent obéir à l'une des règles suivantes :

1. La propriété ne varie pas quand on passe de la dimension 1 à la dimension 2, ou à la dimension 3, ou lorsque la dimension n est supérieure ou égale à 5. Les cas transitoires $n = 3$ et $n = 4$ restent mal connus.
2. La propriété ou plutôt une de ses caractéristiques connaît une variation périodique en fonction de la valeur de la dimension.
3. La propriété peut être étendue sur un espace plus vaste à condition que celui-ci ne devienne pas trop compliqué. On caractérise en général de manière algébrique l'obstruction à une telle extension.

On rencontre ainsi, en topologie, comme dans l'étude des systèmes, [9], [10], des problèmes liés au passage du local au global, en d'autres termes des problèmes concernant la décentralisation, (une autorité globale peut en fait

être exercée localement avec un pouvoir au moins égal d'efficacité) ; ou, au contraire, la généralisation des modes de comportements et des décisions locales sur la structure (administrative, sociale, économique) du système considéré.

L'analogie que nous venons de remarquer est bien sûr très qualitative. Elle ne débouche pas dans l'immédiat sur une intelligence meilleure des mécanismes d'obstruction, des effets de blocage si nombreux dans les sociétés contemporaines. Le seul intérêt qu'on peut trouver à établir cette analogie, est, pour l'instant, de maintenir en éveil, s'il en était besoin, l'attention des responsables ou des spécialistes en organisation, sur les problèmes posés par les rapports entre global et local. Pour arriver à faire fructifier notre analogie, il conviendrait de pouvoir donner des représentations topologiques des différents systèmes rencontrés en pratique.

10. Représentation topographique primitive de quelques objets

Considéré à un instant donné, tout objet occupe un domaine spatial U bien défini dans un espace à trois dimensions. La topologie des variétés de dimension 3 est ardue et encore mal connue. Nous nous contenterons donc d'examiner quelques propriétés topologiques en dimension 2, d'autant plus que nous ne voyons que le bord des objets : or de manière générale, le bord ∂U d'un objet U de dimension n est un objet de dimension $n - 1$. Nous n'observons donc que des variétés de dimension 2, on les appelle des surfaces

Nous ne considérerons ici que des surfaces orientables. On sait toutes les construire à partir de la sphère S_2 . Il suffit d'ajouter des anses : une anse en dimension 2 est homéomorphe à un carré $D_1 \times D_1$. Si on courbe ce carré, on peut le fixer sur la sphère S_2 le long de ses côtés. Cette opération s'appelle un attachement d'anse. Une surface orientable de genre g s'obtient par attachement de g anses à la sphère S_2 . Un morceau d'une telle surface est encore une variété de dimension 2 et de genre au plus égal à g . Comme il est bien connu, une feuille de papier percée de g trous est une telle variété de genre g . Toutes les variétés compactes, par

conséquent plongeables à l'intérieur de domaines bornés d'espaces numériques de type \mathbb{R}^m , où m est suffisamment grand, peuvent être construites en attachant des anses à une sphère de dimension convenable.

On s'intéresse en fait fréquemment à la topographie des domaines occupés par les systèmes, chaque fois que naît une compétition (économique, politique, militaire). On s'interroge non seulement sur le genre de la surface, mais également à sa connexité, en cherchant le nombre de ses composantes connexes. Le domaine est connexe par arcs (deux points quelconques peuvent être joints par un arc de courbe entièrement situé dans le domaine), il ne possède qu'une seule composante connexe, lui-même.

Une méthode d'étude de la connexité consiste à choisir un point déterminé a de l'objet, et à examiner les propriétés des lacets de base a , i.e. des chemins d'origine et d'extrémité a . Supposons que dans un voisinage donné de a il n'y ait pas de trou ; alors on peut déformer tout lacet de base a et contenu dans ce voisinage de manière à le ramener au point a . On dit alors que ce voisinage est contractile, et que les lacets sont homotopes au point a . Ces lacets forment d'ailleurs un groupe dont l'élément neutre est le lacet nul, autrement dit a . Si le voisinage contient un vide, on constate la présence de deux types de lacets de base a : ceux qui entourent le vide, et les autres qui sont homotopes au point a . Le groupe des lacets de base a , ou premier groupe d'homotopie, ou groupe de Poincaré, ou groupe fondamental du domaine U est noté $\Pi_1(U, a)$. Il se ramène dans le cas présent à deux éléments : a et un lacet l qui encercle le domaine vide ; tous les autres lacets se décomposent en lacets élémentaires homotopes soit à a , soit à l . La connaissance du premier groupe d'homotopie d'une surface est donc équivalente à la connaissance du genre de cette surface. Lorsqu'on est en présence de variétés de dimension n supérieures à 2, on caractérise leurs propriétés de connexité à l'aide des différents groupes d'homotopie Π_k , obtenus en faisant passer par le point base a , non plus seulement des lacets homéomorphes à S_1 , mais plus généralement des sphères S_k ($k < n$).

Les variétés de dimension 1, courbes, portions de courbes, peuvent être également utiles pour la représentation concrète des communications entre objets ou à l'intérieur des objets, et pour l'étude structurale des systèmes eux-mêmes. La théorie des graphes est un outil bien connu. Il se pourrait que la théorie des noeuds trouve un jour une application pratique dans des études de trajectoires dans les espaces à trois dimensions.

Appelons noeud simple une courbe fermée dans \mathbb{R}^3 homéomorphe à S_1 , et noeud composé une union de noeuds simples. Les noeuds N sont en cours de classification selon les propriétés de leur projection sur un plan et selon les propriétés du groupe fondamental de leur complément dans \mathbb{R}^3 .

11. Représentation des propriétés en un point. Notion d'espace fibré

Considérons un objet, un point a de cet objet, et un voisinage U de ce point. Si le voisinage de a est assez petit, nous supposons que les propriétés de l'objet sur U sont pratiquement les mêmes que les propriétés de l'objet en a .

S'il s'agit d'un objet physique, ces propriétés peuvent souvent être caractérisées par des nombres, représentant une température, une longueur d'onde, etc... Pour un objet économique, ces propriétés peuvent correspondre à un taux local de production ou d'utilisation d'un bien donné, à un degré d'imprégnation ou de satisfaction d'un besoin, etc...

Que l'on sache ou non faire l'inventaire de ces propriétés, que l'on puisse ou non en mesurer des valeurs, on admettra la possibilité théorique de leur associer un ensemble de valeurs numériques. On supposera également que cet ensemble a priori de valeurs forme une variété différentiable V dans un espace \mathbb{R}^n , n étant en général assez grand, et que cette variété des états reste constante quand on passe du point a à un autre point a^* de l'objet étudié.

Si D désigne le domaine occupé par l'objet, $V \times D$ contient tous les éléments caractéristiques possibles de l'objet.

On dit ici que $E = V \times D$ est un espace fibré trivial de base D et de fibre V au dessus de chaque point a de D . E est appelé l'espace total.

Dans la pratique développée jusqu'à ce jour, ⁽¹⁾ les seuls fibrés auxquels on ait fait appel sont triviaux. Il existe des fibrés non triviaux, mais tous ceux sur lesquels les mathématiciens travaillent à l'heure actuelle sont localement triviaux : ils sont localement de la forme $V \times U$ au voisinage du point a .

12. Introduction de la dynamique. Sections d'un fibré. Champs de Vecteurs

Système dynamique

Un des buts majeurs de la recherche de la connaissance est d'assurer la survie de l'individu et de l'espèce, et si possible même, d'en améliorer le sort. Comme tout change, il est nécessaire de prévoir les évolutions des objets. C'est le rôle de la dynamique.

Supposons que la variété V des états d'un objet soit le plan, et qu'à partir d'un état initial donné, on puisse suivre instant par instant les modifications de cet état. On peut alors représenter par une courbe C dans le plan V , le lieu des valeurs successives des paramètres qui représentent l'état P du point a . Changeons d'état initial, on suppose ^{(nouveau) état/} le V très voisin du précédent. Alors la courbe d'évolution C' ou trajectoire ou orbite associée à ce nouvel état initial est en général très proche de la courbe C .



Puisque chaque trajectoire C est la ligne de déplacement que suit le mobile P , celui-ci possède en ce point une vitesse ; on a vu au paragraphe 9 que cette vitesse est entièrement définie par la direction de la tangente $T_P C$ à la courbe C au point P . Si, en tout point P du plan, on trace le vecteur unité tangent à la trajectoire passant par ce point, on obtient ce qu'on appelle un champ de vecteurs. Imaginez un champ de blé ; chaque sillon est caractérisé par une ligne de blés en tige ; couchons chaque tige dans le sens du sillon, les épis tous orientés de la même façon.

(1) On trouvera dans le n°47 (Septembre 1981) de Pour la Science un exemple d'emploi, en physique atomique, d'un fibré non trivial célèbre, le ruban de Moebius. Il est localement trivial.

Ces lignes, tangentes à la ligne du sillon, représentent les "vecteurs vitesse" d'un déplacement le long du sillon. On appelle système dynamique la donnée d'une variété V et d'un réseau de trajectoires sur cette variété : à tout système dynamique est donc associé un champ de vecteurs. On note par $X(P)$ le vecteur existant en P , et par X l'ensemble des vecteurs $X(P)$ où P décrit V .

Réciproquement, supposons donné un champ de vecteurs X sur la variété V (supposée compacte, point de détail). Choisissons un point P de V . Dessinons le vecteur $X(P)$. On peut faire passer par P une trajectoire. Si P' est un point très voisin de P , la trajectoire est telle que $X(P')$ lui soit tangente. De proche en proche, on reconstruit, à partir de la donnée des vecteurs tangents, des trajectoires qui, dans leur totalité, remplissent V . On peut donc définir un système dynamique par la donnée de la variété V et du champ de vecteurs X sur V : $\mathcal{S} = (V, X)$.

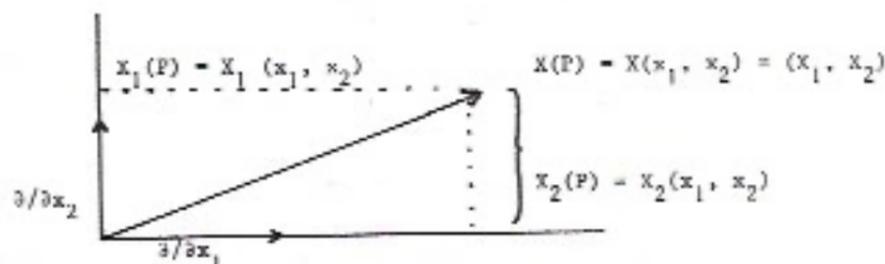
Supposons donnée une surface S dans \mathbb{R}^3 , par exemple une portion de sphère et dessinés sur cette surface, un réseau de trajectoires. En un point P de S , existe un vecteur tangent $X(P)$ à la trajectoire. $X(P)$ est contenu dans le plan tangent à S en P , soit $T_P S$.



Ce plan tangent est isomorphe à \mathbb{R}^2 .

\mathbb{R}^2 est engendré par deux droites, donc par deux vecteurs de base : $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$. Tout élément (x,y) de \mathbb{R}^2 s'écrit sous la forme $(x,y) = xe_1 + ye_2 = x(1,0) + y(0,1) = (x,0) + (0,y) = (x+0, 0+y) = (x,y)$

Lorsqu'on veut signifier qu'on travaille sur un espace tangent, on utilise une autre notation pour désigner les vecteurs de base qui engendrent cet espace tangent. Au lieu de e_1 , on emploie $\partial/\partial x_1$, au lieu de e_2 , $\partial/\partial x_2$, au lieu d'un éventuel e_3 , $\partial/\partial x_3$, etc.



Supposons que $T_P S$ ait son origine en P , et qu'il soit rapporté aux vecteurs de base $\partial/\partial x_1$, $\partial/\partial x_2$, alors tout vecteur $X(P)$ est la somme de deux vecteurs : le premier vecteur est la composante de $X(P)$ selon l'axe X_1 , $X_1(P) \partial/\partial x_1$; le second vecteur est la composante de $X(P)$ selon l'axe X_2 , $X_2(P) \partial/\partial x_2$; etc.

$$X(P) = X_1(P) \partial/\partial x_1 + X_2(P) \partial/\partial x_2$$

Puisque P a pour composantes x_1 et x_2 , on peut écrire également :

$$X(x_1, x_2) = X_1(x_1, x_2) \partial/\partial x_1 + X_2(x_1, x_2) \partial/\partial x_2$$

et de manière plus générale :

$$X(x_1, x_2, \dots, x_n) = X_1(x_1, \dots, x_n) \partial/\partial x_1 + X_2(x_1, \dots, x_n) \partial/\partial x_2 + \dots + X_n(x_1, \dots, x_n) \partial/\partial x_n$$

Supposons que V soit une variété différentiable. Il existe en tout point a de cette variété un espace tangent $T_a V$. La réunion TV , lorsque

π parcourt la variété V . Des espaces tangents $T_x V$ s'appelle le fibré tangent à V : sa base est V , la fibre en a est $T_a V$ qui est un espace isomorphe à \mathbb{R}^n , si n est la dimension de V . Soit s l'application qui, au point a de V , fait correspondre le vecteur $X(a)$ du champ X défini sur V . Localement, s est une application différentiable qui met en correspondance a et l'élément $X(a)$ appartenant à l'espace tangent $T_a V$; globalement s est une application de V dans son fibré tangent TV , appelée une section différentiable du fibré. L'observation de ce qu'il advient en dimension 2 est à l'origine de cette dénomination.

