REVUE INTERNATIONALE DE SYSTEMIQUE
Vol. 3, N° 4, 1989, pp. 437 à 458

LA NOTION DE SINGULARITÉ ET SES APPLICATIONS

C. P. BRUTER
Université Paris-XII [1]

Résumé
Singularité et bifurcation sont des notions essentielles non seulement en mathématiques, mais également dans la vie quotidienne, dans l'organisation des mondes physique et