13. Représentations des évolutions des objets

Un domaine élémentaire U d'un objet, possède des propriétés supposées mesurables ; leurs valeurs possibles décrivent la variété V' . Leurs valeurs réelles n'ont pas de raison d'être constantes au cours du temps. Un champ de vecteurs X' sur V' décrit cette évolution.

Dans la pratique ordinaire, V' est tout simplement \mathbb{R}^{n+k} . On fait la distinction entre deux types de paramètres : i) des paramètres ou variables d'état x_i , $i = 1, 2, \dots, n$; ils prennent des valeurs que nous ne sommes pas maîtres de fixer a priori ; ii) des variables de décision ou de contrôle u_j , $j = 1, 2, \dots, k$, qui, au contraire, peuvent varier selon notre bon vouloir : la manipulation d'un artefact, comme tourner un bouton par exemple, permet de maintenir ces variables à des valeurs de notre choix.

Puisque les variables u_j sont sous notre dépendance, il suffit d'examiner la variation des variables d'état x_i . Par conséquent, nous étudions, en définitive, les courbes d'évolution des propriétés de l'objet définies dans $V = \mathbb{R}^n$ par un champ de vecteurs X , sous le contrôle des vecteurs u appartenant à \mathbb{R}^k .

Au point x de V , à l'instant t , le vecteur tangent $X(x, t) = \frac{dx}{dt}$ a une valeur donnée par une expression de la forme $f(x, u, t)$ où f est une application de $\mathbb{R}^{n+k} \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R}^n :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t)$$

On peut concevoir différentes situations :

- i) On passe d'un domaine U à un domaine voisin U' de l'objet : V' , V et u restent invariants. L'évolution toute entière de l'objet est décrite par le système différentiel $\frac{dx}{dt} = f(x, u, t)$.
- ii) On passe d'un domaine U à un domaine voisin U' : V' , V et u changent tous les trois. Pour chaque domaine, il faut résoudre un système différentiel, et recoller morceau par morceau les solutions.
- iii) V' et V restent invariants, seul u varie. On procède en principe comme en ii) ; en fait, une étude a priori montre qu'il existe des plages de variation de u sur lesquelles la solution ne subit aucune modification bien fondamentale. On rencontre, au contraire, des zones critiques pour u autour desquelles la solution connaît des changements qualitatifs importants.

Dans le cas i), les spécialistes des systèmes physiques et de la théorie du contrôle traitent surtout le cas linéaire et décomposable

$$\frac{dx}{dt} = A x + B u$$

Ils introduisent souvent une équation d'observation des paramètres x à travers un appareil de mesure

$$z = g(x)$$

Il leur arrive de traiter des problèmes légèrement plus difficiles comme :

$$\frac{dx(t)}{dt} = A x(t) + \sum_1^r A_k x(t - h_k) + B u(t) + \sum_1^r B_k u(t - h_k)$$

où les h_k représentent des retards sur l'instant t .

L'auteur de ce rapport n'a pas rencontré d'emploi très valable de ces types de modèles en économie pratique : les équations qu'on pourrait établir manqueraient d'assise tant sur le plan structurel qu'au niveau des coefficients dont les valeurs seraient trop mal connues.

La théorie des catastrophes traite en principe une partie du cas iii). Nous rendrons compte, six paragraphes ^{15, 16 et 18/} de la théorie des catastrophes élémentaires.

14. Cas i. Eléments singuliers. Stabilité de position. Stabilité structurelle. Bifurcation

1. Lorsqu'on étudie un objet quelconque, on s'intéresse avant tout à ces parties de l'objet où la morphologie se modifie. Ce sont les zones critiques ou singulières de l'objet. Entre deux zones critiques, la morphologie reste uniforme. Par conséquent seule présente de l'intérêt l'étude des morphologies au voisinage des zones critiques. Par ailleurs, celles-ci sont peu nombreuses et de faible étendue devant les plages régulières et monotones d'aspect.

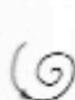
Il s'agit là d'une proposition générale : le complémentaire dans V des éléments critiques d'une propriété définie sur V est dense dans V . La notion de densité mathématique rejoint la notion habituelle : A est dense dans V si tout voisinage d'un point a quelconque de A contient des points de V . Une propriété est générique sur V si elle est vérifiée sur un sous-ensemble A dense dans V .

Ce n'est pas une observation bien profonde que de remarquer, dans les sociétés humaines, le rôle des individus singuliers face à la masse "sans visage" de la foule moutonnaire.

Les points singuliers d'un champ de vecteurs sont les points en lesquels les vecteurs vitesses du champ s'annulent :

$$f(x, u, t) = 0.$$

Ces points singuliers peuvent être attractants :



foyer

foyer
composé

noeuds



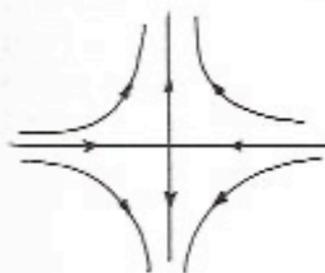
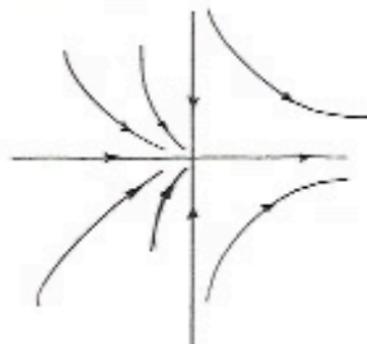
noeud dégénéré

toutes les trajectoires au voisinage des attracteurs ponctuels convergent vers ces points ; on les appelle également des puits. Ces puits peuvent être des foyers, des noeuds, (voir figure 1). Un point singulier attractant est stable en position : si on écarte un point mobile d'une telle position singulière, il a tendance à revenir spontanément vers cette position.

Si on inverse le sens de parcours de toutes les trajectoires dans les exemples précédents, les points singuliers deviennent répulsants ; on les appelle des sources.

On peut caractériser, du point de vue analytique, sources ou puits de manière très simple : si, au voisinage du point considéré, les valeurs propres de la matrice A de la partie linéaire du champ sont négatives, le point singulier est attractant ; si ces valeurs propres sont positives, le champ est répulsant.

Dans le cas mixte, le point singulier est appelé un point col ou point selle. On peut rencontrer des situations plus complexes.

point - col
hyperbolique

noeud-selle

Il existe d'autres ensembles attractants ou répulsants : ce sont les cycles limites, difféomorphes à S^1 . Ils peuvent former dans \mathbb{R}^3 des noeuds disposés comme les anneaux d'une chaîne.



2 Un objet matériel étant donné, il possède certaines qualités de stabilité dues aux propriétés de résistance de sa structure devant les coups de l'environnement : il plie mais ne rompt pas. Pour être de quelque utilité, tout modèle conceptuel ou factuel de l'objet matériel doit présenter ces mêmes qualités de solidité. D'où la nécessité de procéder à des analyses approfondies de la stabilité structurelle des représentations mathématiques que l'on conçoit.

En matière de système dynamique, on définit divers degrés de stabilité structurelle. Le principe général de ces définitions reste le même : on dira qu'un système dynamique est structurellement stable si une petite perturbation de la valeur des paramètres (pour des valeurs données des variables x_i et u_j , ils définissent l'état du champ) ne modifie en rien l'allure générale des trajectoires. De manière un peu plus précise, disons que le champ de vecteurs X_1 situé dans un voisinage du champ de vecteurs X défini sur V , engendre un réseau de trajectoires qui se déduit par un simple homéomorphisme h du réseau de trajectoires défini par X sur V , les deux systèmes dynamiques (V, X) et (V, X_1) sont structurellement stables.

Une des structures dynamiques parmi les plus simples et les plus répandues dans les constructions naturelles est celle de l'oscillateur de Liénard-Van der Pol. Le système dynamique est défini par l'action du champ de vecteurs $X(x, u) = (X_1(x, u), X_2(x, u))$ dans le plan \mathbb{R}^2 des points de coordonnées (x, u) .

$$X_1(x, u) = \frac{dx}{dt} = -k [x^3 - Tx + u]$$

$$X_2(x, u) = \frac{du}{dt} = x$$

Lorsque T est très négatif, il n'y a qu'un seul attracteur, un noeud.
Lorsque la valeur négative de T est comprise entre \hat{T} et 0 , il n'existe qu'un seul attracteur : un foyer.

Lorsque la valeur positive de T est comprise entre 0 et \hat{T}' , on est en présence d'un foyer répulsant, une source, entouré par un cycle limite attractant. Au delà de \hat{T}' , le cycle ne change pas de nature, mais la source est maintenant un noeud.

Si le paramètre T prend des valeurs éloignées des valeurs dites de bifurcation, \hat{T} , 0 , \hat{T}' , le système dynamique est structurellement stable car des variations même importantes de la valeur de ce paramètre ne change en rien la nature du ou des lieux singuliers du champ.



$$T < \hat{T}$$



$$\hat{T} < T < 0$$

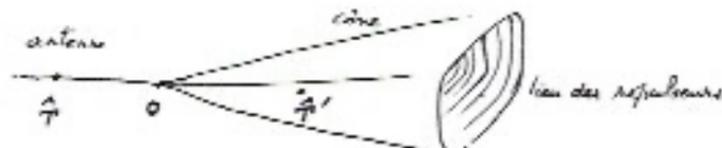
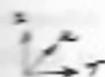


$$0 < T < \hat{T}'$$



$$T > \hat{T}'$$

Si l'on dessine, dans \mathbb{R}^3 rapporté aux trois axes x , u , T , le lieu des attracteurs et des répulseurs (en pointillés), on obtient la figure suivante appelée le *bonnet d'astronaute* :



Nous allons étendre le champ de vecteurs de Liénard-Van der Pol, défini sur \mathbb{R}^2 , en un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^3 par l'introduction d'une composante supplémentaire x_3 (x, u, T) = $\frac{dT}{dt} = -\epsilon$, où le nombre positif ϵ a une valeur très faible.

Les trajectoires viennent alors glisser le long de l'antenne du bonnet, et s'enrouler en spirales le long du cône de ce même bonnet.

Comme ϵ est très petit, l'observateur peut être insensible à l'écart entre deux enroulements des trajectoires, et croire à la présence de cycles quantitativement stables.

L'exemple de l'oscillateur de Liénard-Van der Pol nous montre différents types de changement dans la nature du réseau des trajectoires. Le plus important d'entre eux est sans aucun doute celui où l'on voit de gauche à droite, le foyer attractant éclater en un cycle attractant, ou au contraire, de droite à gauche, le cycle attractant se restreindre jusqu'à devenir un point attractant.

Une telle bifurcation s'appelle une bifurcation de Hopf. Elle se produit chaque fois qu'apparaissent, dans l'ensemble des valeurs propres de la matrice associée à la partie linéaire du champ, deux valeurs propres imaginaires conjuguées, alors que la partie réelle des autres valeurs propres est non nulle.

Avant que n'advienne la bifurcation au fur et à mesure qu'on s'en rapproche le réseau des trajectoires se déforme. La présence de cette déformation est prémonitrice de la bifurcation. Il arrive parfois qu'on sache évaluer le taux de déformation, sa direction. On conçoit aisément l'intérêt de telles connaissances pour essayer d'éviter, si l'on y tient, par conservatisme prudent ou aveugle, que l'évolution ne débouche, après bifurcation, sur une situation estimée trop nouvelle. Et si la bifurcation doit se produire inexorablement, un tel savoir permet de prendre

les précautions les mieux adaptées pour prévenir les effets destructeurs de la bifurcation, et sauvegarder tout au moins les biens essentiels.

On peut alors, dans cette optique, proposer une explication du comportement prémonitoire de l'animal ; dans la mesure où un cataclysme naturel serait lié à la présence de champs physiques auxquels il serait sensible et capable d'en faire une représentation, puis d'en simuler le devenir, l'attitude de l'animal serait dictée par le taux de déformation de la dynamique mentale en présence de ces champs extérieurs ; dès qu'un seuil de déformation serait atteint, l'animal changerait de comportement.

L'étude pratique de la bifurcation concerne aujourd'hui des cas physiques (oscillateurs électriques, écoulements, phénomènes de Bénard) physico-chimiques (cycle de la glycolyse, conduction nerveuse), écologiques

On est cependant en droit de penser que nous posséderons un jour une meilleure maîtrise de la dynamique de quelques systèmes socio-économiques. L'intérêt de la connaissance des différentes modalités de la bifurcation ne sera pas à démontrer.

Il paraît important de remarquer qu'au moment de la bifurcation, tout système dynamique connaît une sorte de régression, de dégénérescence. Reprenons l'exemple du système de Liénard-Van der Pol. Comme x^3 , au voisinage de $x = 0$, est très petit devant x , on peut ne considérer que la seule partie linéaire du système différentiel :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= k[Tx - kx^3] \\ \frac{du}{dt} &= -x \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} kT & -k \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

Lorsque $T = 0$, une composante de la vitesse $\frac{dx}{dt}$ s'annule. Cette dégénérescence est ici suffisante pour avoir un effet sur les valeurs propres de la matrice du système linéarisé : leur partie réelle devient nulle.

Ce comportement mathématique traduit une règle assez générale semble-t-il de l'évolution des objets : pour qu'un objet stable puisse évoluer, il lui faut passer, avant d'accéder à un nouvel état, par une phase de "régression locale", pendant laquelle il est partiellement déstructuré. Ce phénomène est bien connu des économistes et des historiens.

Il nous paraît intéressant de donner ici un exemple mathématique d'une évolution conduisant à une différenciation. On l'obtient en considérant le lieu des attracteurs du système dynamique défini par :

$$\frac{dx}{dt} = -k \left[x^3 + u_2(T) x^3 + u_3(T) x^2 + u_4(T) x + u_5 \right]$$

$$\frac{du_3}{dt} = x(x - \alpha_1(T))(x - \alpha_2(T))$$

où les différents paramètres $u_i(T)$ et $\alpha_i(T)$ prennent des valeurs convenables.

Ce lieu, appelé la "baguette du sourcier", a la forme suivante :



L'objet mathématique attaché à cette forme est appelé une variété branchue de dimension 1. Le point D où prennent naissance les deux branches de la baguette sera nommé point de différenciation du système dynamique considéré.

Qu'on soit en présence d'un point de bifurcation ou d'un point de différenciation, il est remarquable qu'en ces points, les tensions internes se relâchent. Aussi comprend-on que le dirigeant averti recherche, au sein de l'organisation qu'il anime ou qu'il conduit, ces éléments

relativement malléables, prêts à s'engager dans une voie ou dans une autre, sur lesquels il devra peser pour les amener à se structurer et à se fixer dans la direction qui lui paraîtra la mieux adaptée.

On constate ainsi une concordance assez profonde entre le comportement des objets réels et celui d'objets mathématiques, même très élémentaires. L'expression analytique du système dynamique possède des invariants à travers des caractères numériques ou topologiques. Ils expriment les nécessités intangibles de stabilité qui définissent le groupe social en tant que tel. Les bifurcations et les différenciations que nous observons sur un tel système dynamique, ne sont pas les reflets de modifications de la structure profonde de l'objet ainsi représenté dans son évolution. Pour obtenir de tels changements, il faudrait introduire des systèmes sur les espaces fonctionnels. Les mathématiciens n'en sont pas encore là.

3. Les systèmes d'équations différentielles ordinaires, avec ou sans retard, comme $\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$ (*), couplés ou non avec des équations supérieures aux dérivées partielles, se rencontrent dans l'étude des systèmes électriques, des systèmes chimiques, du fonctionnement d'appareils électromécaniques et d'ateliers automatisés. Il est évidemment prématuré et trompeur de prétendre que ces mêmes types de formulation mathématique ont aujourd'hui une application pratique quelconque dans l'étude du fonctionnement et de l'organisation des ensembles économiques et humains.

A ceux qu'intéresseraient les aspects techniques posés par l'étude des modèles mathématiques précédents, nous recommandons la lecture de l'ouvrage de BRYAN [21], ainsi que celui de Michel et MILLER [20], où l'on s'intéresse, certes à l'existence, mais aussi à la stabilité des solutions de ces systèmes. A dire vrai, la théorie n'est guère avancée dans la mesure les auteurs restent muets sur les phénomènes de bifurcation et de différenciation. D'autres aspects des problèmes posés par l'étude de ces systèmes ont été traités dans [27] et [28]. Par exemple, on s'est demandé à quelle condition un système régi par une équation du type (*) est-il contrôlable ? Le système est dit contrôlable sur l'intervalle de temps $[0, T]$, si, pour tout couple de vecteurs d'états x_0 et x_1 , il existe un vecteur de contrôle $u(t)$ continu par morceaux sur $[0, T]$,

pour lequel $x(0) = x_0$, $x(T) = x_1$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que, si x appartient à \mathbb{R}^n , le rang de la matrice $[A, AB, \dots, A^{n-1}B]$ soit égal à n . Il existe d'autres formulations plus géométriques de cette condition (cf. [27], [28]).

La classification des différents types de problèmes par l'emploi de méthodes et de résultats proprement topologiques est encore balbutiante, d'autant plus que certains travaux topologiques qui seraient utiles à cette classification (comme celle par exemple des fibrés holomorphes sur les espaces projectifs) ne sont pas assez avancés. Cependant l'avenir est plein de promesses. On trouvera dans l'exposé de Hermann [14] une même présentation géométrique des principaux problèmes rencontrés jusqu'à présent.

Considérons par exemple le système différentiel à éléments complexes

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + Bu \\ z = Cx \end{cases} \quad \text{ou encore } (\hat{*}) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} - (Ax + Bu) = 0 \\ z - Cx = 0 \end{cases}$$

Introduisons les matrices $\tilde{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\tilde{\alpha}_0 = \begin{bmatrix} -A & -B & 0 \\ -C & 0 & I \end{bmatrix}$. Le système différentiel $(\hat{*})$ s'écrit alors, en posant $v = (x, u, z)$

$$\tilde{\alpha}_0 v + \tilde{\alpha}_1 \frac{d}{dt}(v) = 0$$

Pour passer de ce système différentiel à un système algébrique, on introduit la transformation de Laplace qui, au vecteur $v(t)$, fait correspondre le vecteur

$$\tilde{v}(s) = \int_0^{\infty} v(t) e^{-st} dt \quad \text{où } s \text{ est un scalaire,}$$

c'est-à-dire ici un élément de \mathbb{C} .

Dans ces conditions le système différentiel $(\hat{*})$ devient

$$(\tilde{*}) \quad \tilde{\alpha}_1 s \tilde{v}(s) + \tilde{\alpha}_0 \tilde{v}(s) = (\tilde{\alpha}_1(s) + \tilde{\alpha}_0) \tilde{v}(s) = 0$$

Pour alléger les notations, nous allons désormais oublier le symbole \sim . Par ailleurs, on peut remplacer les matrices que nous avons construites

par les applications linéaires correspondantes.

Posons $X = \mathbb{C}^n$, $U = \mathbb{C}^m$, $Z = \mathbb{C}^p$ puis

$$V = X \oplus U \oplus Z \quad (- \mathbb{C}^{n+m+p})$$

$$W = X \oplus Z \quad (- \mathbb{C}^{n+p})$$

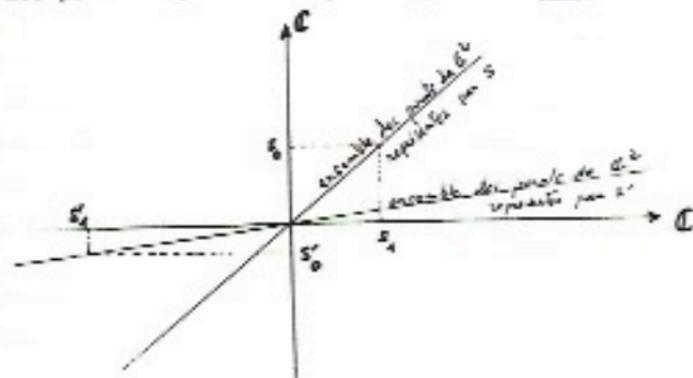
Les applications linéaires α_0 et α_1 envoient V dans W . Considérons le faisceau d'applications linéaires

$$\alpha(s_0, s_1) = \alpha_1 s_1 + \alpha_0 s_0$$

où s_0 et s_1 sont des scalaires. Supposons $s_0 \neq 0$, alors

$$\alpha(s_0, s_1) = s_0 \left(\alpha_1 \frac{s_1}{s_0} + \alpha_0 \right) = s_0 (\alpha_1 s + \alpha_0)$$

où $s = \frac{s_1}{s_0}$. La relation $s = \frac{s_1}{s_0} = \frac{\lambda s_1}{\lambda s_0}$ montre que s représente toute une classe de couples de scalaires (s_0, s_1) dont le rapport est constant, justement égal à s . L'ensemble de toutes les classes possibles, ou encore de tous les points s , forme ce qu'on appelle la droite projective complexe $P_1(\mathbb{C})$



On peut, en particulier, supposer $s_0 = 1$, de sorte qu'à tout point s de la droite projective complexe $P_1(\mathbb{C})$ correspond un élément $\alpha(s)$ du faisceau d'applications linéaires engendré par α_0 et α_1 , et par suite un ensemble F_s contenu dans V de vecteurs v tels que $\alpha(s)v = 0$. Si l'on désigne par E la réunion des ensembles F_s lorsque s parcourt $P_1(\mathbb{C})$, le triplé $(E, F_s, P_1(\mathbb{C}))$ est un fibré vectoriel de base $P_1(\mathbb{C})$, de fibre F_s , et d'espace total E . Il est facile de voir que dans le

cas où $C = 1$, toutes les fibres ont même dimension, celle de l'espace U . La première classe de Chern de E égale à la dimension de X , est un invariant topologique du système contrôlable défini par (*).

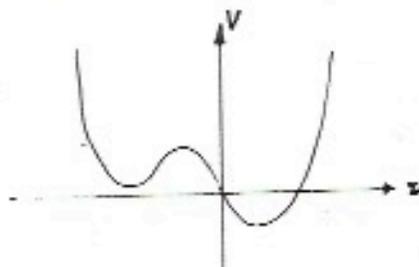
Nous allons maintenant quitter le domaine de la topologie proprement dit, et aborder celui de l'analyse sur les variétés. C'est à ce domaine des mathématiques que la théorie des catastrophes a emprunté (et apporté) ses notions les plus importantes.

15. Cas 1. Evolutions rapides et discontinuités, ensemble de catastrophe.

1. Il est particulièrement intéressant de remarquer que l'évolution de certains objets naturels, qui connaissent des phases pendant lesquelles leur état apparent semble ne point varier, entrecoupées d'instantanés où cet état apparent change profondément et brutalement, est susceptible d'être convenablement décrite par des systèmes différentiels du type précédent. Les valeurs des coefficients k sont alors très élevées.

2. Supposons d'abord que la variable x représente une longueur d'onde, la couleur de l'objet, ou le rayon du domaine qu'il occupe si celui-ci est sphérique; x représente l'état apparent de l'objet. La variable u représente par exemple la température extérieure, une contrainte externe qui est évidemment intériorisée par l'objet; supposons que cette température varie de manière périodique, le minimum étant atteint la nuit, le maximum étant atteint le jour.

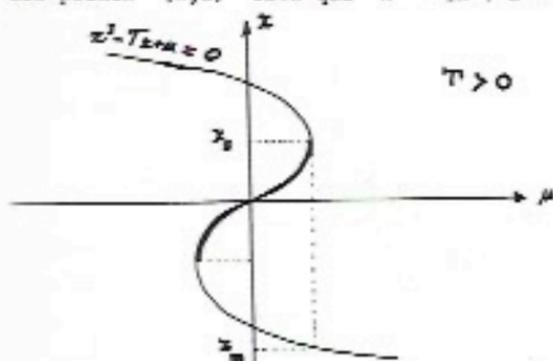
Supposons également que $V(x,u,T) = \frac{x^4}{4} - \frac{Tx^2}{2} + ux$ représente l'état énergétique de l'objet; pour des valeurs positives du paramètre T le graphe de la fonction $V(x,u,T)$ est de la forme



L'objet ne peut prendre que des états pour lesquels son énergie est minimale. Les extrêmes de $F(x,u,T)$ sont tels que

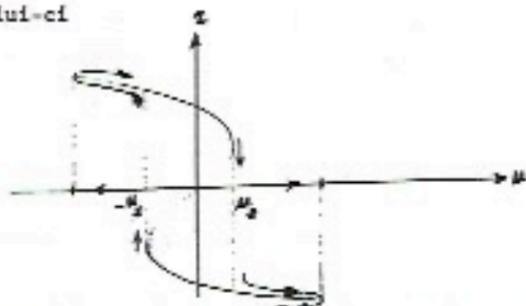
$$F'_x(x,u,T) = x^3 - Tx + u = 0$$

Dans l'espace (x,u) , pour les valeurs positives du paramètre fixe T , le lieu des points (x,u) tels que $x^3 - Tx + u = 0$ a la forme suivante :



Les parties de la courbe en traits fins représentent les lieux des points pour lesquels V atteint un minimum : les valeurs correspondantes de x et de u sont donc des observables possibles. La partie de la courbe en trait renforcé représente le lieu des points pour lequel V atteint un maximum : les valeurs correspondantes de x et de u sont associées à des états en principe instables et par conséquent peu susceptibles d'être observés.

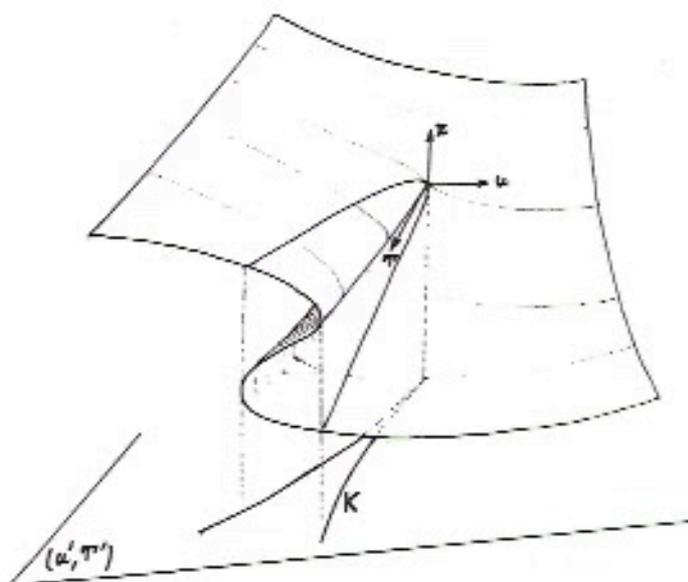
Finalement, quand u varie de manière périodique, le lieu des observables est celui-ci



Sur la plage supérieure l'observable x varie relativement peu; lorsque u prend la valeur u_0 , la valeur de x change brutalement et décrit la plage inférieure. On dit qu'en u_0 , x connaît une variation catastrophique, et que u_0 est un point de l'ensemble de catastrophe K associé

ou "potentiel" $F(x,u,T)$.

Si maintenant, on entreprend de faire varier T , les plages d'observables dans l'espace (x,u,T) forment une surface appelée la fronce :



Nous avons dessiné l'ensemble de catastrophe K projeté sur le plan (u',T') parallèle au plan (u,T) . Cet ensemble de catastrophe a la forme de la parabole semi-cubique d'équation $4T^3 + 27u^2 = 0$. De façon générale, l'ensemble de catastrophe est contenu dans l'ensemble de bifurcation du potentiel F . L'ensemble de bifurcation est le lieu, situé dans l'espace de contrôle U , des points pour lesquels un maximum de V rencontre un minimum du potentiel. Pour obtenir l'équation de cet ensemble, on écrit que

$$\text{on est en un extremum } \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

que cet extremum est dégénéré (au moins double) :

$$\text{déterminant } \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} \end{vmatrix} = 0$$

et on élimine les variables x_1, x_2, \dots, x_n entre ces $n+1$ équations.

3. Nous allons essayer de discuter un peu des conditions d'emploi du modèle de la France.

Il s'agit évidemment d'un modèle assez primitif. La fonction F est une fonction globale de l'objet : pour quelles raisons naturelles peut-on associer une telle fonction particulière à cet objet ? Tant qu'une explication convenable de ce phénomène ne pourra pas être donnée, l'emploi du modèle pourra sembler relever de la magie ou laisser sceptiques de nombreux lecteurs.

A vrai dire, on rencontre également en physique des situations que l'on sait représenter par des expressions mathématiques et pour lesquelles on ne peut fournir aucune justification complète. Au voisinage du point critique du diagramme de phase de l'eau, la relation entre pression, volume et température est assez bien décrite par la loi de Van der Waals

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right) (v-b) = rt$$

Aucune explication n'est proposée qui permettrait de comprendre le pourquoi de cette expression. Il existe cependant un consensus pour reconnaître à cette loi une valeur scientifique. La présence d'un grand nombre de données expérimentales précises permet en effet de juger de la qualité de la loi proposée.

A l'aide de changements de variables comme $x = v - \frac{1}{3}\left(b + r \frac{t}{p}\right)$, on peut mettre la relation de Van der Waals sous la forme

$$x^3 - Tx + u = 0$$

et donner une interprétation du diagramme des phases en termes de théorie des catastrophes en imposant la convention de Maxwell selon laquelle l'objet tend spontanément occuper l'état ayant pour énergie le minimum absolu des valeurs admissibles de l'énergie.

La valeur de x est une fonction ici de trois observables distincts, v, p, t , elle a la dimension d'un volume, de sorte que la fonction $F(x, u, T)$ a la dimension d'un volume élevé à la puissance quatrième, et non pas la dimension d'une énergie !

Cet exemple illustre assez bien les difficultés d'emploi du modèle de la théorie des catastrophes : il est bien souvent extrêmement difficile d'établir le modèle sur des bases expérimentales précises parce que les différents types de variables qu'utilise le formalisme catastrophique sont des fonctions en général inconnues et a priori peu simples des observables.

Cependant, le nombre d'observables quantifiables s'amenuise au fur et à mesure que l'on s'éloigne des domaines de la physique. Ces observables perdent de leur stabilité, l'erreur avec lesquels on peut les approcher peut même finir par prendre des proportions inquiétantes.

Aussi est-il plus raisonnable de considérer les modèles inspirés par la Théorie des catastrophes comme des modèles métaphoriques, d'approximation grossière mais déjà utile, que de vouloir en faire des modèles de représentation parfaitement explicites, et très précis sur le plan quantitatif. Il peut arriver certes que le modèle soit rigoureux, et qu'il s'adapte parfaitement aux données expérimentales. Cela arrive en physique où le substrat possède des qualités d'homogénéité et de stabilité tout à fait remarquables, et où la présence de champs de gradients est fréquente. Dans les domaines biologiques et des sciences humaines, ces qualités d'homogénéités et de stabilité s'estompent, l'emploi de champs de gradients pour décrire l'évolution des phénomènes n'est souvent qu'une première approximation très grossière.

Le gros avantage de la représentation géométrique est justement d'offrir un support géométrique au raisonnement : on peut ainsi la visualiser et en mieux maîtriser les démarches.

Comme en toutes choses et dans tous les domaines, on rencontre l'un des mille visages de la "guerre", du "conflit" - dont le raisonnement dichotomique par oui ou non, vrai ou faux constitue une sorte de projection; il était avant tout nécessaire de donner une illustration géométrique du phénomène oppositionnel. Il est évident que le modèle archétype de la tronçonneuse est bien adapté pour représenter ce phénomène non moins archétype du conflit. Il n'existe bien sûr aucun moyen de démontrer que le modèle de la tronçonneuse est le meilleur modèle pour décrire le conflit. Le fait que le phénomène étudié et le modèle qui est construit se situent à un niveau semblable dans la hiérarchie de l'élaboration, est un bon argument en faveur de leur adéquation.

Cet emploi du modèle de la tronçonne a été proposé par nous-mêmes en 1970 [4] et en 1971 [5]. Zeeman [26]*, a largement utilisé ce modèle dans divers types de situations conflictuelles évidemment décrites pour la plupart par les classes de verbes répertoriés ^{dans} nos articles (comme par exemple désirer, recevoir, attaquer, attirer, refuser, donner, fuir, repousser, etc...). Le mode de présentation de Zeeman, s'il a valu à son auteur des succès, n'est pas forcément à recommander; on pourra lire à ce sujet les critiques de Saule [22] et de Sussmann [23].

Il existe un autre point d'insatisfaction à l'égard du modèle et sur lesquels les critiques sont restés muets. L'efficacité du modèle repose en partie sur des conventions inspirées de la physique: la fonction F est supposée représenter une énergie, l'état observable de l'objet correspondrait à un minimum relatif sinon absolu de cette fonction d'énergie. Rien n'assure que ces hypothèses aient un sens dans les domaines éloignés du monde "rudimentaire" de la physique. Mais admettons cependant leur validité.

L'intuition physique ne peut admettre qu'une même propriété change de valeur de manière discontinue. C'est avoir une perception particulièrement superficielle des phénomènes que de se laisser aller à cette croyance. La donnée d'une propriété est fonction de toute la structure intime de l'objet en même temps que des qualités du milieu ambiant. Cette structure intime est d'une complexité sans limite. Les atomes furent donnés pour des composants élémentaires et insécables, jusqu'au jour où ils apparurent comme composés de particules dites élémentaires dont le nombre s'est accru sans cesse, sans que leur nature soit bien élucidée. Lorsque l'apparence d'un objet change brusquement, il se produit dans son organisation intérieure une modification extrêmement rapide eu égard à nos possibilités de mesure des durées, qui laisse croire à une variation discontinue de ladite propriété. La dichotomie profonde n'est pas la dichotomie continue-discontinue, mais la dichotomie permanent-transitoire. Lorsque la durée du transitoire échappe à toute perception et à toute mesure, alors apparaît la discontinuité: la discontinuité n'est qu'une apparence.

On peut bien sûr se laisser tromper par des images. Vous voyez bien dire l'observateur que la convention que vous avez établie vous oblige à passer de manière discontinue de la plage supérieure à la plage

* (Sans toujours faire mention des prédécesseurs)

Cet emploi du modèle de la France a été proposé par nous-mêmes en 1970 [4] et en 1971 [5]. Zeeman [26]*, a largement utilisé ce modèle dans divers types de situations conflictuelles évidemment décrites pour la plupart par les classes de verbes répertoriés ^{dans} nos articles (comme par exemple désirer, recevoir, attaquer, attirer, refuser, donner, fuir, repousser, etc...). La mode de présentation de Zeeman, s'il a valu à son auteur des succès, n'est pas forcément à recommander; on pourra lire à ce sujet les critiques de Smole [22] et de Sussemann [23].

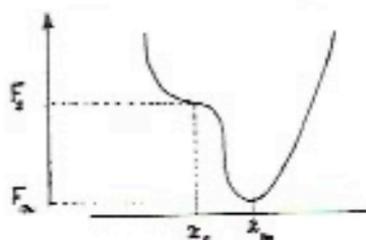
Il existe un autre point d'insatisfaction à l'égard du modèle et sur lesquels les critiques sont restés muets. L'efficacité du modèle repose en partie sur des conventions inspirées de la physique: la fonction F est supposée représenter une énergie, l'état observable de l'objet correspondrait à un minimum relatif sinon absolu de cette fonction d'énergie. Rien n'assure que ces hypothèses aient un sens dans les domaines éloignés du monde "rudimentaire" de la physique. Mais admettons cependant leur validité.

L'intuition physique ne peut admettre qu'une même propriété change de valeur de manière discontinue. C'est avoir une perception particulièrement superficielle des phénomènes que de se laisser aller à cette croyance. La donnée d'une propriété est fonction de toute la structure intime de l'objet en même temps que des qualités du milieu ambiant. Cette structure intime est d'une complexité sans limite. Les atomes furent donnés pour des composants élémentaires et insécables, jusqu'au jour où ils apparurent comme composés de particules dites élémentaires dont le nombre s'est accru sans cesse, sans que leur nature soit bien élucidée. Lorsque l'apparence d'un objet change brusquement, il se produit dans son organisation intérieure une modification extrêmement rapide au regard à nos possibilités de mesure des durées, qui laisse croire à une variation discontinue de ladite propriété. La dichotomie profonde n'est pas la dichotomie continue-discontinue, mais la dichotomie permanent-transitoire. Lorsque la durée du transitoire échappe à toute perception et à toute mesure, alors apparaît la discontinuité: la discontinuité n'est qu'une apparence.

On peut bien sûr se laisser tromper par des images. Vous voyez bien dira l'observateur que la convention que vous avez établie vous oblige à passer de manière discontinue de la plage supérieure à la plage

* (Sans toujours faire mention des prédécesseurs)

Inférieure de la France. Comment ne pas remarquer, lui rétorquera un second observateur, que le passage de l'état énergétique F_A



à l'état énergétique F_m se fait de manière continue, très rapide peut-être puisque les états intermédiaires sont instables, et que, par suite, le passage de x_s à x_m est lui-même continu. F , qui est une fonction globale de toutes les composantes de l'objet, ne doit-elle pas posséder la propriété de varier continûment, car sinon toutes les composantes connaîtraient des variations discontinues de leurs propriétés au même moment, ce qui semble peu plausible ?

Ces remarques nous montrent davantage à quel point le modèle de la théorie des catastrophes doit être considéré comme un modèle décrivant les phénomènes de manière approchée. Mais un modèle parfait est-il seulement concevable ?

4. Le modèle de la Théorie des catastrophes permet néanmoins de comprendre et de décrire la présence de discontinuités apparentes. On se rend mieux compte de ce caractère apparent en faisant appel aux modèles différentiels.

Reprenons par exemple le système de Liénard-Van der Pol

$$\frac{dx}{dt} = -k[x^3 - Tx + u]$$

$$\frac{du}{dt} = x$$

qui, pour T positif, possède un cycle :



De la première équation du système différentiel, on déduit :

$$dt = -\epsilon dx(x^3 - Tx + u)^{-1}$$

Si l'on parcourt la partie verticale du cycle, $x^3 - Tx + u$ n'est pas nul. Comme $\epsilon = \frac{1}{k}$ est très petit, la durée de passage de la plage supérieure à la plage inférieure sera elle-même très petite. En jouant ainsi sur la valeur de k , on peut donner l'illusion que le passage d'une plage à l'autre s'accomplit de manière discontinue.

L'emploi d'expressions de degré supérieur à 3 pour dx/dt nous permet d'obtenir des cycles enboîtés, ou des cycles possédant plusieurs plages verticales et horizontales. La morphologie des cycles s'enrichit encore quand on donne à du/dt des expressions polynomiales de degré supérieur à 1.

16. Situations de conflits.

1. Les situations de conflit ont fait l'objet d'une première modélisation par la théorie des jeux [15]. L'étude de la stabilité des jeux à deux joueurs sous certaines hypothèses a été faite par Ekeland [13]. Il suppose que les espaces de décision sont des espaces topologiques compacts, que chaque fonction de gain possède un maximum absolu unique, et que certaines conditions dites de transversalité sont satisfaites. Les solutions du jeu, en nombre fini, possède alors des propriétés de stabilité.

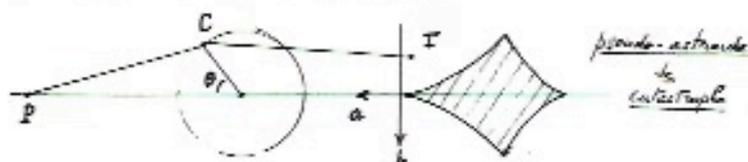
On sait que si la théorie des jeux possède un certain intérêt conceptuel, son utilité pratique est très limitée. Boudon [1] a sans doute proposé une application de la théorie des jeux parmi les meilleures.

Il serait peut-être profitable de reprendre l'analyse des "effets pervers" en faisant appel, localement tout du moins, au modèle métaphorique de la théorie des catastrophes.



En effet Boudon mentionne souvent des situations* où le fait de franchir un seuil x_s , conduit à un retournement assez brutal de l'effet attendu (on passe de x_s à x_m).

2. Zeeman [26] a proposé une "machine à catastrophe" intéressante. On prend un disque mobile autour de son centre, on plante un clou C sur le bord du disque. On relie par des élastiques ce premier clou d'abord à un second clou P situé en dehors du disque, et fixe, puis à un troisième clou mobile I, qu'on peut guider de la main.



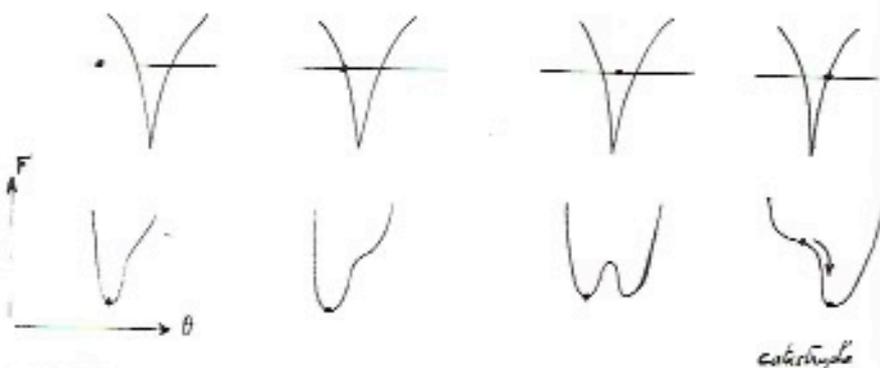
L'énergie de ce système est, d'après la loi de Hooke, de la forme

$$F = \frac{\theta^4}{4} - \frac{\theta}{3} b\theta^3 + \frac{\theta}{2} a\theta^2 + p\theta$$

après changement de variable, $\frac{dF}{d\theta} = 0$ se ramène à la forme standard

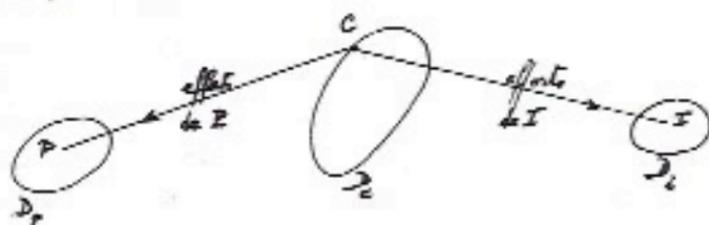
$$\theta^3 - T\theta + u = 0$$

Lorsqu'on traverse l'ensemble de catastrophe de part en part, perpendiculairement à l'axe passant par le clou fixe et le centre des disques, le disque ne bouge pratiquement pas jusqu'au moment où on quitte l'ensemble de catastrophe



(*) On les rencontre fréquemment également dans l'étude des mythes et de la pensée religieuse (cf. R. Girard, La Violence et le Sacré, Grasset, Paris, 1972).

La machine de Zeeman nous a suggéré l'application suivante de la Théorie des catastrophes [67]. Un sujet C (Carter) doit prendre une décision. Son choix est fonction de considérations éthiques, stratégiques, politiques et économiques. Ce choix ne peut être quelconque, car il dépend de contraintes, comme par exemple les contraintes d'ordre intérieur. On suppose que l'ensemble des choix possibles de C est représenté par un domaine convexe D_C situé dans un espace V à grand nombre de dimensions. Le choix de C dépend de l'action de deux protagonistes P et I , de leur position respective dans V (à l'époque P représentait les Palestiniens, et I , bien sûr, les Israéliens). Les positions sont localisées à l'intérieur de deux domaines D_P et D_I .



Naturellement, chacun des protagonistes déploie le plus grand effort pour amener C à choisir son parti. On peut représenter mécaniquement ces efforts par des "élastiques" joignant C respectivement à P et I . La position de C sera donc sur le bord du domaine convexe D_C . Supposons pour plus de simplicité V de dimension 3 - le raisonnement se généralise sans peine - et, dans une première étape, que D_C soit la boule D_3 . Pour P fixé, on fabrique aisément le pseudo-astroïde de révolution qui forme l'ensemble de catastrophe associé à P et D_3 . On considère ensuite le bord de D_C comme l'enveloppe convexe des sphères osculatrices à ce bord. À chaque sphère est associée un pseudo-astroïde de révolution, dont l'enveloppe définit l'ensemble de catastrophe pour I associé à P et D_C . On peut noter cet ensemble $T(P)$.

On peut alors introduire pareillement, pour chaque position I fixe, un ensemble $P(I)$ de catastrophe pour P associé à I et D_C , établir des différentes fonctions de coût d'une catastrophe (par exemple $g_1(P(I), v)$ est le coût pour I d'une catastrophe qui se produit au point v de l'ensemble de catastrophe $P(I)$) et établir des règles de choix pour P et I : ces règles ne sont pas, bien sûr, forcément celles d'un jeu.

17. Choix des Fonctions. Déploiement universel. Variables pertinentes.

1. Un modèle doit posséder les mêmes qualités de stabilité que l'objet qu'il représente. Si f est une fonction, dépendant de plusieurs variables ou paramètres, qui caractérise l'objet dans sa globalité, elle doit connaître un destin analogue à celui de l'objet selon les effets que peuvent avoir sur lui les variations des valeurs des différentes paramètres.

Le problème se pose alors de définir ce que l'on entend par stabilité d'une fonction. Pour cela, on peut procéder ainsi. Dans la mesure où f représente une fonction d'état globale, à la manière d'une fonction d'énergie, le nombre maximum d'états stables ou susceptibles d'être stabilisés que peut prendre l'objet, est évalué par le nombre total, comptés avec leur multiplicité, des extrêmes de la dérivée de f . Une fonction sera donc considérée comme stable si, pour toute petite perturbation δf de f , $g = f + \delta f$ possède le même nombre total de singularités (simples ou multiples) - une singularité est justement un point au lequel la dérivée de la fonction, son gradient, s'annule.

2. Une fonction f étant donnée, on appelle déploiement universel de f , la famille F des fonctions qui ont même nombre total de singularités que f . On dit que f est une réalisation de ce déploiement universel. La théorie de Thom-Mather permet de calculer le déploiement universel d'une fonction f .

Supposons que l'expression de f soit un monôme comme x^n . Cette fonction admet une singularité à l'origine : $f'_x = nx^{n-1}$ s'annule pour $x = 0$, $n-1$ fois. Par conséquent, de manière générale, toute fonction g qui appartient au déploiement universel de f , doit posséder, outre éventuellement 0, $n-2$ autres singularités distinctes ou confondues. L'expression polynomiale la plus simple qui permet d'obtenir ce résultat s'obtient en ajoutant à x^n un polynôme établi sur les $n-2$ autres singularités et de la forme $u_2 x^{n-2} + u_3 x^{n-3} + \dots + u_{n-1} x$.

Par des méthodes d'algèbre linéaire locale, on peut établir pour une fonction à plusieurs variables quelconque f , le nombre de paramètres u_i qui apparaissent dans le déploiement universel $F = f + \sum u_i f_i$ de f .

3. On peut alors entreprendre de classer les fonctions et les espaces

fonctionnels. On dispose de deux éléments pour cette classification :

- le nombre de paramètres u_i ou codimension
- le nombre de variables pertinentes x, y, \dots , ou corang

Thom a le premier donné la liste, maintenant classique [24], des déploiements universels de codimension inférieure ou égale à 4.

Peut-être, à cause de son penser rudimentaire, de la difficulté qu'il éprouve à élaborer des constructions mentales complexes, par l'expérience acquise dans son action sur le monde physique à travers des représentations aux règles simples, l'homme de science s'est mis dans l'esprit que "la nature opère selon les voies les plus faciles et les plus aisées". Ainsi s'exprimait Poincaré. Selon ce point de vue, il faudrait alors s'attendre à rencontrer fréquemment les fonctions élémentaires de Thom dans la plupart des représentations analytiques des phénomènes très stables du monde naturel.

Il n'est pas toujours aisé de connaître, a priori, les variables pertinentes. Qu'entend-on même par pertinent ? On dispose d'un moyen mathématique pour établir une définition, à la condition qu'on puisse associer au phénomène étudié une fonction de représentation globale f dont les singularités définissent les états susceptibles d'être observés.

Supposons d'abord que f soit une fonction de la seule variable x de sorte que $f(x) = x^2$. Alors, selon ce que nous avons exposé au paragraphe précédent, le déploiement universel de cette fonction se réduit à elle-même.

Il en est de même si f est une fonction quadratique des n variables

$$x_1, x_2, \dots, x_n : f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \dots - x_n^2.$$

Si x_1, x_2, \dots, x_k forment un repère local au voisinage de la singularité considérée, et si l'on peut écrire

$$(G-M) f(x_1, x_2, \dots, x_n) = r(x_1, x_2, \dots, x_k) + x_{k+1}^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2$$

on conçoit volontiers que le déploiement universel de f sera défini par le déploiement universel de la singularité résiduelle $r(x_1, x_2, \dots, x_k)$. Les variables x_1, x_2, \dots, x_k qui figurent dans la singularité résiduelle seront appelées les variables pertinentes du système. On espère toujours,

dans les problèmes pratiques, que leur nombre est faible. Notons que dans l'écriture de (GM), on suppose que, si r est un polynôme, son degré est supérieur à 2, car sinon on aurait introduit le terme en x_j^2 $1 < k+1$ dans la suite des termes x_j^2 , $j \geq k+1$.

Un théorème, dû à Cromoll et Meyer, affirme qu'on peut toujours trouver un système de coordonnées locales de sorte que Γ , par rapport à ces nouvelles variables, puissent se mettre pour la forme (G-N).

Calculons la matrice hessienne de f mise sous la forme (G-N) :

$$H(f) = \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial^2 r}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 r}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 r}{\partial x_1 \partial x_k} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial^2 r}{\partial x_k \partial x_1} & \frac{\partial^2 r}{\partial x_k \partial x_2} & & \frac{\partial^2 r}{\partial x_k^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & -2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{matrix} \frac{\partial^2 r}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 r}{\partial x_k \partial x_1} \end{matrix}} \right\} k \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \end{matrix}} \right\} n-k \end{array}$$

(en effet: - si $k+1 \leq j \leq p$ $\frac{\partial f}{\partial x_j} = 2x_j$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = 0$ si $j \neq k$, $= 2$ si $k=j$
 - si $p+1 \leq j < n$ $\frac{\partial f}{\partial x_j} = -2x_j$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = 0$ si $j \neq k$, $= -2$ si $k=j$

Puisque le degré de r est égal au moins à 3, si l'on suppose que l'origine est la singularité, alors $\frac{\partial^2 r}{\partial x_1 \partial x_j}$ est nul. La matrice hessienne est donc dégénérée de rang $n-k$ en la singularité.

Or tout changement de variable linéaire régulier ne modifie pas le rang de la matrice hessienne. Par suite, si la fonction était donnée sous la forme $f(y_1, \dots, y_n)$, le moien immédiat pour connaître le nombre de variables pertinentes consiste à calculer le corang de la matrice hessienne de la fonction f en sa singularité.

4. Pour trouver l'expression de r , il est au préalable nécessaire de trouver le changement de variables défini par $x = Ay$ où A est une matrice régulière de sorte que

18. Cas iii. La Théorie des catastrophes : le modèle statique et les modèles dynamiques

On peut concevoir deux emplois de la Théorie des catastrophes : l'un statique, l'autre dynamique. Nous avons fait appel au modèle statique au paragraphe 15. Dans le modèle statique, on se donne une fonction globale f dépendant des variables d'observation x_1, \dots, x_n et des variables de contrôle u_1, \dots, u_m , caractérisant l'état d'un domaine élémentaire U de l'objet. On doit donc écrire

$$f(x, u, U) = f(x_1, \dots, x_n, u_1(U), u_2(U), \dots, u_m(U)).$$

On suppose que l'état de l'objet est caractérisé par un minimum, par rapport à x , de cette fonction f , réalisation particulière d'un déploiement universel F . Lorsqu'on se déplace à l'intérieur de l'objet, lorsque l'on passe d'un domaine U_c à un autre domaine $U_{c'}$, si les valeurs $u_j(U_c), t_0 \leq t \leq t_1$, franchissent l'ensemble de catastrophe K , on observera le long des domaines U_c pour lesquels u_j atteignent K , des variations rapides et importantes dans les valeurs des observables, et par conséquent, éventuellement, des variations de morphologie importantes. Nous appellerons domaine d'accidents A la réunion des domaines U_c .

C'est cette première version de Thom de la théorie statique des catastrophes qui est la plus fréquemment employée. On trouvera dans [29], un article de I. Ernst sur l'emploi de ce modèle pour décrire l'évolution des coûts fonciers en fonction du territoire considéré.

2. Dans les modèles dynamiques, on examine au-dessus du domaine U , la variété V des états possibles de ce domaine, et l'on dit que l'état présentement observé est le résultat d'une évolution passée qui s'est stabilisée sur un des attracteurs de la dynamique correspondante.

Des dynamiques courantes en physique sont les dynamiques de gradients. Dans ces dynamiques, il existe une fonction f défini sur un espace, ici V , qui définit le potentiel énergétique en chaque point x de V . On en déduit un vecteur force $X(x) = -\text{grad}(f(x))$ dont l'ensemble forme un champ X . Les attracteurs de ces dynamiques sont justement les points en lesquels le potentiel admet des extrêmes, où par conséquent les singularités où le champ s'annule.

Naturellement, quand on passe du domaine U_0 au domaine U_1 du même objet, il n'y a pas de raison, en général, pour que la dynamique change profondément de nature; par conséquent, la dynamique doit conserver des propriétés de stabilité structurelle. Si on impose de limiter la propriété de stabilité structurelle aux seuls attracteurs, il est facile de montrer qu'une perturbation d'une dynamique gradient, issue de la fonction potentiel f , laisse stable les attracteurs (ici des points), si le système gradient perturbé est défini par une fonction potentiel appartenant au déploiement universel F de f .

Ce résultat permet, si la dynamique locale est une dynamique de gradient, de confondre en pratique le modèle statique et le modèle dynamique. On est dans le cadre de la Théorie des catastrophes élémentaires.

Lorsque la dynamique n'est plus de gradient, on peut penser que le modèle basé sur l'existence d'une dynamique gradient sert de première approximation à un modèle plus complet (cf. [/]) Remarquons ici qu'on ne connaît guère d'exemple pratique qui utilise ce modèle général de façon détaillée.

19. Intérêts conceptuels et mode d'emploi des modèles de la Théorie des catastrophes

1. Les modèles de la Théorie des catastrophes présentent l'intérêt de forcer à l'examen des structures et des évolutions dans une perspective dynamique, de centrer l'attention des observateurs sur l'antinomie permanent-transitoire, et de renouveler l'intérêt pour les considérations spatiales et les questions de morphologie. Ils rappellent le rôle organisateur des singularités dans tous les types de sociétés - même les plus abstraites. Ils montrent le rôle central joué par la notion de stabilité,

2. L'emploi du modèle à des fins numériques suppose que l'observateur ait sous la main les valeurs d'au moins trois données distinctes : une variable interne x , et deux variables de contrôle u_2 , et u_3 . Si les données expérimentales sont inaccessibles, il faudra néanmoins postuler l'existence de ces variables, et, bien sûr, essayer de leur donner une signification précise.

Si l'on dispose d'une courbe, on pourra la considérer, selon sa forme, ou bien comme graphe d'une fonction potentiel f , réalisation d'un déploiement universel, ou bien comme section d'un morceau de l'hyper-surface représentant le système d'équations $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ dans les espaces des $(\dots, x_1, \dots, u_j, \dots)$. Si le long de l'ensemble de catastrophe associé à f , des variations importantes dans les valeurs des x_i se font sentir, on pourra dire que f est une bonne forme analytique (de représentation) du phénomène ou de l'objet considéré.

Si l'on dispose de la fonction f qui n'est pas un polynôme, un développement de Taylor éventuel permettra d'obtenir, au voisinage de chaque singularité, une expression polynomiale approchée pour f . On déterminera le déploiement universel de cette fonction (d'énergie la plus souvent) globale, et on en recherchera l'ensemble de catastrophe : c'est ainsi que l'on peut opérer dans les problèmes liés à la résistance des matériaux.

Comme les fonctions utilisées en Théorie des catastrophes élémentaires sont simples et stables, les phénomènes qu'elles pourront représenter devront posséder ces mêmes qualités. C'est donc pour étudier des processus assez stables, au caractère répétitif, situés à des niveaux de globalité assez élevés, que le modèle de la théorie des catastrophes pourra trouver son utilité. Il est probable par exemple qu'une étude typologique du déroulement des différentes crises sociales ou économiques permettrait de reconnaître des traits de comportement que l'on pourrait géométriser à l'aide d'un ou de plusieurs modèles fournis par la théorie des catastrophes élémentaires.

L'incitation à imaginer des représentations géométriques d'une part, dynamiques d'autre part, de l'évolution des objets et des processus très divers que l'on peut rencontrer dans tous les ordres de la nature est sans doute l'un des apports parmi les plus intéressants de cette Théorie au développement de la science contemporaine. Que ce soit, en physique avec l'étude des caustiques, des transitions de phase, de la morphologie des noyaux atomiques, des ruptures dans les matériaux et dans les constructions mécaniques, ou bien en psychologie dans l'étude des comportements, en écologie dans l'étude des relations entre certains prédateurs et certaines proies, en biologie, dans l'étude de l'androgénèse, des comportements des ciliés, en embryologie théorique, en histoire dans l'étude du mécanisme

des révolutions, en économie dans l'étude du crash boursier, en sémiologie dans l'étude de l'organisation des contes, en linguistique dans l'étude de la classification des verbes et des sèmes, dans l'explication de certaines constructions linguistiques, dans la genèse même du conte et du récit, l'emploi de Théorie des catastrophes a permis d'enrichir le fonds de connaissance d'une vision nouvelle et de réflexions inédites.

20. Conclusion

Le caractère global de cette théorie n'en facilite pas l'emploi s'il s'agit de procéder à des études de comportement très fines, portant sur des systèmes trop peu riches en constituants peu homogènes. La difficulté de la maîtrise des systèmes tient, pour une bonne part, à l'entrecroisement des hiérarchies, et à l'assemblage de structures et de fonctions de nature très diverse, auxquels il est parfois impossible d'associer des indicateurs numériques ayant un sens véritable.

Aussi les représentations mathématiques si étudiées aujourd'hui, du genre $\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$, n'ont-elles d'intérêt que dans les domaines techniques où il est possible d'entreprendre des mesures assez précises.

Dans les autres domaines, où l'esprit humain procède souvent par intuition et par simulation inconsciente, tout en s'appuyant parfois sur des raisonnements bien construits, l'emploi des modèles mathématiques très précis est encore un leurre. L'utilisation importante de l'ordinateur est tout à fait justifiée comme outil de rassemblement d'un nombre très élevé de données disparates, et de leur manipulation à fin de simulation.

Pour être pertinentes, ces simulations doivent évidemment être bien conduites. Elles supposent, de la part de celui qui conçoit leur organisation, une intelligence assez approfondie des qualités et des propriétés principales des objets, qualités sur lesquelles il faut s'appuyer, ou qu'il convient de bien mettre en évidence, ou encore qu'il est indispensable de respecter.

De manière à apprendre petit à petit à analyser convenablement les systèmes complexes, ce dont nous sommes encore peu capables, il était judicieux de s'adresser à des disciplines à vocation universelle, comme le sont la philosophie ou, dans la cas présent, les mathématiques. Les concepts

généraux qui finissent par être dégagés, sur lesquels les mathématiques en viennent à mettre l'accent, méritent sans aucun doute d'être familières à l'esprit d'un très large public; les responsables, ceux qui conçoivent, sont concernés au premier chef.

A posteriori, ces notions apparaissent comme bien banales. Et comment ne le seraient-elles pas puisque les mathématiques traitent de problèmes très généraux; les concepts qu'elles utilisent sont de portée universelle, et, par conséquent, d'une grande simplicité. L'essentiel est de prendre conscience de leur importance, de reconnaître leur position élevée dans la hiérarchie des valeurs sémantiques. On remarquera, et somme toute il fallait s'y attendre, que, dans tous les cas, ces concepts se rapportent aux caractéristiques fondamentales qui concernent l'existence (voisinage, domaine, stabilité) la naissance et le devenir (différenciation, bifurcation, attracteur, catastrophe) des objets singuliers autour desquels s'organise l'univers.

A.0 Généralités

La théorie des catastrophes repose sur des considérations physiques et sur une théorie mathématique, la théorie de la stabilité des applications différentiables. Dans les applications, il n'est nullement encore prouvé que les modèles fabriqués à partir de la théorie des catastrophes soient toujours les plus adaptés pour décrire la réalité avec précision. Mais même si ces modèles ne sont pas les meilleurs que l'on puisse concevoir, leur construction représente néanmoins une étape importante vers l'obtention des modèles les plus pertinents. Et quoiqu'il en soit, il reste indispensable de faire appel aux outils de la théorie de la stabilité des applications différentiables pour parvenir à bâtir ces modèles.

Il est extrêmement difficile d'introduire le lecteur, et en quelques pages, ses connaissances mathématiques nécessaires pour maîtriser cette théorie. Un ouvrage récent [30], d'excellente facture, consacre près de 170 pages à la présentation pédagogique de ces notions, et encore les auteurs ont-ils supprimé les démonstrations. Or bien souvent, le traitement d'exemples optiques ou mécaniques suppose que l'on fasse appel à quelques théorèmes et parfois qu'on ^{donne} quelques démonstrations. Il n'est pas possible en tout cas de traiter ici et en détail de tels exemples.

A.1 Morphologie des caustiques

Pretons le cas de l'optique. Les conclusions de BERRY (dont les travaux sont cités dans [30]) s'appuient sur un ensemble de travaux mathématiques (Maslov, Jänisch, Duistermaat, Arnold) parfois volumineux (l'article de Duistermaat par exemple a 75 pages). Berry a appliqué la théorie des catastrophes à l'étude fine des caustiques (forme, intensité lumineuse) et à la diffraction.

L'étude de la morphologie des caustiques est facile. Rappelons qu'une caustique se définit comme l'enveloppe de rayons. On peut observer des causti-



ques sur un écran tel que la surface d'un liquide, par réflexion de la lumière

sur une paroi concave. La théorie des singularités des applications différentiables permet d'aborder l'étude de la forme des caustiques par deux méthodes. Voici le principe de la plus classique d'entre elles.

Soit $q(t)$ la position d'un point mobile à l'instant t . Désignons par $S(q_1, q_2)$ la longueur d'un rayon entre $q(t_1) = q_1$ et $q(t_2) = q_2$, et par U_2 un front d'ondes formé de points $q(t_2)$: U_2 est issu d'un front d'ondes U_1 formé de points $q(t_1)$ tels que $S(q_1, q_2) = \tau$. Le rayon issu de q_1 est orthogonal à U_1 , ce qui s'exprime par la relation:

$$\frac{\partial S(q_1, q_2)}{\partial q_1} = 0.$$

Le fait qu'en q_1 une caustique prenne naissance est traduit par la dégénérescence de la matrice hessienne associée à S . Comme toute caustique observée est stable, on obtient les différentes formes de caustiques comme ensembles de catastrophe des fonctions S .

En optique classique, S est une fonction pouvant dépendre des trois paramètres d'espace et du paramètre temporel: les caustiques observées s'obtiennent donc par la considération des ensembles de catastrophes de Thom.

(Lorsque le milieu des ondes optiques, ou sonores, ou de pression, voire de matière, n'est plus homogène, les ondes de propagation deviennent dépendantes du milieu ambiant, et les caustiques peuvent prendre des morphologies compliquées. On s'alors intéresse à essayer de formuler le problème en termes d'intégrales oscillantes).

A.2 Le cas de la mécanique et la théorie de la bifurcation avec imperfections

Les sept catastrophes élémentaires ont été découvert de manière indépendante et par des approches bien différentes d'une part par THOM, et d'autre part par THOMSON et HUNT. Ces derniers ont étudié des questions de stabilité mécanique à travers la théorie de l'élasticité.

L'accord s'établit maintenant pour établir une théorie de la stabilité, ou si l'on veut une théorie de la bifurcation, valable dans certains domaines, en utilisant d'une part certaines considérations physiques à la Thomson et Hunt, et d'autre part la théorie de la stabilité des applications différentiables. Cette théorie de la bifurcation, dite avec imperfections, a un champ d'applications assez vaste, il s'étend de la mécanique aux domaines de la physique et de la physico-chimie régis par des équations aux dérivées partielles.

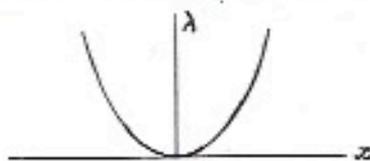
En théorie de l'élasticité, une bifurcation correspond à un gauchissement ou à un flambage. En hydrodynamique, un point de bifurcation correspond à une transition de phase, à un point critique. Les bifurcations brutales, dont pourrait rendre compte une théorie de la bifurcation trop incomplète, sont très rares, dans la mesure même où elles existent. De multiples facteurs secondaires, tels que des im-

paramètres, des défauts d'homogénéité dans la texture, ont pour effet de lisser ou bien de modifier le comportement de ces transitions. Aussi est-il nécessaire d'introduire de manière convenable des paramètres supplémentaires α_i .

A.2.1 Dans l'état actuel de la théorie de la bifurcation avec imperfections, on considère un objet auquel est associée une fonction d'état $G(x, \lambda)$, dépendant des variables d'état $x = (x_1, \dots, x_n)$ et d'une variable externe unidimensionnelle λ . On dispose des moyens techniques pour étendre certains résultats de théorie au cas où λ est une variable multidimensionnelle.

Dans bon nombre de situations, $G(x, \lambda)$ dérive d'un potentiel $U(x, \lambda)$ (de manière, en général, non triviale), et l'ensemble des solutions de l'équation $G(x, \lambda) = 0$ contient les minimums de $U(x, \lambda)$ qui correspondent aux états généralement stables et observables de l'objet.

Dans cette théorie, l'ensemble des zéros de G , $D(G) = \{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \text{ tels que } G(x, \lambda) = 0\}$ est appelé le diagramme de bifurcation associé à G ou à l'objet considéré. Par exemple, si $U(x, \lambda) = x^4/4 - \lambda x^2/2 + \alpha$, alors $G(x, \lambda) = x^3 - \lambda x$,



Le diagramme de bifurcation associée à cette fonction se compose de la droite $x = 0$ et de la parabole $\lambda = x^2$.

On introduit maintenant la perturbation par l'intermédiaire d'un type de déploiement universel $F(x, \lambda, \alpha)$ de $G(x, \lambda)$, où $\alpha \in \mathbb{R}^p$, et où $F(x, \lambda, 0) = G(x, \lambda)$. Le problème est d'énumérer les différents types de diagramme de bifurcation $D(F)$

$$D(F) = \{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \text{ tels que } F(x, \lambda, \alpha) = 0\}$$

lorsque α subit de petites variations autour de l'origine.

On notera ici que, dans la théorie des catastrophes, on s'intéresse au déploiement universel de U . Dans la théorie présente, on s'intéresse au contraire au déploiement universel de G , obéissant à des conditions d'équivalence de contact particulières. Voici quelques exemples de résultats obtenus:

Théorème: Si $G = x^n \pm \lambda$, $n \geq 2$ alors $F(x, \lambda) = x^n + \alpha_{n-2} x^{n-2} + \dots + \alpha_1 x \pm \lambda \cdot (I_n)$

(II) Si $G = x^n \pm \lambda x$, $n \geq 2$ alors $F(x, \lambda) = x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_2 x^2 \pm \lambda x + \alpha_1$.

ou bien $F(x, \lambda) = x^n + \alpha_{n-2} x^{n-2} + \dots + \alpha_2 x^2 \pm \lambda x + \alpha_1 + \alpha_{n-1} \lambda$.

(III) Si $G = x^3 + \lambda^2 x$, alors $F(x, \lambda) = x^3 + \lambda^2 x + (\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2) + \lambda(\alpha_4 + \alpha_5 x^2)$

(IV) Si $G = x^2 h(x, \lambda)$, alors F est de codimension infinie.

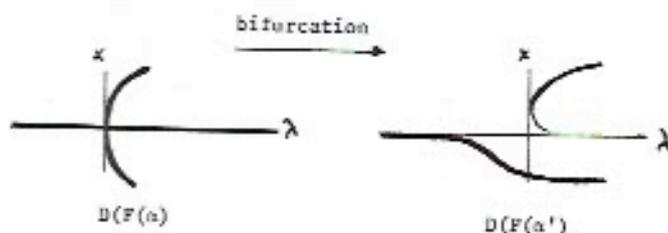
Dans cette théorie, élaborée par GOLUBITSKY et SCHAEFFER [2] [3] [4] [5], F et G appartiennent à une même classe d'équivalence de contact si la propriété suivante est vérifiée : on peut passer de F à G en opérant, sur les coordonnées de l'espace-source, un changement local, différentiable et inversible (un difféomorphisme) de la forme $(x, \lambda) \mapsto (p(x, \lambda) - x', \Lambda(\lambda) - \lambda')$ et sur les coordonnées de l'espace-but une transformation analogue, représentée par une matrice inversible $\gamma_{x, \lambda}$, dépendant des paramètres x et λ . En d'autres termes :

$$F(x, \lambda) = \gamma_{x, \lambda} \cdot G(x', \lambda')$$

On remarque ici que λ est obtenue à partir de la variation du seul paramètre λ . On considère en effet que λ représente une variable externe, soumise aux seuls caprices de l'expérimentateur; ses valeurs ne peuvent alors dépendre de l'état interne x .

Dans ce contexte, les auteurs précédents ont montré que si $G(x, 0) = x^n + \dots$, alors G est équivalent à (I_n) si et seulement si $G_{\lambda}(0) \neq 0$, ou bien à (II_m) si et seulement si $G_{\lambda}(0) = 0$, le rang de la matrice hessienne de G à l'origine, étant égal à 2, et son indice égal à 1.

Dans l'hypothèse où F est une application de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ (x, λ, α) dans \mathbb{R}^n , lorsqu'une bifurcation se produit, d'une part s'abaisse le rang de la matrice des dérivées partielles de F par rapport aux différentes composantes x_i et par rapport à λ , et d'autre part le diagramme de bifurcation éclate en plusieurs composantes connexes. Voici, à titre d'exemple, l'effet d'une bifurcation sur un diagramme de bifurcation :



Definition : Une bifurcation au point λ_0 du diagramme de bifurcation, obtenue à partir d'une solution $x(\lambda)$ de l'équation $G(x, \lambda) = 0$, est surcritique (resp. subcritique) si, au voisinage de $x(\lambda_0)$, il existe une seule solution

de l'équation $G(x, \lambda) = 0$, lorsque $\lambda < \lambda_0$ (resp. $\lambda > \lambda_0$). Dans le cas contraire, la bifurcation est dite transcritique.

A. 2.2. Nous allons, pour terminer reprendre trivialement un exemple étudié dans [52]. On considère un système mécanique formé de deux poutres identiques, mobiles sans friction autour de leur extrémité commune, et reliées par un ressort linéaire dont le coefficient d'élasticité est égal à $1/4$. L'extrémité de la première poutre est fixe, alors qu'on peut agir sur l'extrémité mobile de la seconde, en exerçant une force de compression λ . Par ailleurs chaque poutre se compose de deux éléments rigides, séparés par un élément compressible assimilable à un ressort linéaire de coefficient d'élasticité k ; on suppose la longueur de ce ressort égale à 1 en l'absence de toute compression ou extension. On suppose



de plus, pour obtenir davantage de simplicité dans l'exposition et sans nuire à l'essentiel, que l'ensemble est supporté par un cadre, il n'est pas dessiné ici, de sorte que les ressorts sont soumis aux mêmes forces de compression et d'extension.

Si x désigne l'angle d'une poutre avec l'horizontale, X la longueur d'un ressort, l'énergie potentielle de ce système mécanique a pour valeur :

$$U = k(X-1)^2 + \frac{1}{2} x^2 + 2\lambda X \cos x .$$

L'équilibre est atteint lorsque

$$\begin{cases} U_x = x - 2\lambda X \sin x = 0 \\ U_X = 2k(X-1) + 2\lambda \cos x = 0 \end{cases}$$

L'élimination de X entre ces deux équations conduit à la relation

$$G(x, \lambda) = 2\lambda(1 - (\lambda/k)\cos x) \sin x - x = 0 .$$

G admet pour développement limité, au voisinage de $x = 0$, l'expression

$$G(x, \lambda) = x(-1+2\lambda-2(\lambda^2/k)) + (x^3/3)(4(\lambda/k)-1) + O(x^5)$$

La dérivée partielle de G par rapport à x , est égale, au point $x = 0$, à

$$G_x(0) = -1+2\lambda-2\lambda^2/k$$

une bifurcation ne peut apparaître en ce point $x = 0$, que si $G_x(0) = 0$; alors

$$(*) \quad \lambda = \frac{1}{2} (k \pm (k^2 - 2k)^{1/2})$$

et le développement limité de $G(x, \lambda)$ débute au terme d'ordre 3. Si $k > 2$, λ n'est pas réel, et aucune bifurcation ne peut se produire. Il en existe deux si $k > 2$; en ces points le calcul montre que

$$G = G_x = G_{xx} = G_{\lambda} = 0,$$

$$G_{xxx} = 2\lambda(4\lambda/k - 1)$$

$$G_{\lambda x} = 2(1 - 2\lambda/k)$$

Si l'on choisit le signe + dans (*), quel que soit $k > 2$, G_{xxx} est positif, $G_{\lambda x}$ est négatif. Si l'on choisit le signe - dans (*), $G_{\lambda x}$ est positif quel que soit $k > 2$, G_{xxx} est positif si $k < 8/3$, négatif dans le cas contraire.

Considérons maintenant ce qu'il advient des bifurcations lorsque k décroît à partir de valeurs (positives) élevées. Lorsque k est grand, λ a pour valeurs approximatives $\lambda_{\min} = 1/2 + k^{-1}$ (les ressorts X ne bougent pratiquement pas), et $\lambda_{\max} = k$ (les longueurs des ressorts X tend vers 0). Ces deux bifurcations sont surcritiques puisque F_{xxx} et $F_{\lambda x}$ sont de signes opposés. Le diagramme de bifurcation a la forme suivante :

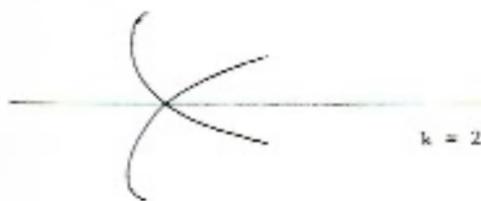


Lorsque $k = 8/3$, le terme d'ordre 3 dans le développement limité de $G(x, \lambda)$ disparaît également. On vérifie sans peine que G satisfait aux conditions qui le rendent équivalent au cas (II_m) avec $m = 5$.

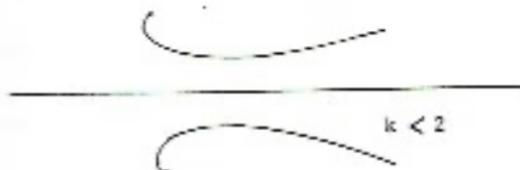
Lorsque $k < 8/3$, la bifurcation pour λ_{\min} devient subcritique, avec perte de stabilité pour les solutions correspondantes.



Lorsque $k = 2$, (λ est alors égal à 1), on peut montrer que G est équivalent au cas III.



Enfin lorsque $k < 2$, aucune bifurcation n'apparaît. Le diagramme de bifurcation n'en existe pas moins, puisque, rappelons-le, il est défini comme l'ensemble des couples (x, λ) qui annulent G . Mais ce diagramme ne montre pas ici l'axe (de symétrie) $x = 0$ (sauf au point $x = 0, \lambda = 0$) et chaque demi-plan ne contient qu'une seule composante connexe.



BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. BOUDON Effets pervers et ordre social, PUF, Paris 1977
- [2] C.P. BRUIER Topologie, Publ. Math. de l'Université de Paris XII, série brigue 1981
- [3] Initiation à la géométrie différentielle, Cahiers de Psychologie
20 (1977) 73-90
- [4] Quelques remarques sur la Percepto-linguistique, 1970
- [5] Secondes remarques sur la Percepto-linguistique, Publ. Centro
Internazionale di Semiotica e di linguistica, serie A, n° 6
juin 1971, Università di Urbino
- [6] Régulation et activité mentale, Colloque sur la Régulation, Collège
de France, Paris 1977
- [7] The theory of catastrophes : some epistemological aspects,
Synthese, 39 (1978) 293-315
- [8] Topologie et Perception, tome 1, bases philosophiques et mathé-
matiques, préface de R. Thom, Maloine-Doïn, Paris 1974 *L'ordre du monde*
1985
- [9] A. CROZIER La Société bloquée, Seuil, Paris, 1970
- [10] A. CROZIER / F. FRIEDBERG L'acteur et le Système, Seuil, Paris, 1977
- [11] P. DELATTRE Système, structure, fonction, évolution, préface de A. Lichnerowicz,
Maloine-Doïn, Paris 1971
- [12] P. DELATTRE L'évolution des systèmes moléculaires, préface de R. Thom, Maloine-
Doïn, Paris 1971
- [13] I. EKELAND Topologie différentielle et théorie des jeux, Topology, 13 (1974)
375-388
- [14] R. HERMANN Applied differential geometry and systems theory, Colloque IRIA
Analyse des Systèmes, Bordeaux, 1978
- [15] N. KRASSOVSKI / A. SOUBBOTINE Jeux différentiels, Editions Mir, Moscou, 1977
- [16] J.L. LE MOIGNE La théorie du système général, PUF, Paris, 1977
- [17] J. LESOURNE Les systèmes du destin, Delloz, Paris, 1976
- [18] J.G. MARCH / H.A. SIMON Les organisations, Dunod, Paris, 1974
- [19] M.D. MRSAROVIC / Y. TAKAHARA General systems theory : mathematical foundations,
Ac. Press, New York, 1975
- [20] A.N. MICHEL / R.K. MILLER Qualitative analysis of large scale dynamical systems
Ac. Press, New York, 1977

- [21] V. KASVAN Stabilitatea absoluta a sistemelor automate en intirziere, Editura Academiei republicii socialiste romane, Bucuresti 1975
- [22] S. SMALE Catastrophe theory. Selected papers by E.C., Bull. Am. Math. Soc. 84,6 (1978) 1360-1368. Zeeman
- [23] H. SUSSMAN / R. ZAHLER Catastrophe theory as applied to the social and biological sciences : critique, Synthese 37 (1978) 117-216
- [24] R. THOM Stabilité structurelle et morphogénèse, MA Benjamin inc, Reading, 1972
- [25] P. WEISS L'archipel scientifique, Maloine-Doin, Paris, 1974
- [26] C. ZEEMAN Catastrophe theory, Addison-Wesley Publ. Co Inc., Reading 1977

Ouvrages collectifs :

- [27] Mathematical Systems Theory (Udine 1975) Lecture Notes in Economics and mathematical systems theory n° 131, Springer-Verlag, Berlin 1976
- [28] Control theory and topics in functional analysis, 2 vol. International Atomic Energy Agency, Vienna, 1976
- [29] Modélisation et maîtrise des systèmes, 2 vol. Editions Hommes et Techniques, Suresnes, 1977

Ouvrages généraux

[1] (tomes 1 et 2) [24] [26] opus cités

[30] T. POSTON + I. STEWART Catastrophe Theory and its applications, Pitman, 1978, London.

Cet ouvrage contient une abondante bibliographie. Celle que nous donnons ici vise seulement à compléter en partie la biographie de Poston et Stewart. Je suis redevable à F. Delattre de quelques titres.

[31] M. DAVIES, A.E.R. WOODCOCK, Catastrophe Theory, E.P. Dutton, 1978, New-York.

Physique

[32] H. EIKEMER, W. CÜTTINGER (Ed.) Structural Stability in Physics, Springer, 1979, Berlin.

[33] R. da SILVEIRA, Sur une classification topologique des courbes de distribution de masse des fragments de fission, J. de Physique, Lettres. T. 40, 14 (1979) L. 319 - L. 322.

[34] B.T. ULTICH, Josephson junction dynamics from the view-point of Catastrophe theory, Proceedings of the 14th Intern. Conf. on Low Temperature Physics, Helsinki (1975) 222-225.

[35] D.E.C. WILLIAMS, Catastrophe of the molecular field, Am. J. Phys. 47 (2) Feb. 79, 156-160.

35 bis J.KOMDROWSKI, Gas-Liquid phase transitions and singularities Preprint IHES M-P/245 Nov. 1978.
Biologie-Médecine.

[36] C.P. BRUTER, Quelques exemples d'applications des mathématiques statiques et dynamiques dans des domaines proches de la biologie, in Morphogénèse de la Biologie aux Mathématiques, Y. Bouligand, ed. Maloine-Dein, Paris, 1980.

[37] J.P. DUPONT, Applications de la Théorie des Catastrophes au domaine de l'hémophilie, A parasite.

[38] Y.L. KERGOSTEN, L'utilisation de modèles topologiques en médecine, in Elaboration et justification des modèles, P. Delattre et M. Thellier, Ed., Maloine-Dein, Paris, 1979, p. 551-564.

[39] Y. KERGOSTEN, M. THELLIER, M.-O. DESBIEZ, Présence entre bourgeons auxiliaires chez *Bidens-Pilosus* L. Modélisation au niveau microscopique en termes de catastrophe ou au niveau microscopique en termes de "pompe et fuite" cellulaires, in Ibidem 323-344.

[40] J. FERNES, J. BELLIAUD, Mise en évidence d'un point d'articulation important dans le contrôle photopériodique de la floraison du mil, in Ibidem 313-322.

Sciences humaines

[5] [6] [7] opus cités

[41] Behavioural Sciences, vol. 23, no 5, Sept. 1978, Applications of Catastrophe Theory in the Behavioural and Life Sciences.

- [42] C.P. BRUTER Modifications du comportement et métaphores géographiques. Neurobiologie de l'Apprentissage, J. Delacour Ed., Masson, Paris 1978, p 183-198.
- [43] P.W. FREY, R.J. SEARS, Model of conditioning incorporating the Rescorla-Wagner associative axiom, a dynamic attention process, and a Catastrophe Rule, Psychological Review, vol. 85, n°4 (1978) 321-340.

Economie Mathématique

[13] [29] opus circa.

- [44] Y. BALASKO. Some results on uniqueness and on stability in general equilibrium theory, J. of Math. Econ. 2(1975) 95-118 .
- [45] Y. BALASKO Economic Equilibrium and catastrophe theory, an introduction Econometrica 46 (1978) 557-569.
- [46] Y. BALASKO Equilibrium analysis and envelope theory , J. of Math. Econ. 5 (1978) 153-172.
- [47] I. EKELAND Eléments d'Economie Mathématique, Hermann, Paris, 1979.
La série des articles de S. Smale dont j'indique ici le dernier paru:
- [48] S. SMALE Global analysis and economics VI, J. of Math. Econ. 3 (1976) 1-14.
- [49] Y.H. WAN On the structure and stability of local Pareto optima in a pure exchange economy J. of Math. Econ. 5 (1978) 255-274.

46 bis Y. BALASKO Economics from the differential point of view Springer-Verlag Ecologie New-York 1981.

- [50] J. CASTI, I. DUCKSTEIN, J. KEMOPOY A model of Phytoplankton Dieoff in small eutrophic ponds using catastrophe theory , J. Water Resource Res.
- [51] C. HOLLING, D. JONES, D. LUDWIG Qualitative analysis of insect outbreak systems: the Spruce budworm and the forest , J. Anim. Ecol. 47 (1978) 315-332.

Bifurcations avec imperfections

- [52] M. GOLUBITSKY, D. SCHAEFFER A theory for imperfect bifurcations via singularity theory Commun. Pure Appl. Math. 32 (1979) 21-98.
- [53] Imperfect bifurcation in the presence of symmetry Commun. Math. Phys. 67 (1979) 205-232.
- [54] Bifurcation analysis near a double eigenvalue of a model chemical reaction Arch. Rat. Mech. Anal. à paraître
- [55] Boundary conditions and mode jumping in the buckling of a rectangular plate Commun. Math. Phys. à paraître.

On ne trouve ici qu'un aperçu bibliographique. E.C. ZEEMAN, Mathematical Institute, University of Warwick, Coventry, U-B, tient à jour une bibliographie complète.

Index terminologique

Anse	20	Faisceau d'applications	37
application	17	fermé	13
attachement d'anse	20	fibre	23
attractant	29	fibré	23
		-tangent	26
Bifurcation	31	fronce	40
bicontinu	6		
bijection	5	Générique	28
bord		gradient	17
boule	17	groupe	
- fermé	13	- fondamental	21
- ouverte	13	- de Poincaré	21
		- d'homotopie	21
Catastrophe	39		
champ de vecteurs	23	Homeomorphisme	6
codimension	49	homotopie	21
complexe (nombre)	9		
composante connexe	4		
connexe	4		
- par arcs	21	Intervalle	
continu	6	- fermé	13
contractile	21	- ouvert	13
contrôlable (système)	35		
corang	49	Métrique	
courbe d'évolution	23	- euclidienne	11
cycle limite	30	- pythagoricienne	11
		- sensorielle	11
		- relativiste	11
		- riemannienne	11
Déploiement universel	48		
dérivée	15	Noeud	
différenciation	34	- composé	22
dimension d'un ouvert	14	- simple	22
distance	10		
domaine	3	Obstruction	19
- d'accidents	52	orbite	23
droite projective	37	ouvert	13
Entier naturel	9	Point	
ensemble		- col ou	29
- de catastrophe	39	- selle	29
- de bifurcation	40	- singulier	28
équivalence topologique	6	propriété générique	28
espace		puits	29
- fibré	23		
- métrique	10		
- séparé	14		
- topologique	4		
- total	23		

Quaternion	9	Trajectoire	23
Rationnel	9	Variable	
réalisation d'un déploiement		- de contrôle	26
universel	48	- d'état	26
réel	9	- pertinente	49
Section différentiable	26	Variété	
singularité résiduelle	49	- branchue	34
source	29	- différentiable	18
stabilité		- des états	23
- d'une fonction	48	- topologique	14
- de position	29	vitesse instantanée	15
- structurelle	30	voisinage	3
surface	20		
- de genre g	20		
système dynamique	24		

Table des Matières

Avant-Propos

0. Introduction
1. Place de la Topologie dans les mathématiques. Divisions de la Topologie
2. Localisation, voisinage et connexité
3. La notion de stabilité topologique
4. Sur les espaces topologiques considérés en mathématiques
5. La notion de métrique
6. Le jeu des boules. La théorie des sphères. Voisinages ouverts et fermés
7. Variété topologique de dimension n
8. La notion d'application et de variété différentiable
9. Questions locales et globales : un aperçu
10. Représentation topographique primitive de quelques objets
11. Représentation des propriétés en un point. Notion d'espace fibré
12. Introduction de la dynamique. Sections d'un fibré. Champs de vecteurs. Systèmes dynamiques.
13. Représentation des évolutions des objets
14. Cas i. Eléments singuliers. Stabilité de position. Stabilité Structurale. Bifurcation et Différenciation
15. Cas ii. Evolutions rapides et discontinuités, ensemble de catastrophes
16. Situations de conflits
17. Choix des fonctions. Déploiement universel. Variables pertinentes
18. Cas iii. La Théorie des catastrophes : le modèle statique et les modèles dynamiques
19. Intérêts conceptuels et modes d'emploi de la Théorie des catastrophes
20. Conclusion

Appendice : Autres exemples d'applications de la théorie de la stabilité des applications différentiables

Bibliographie

Index terminologique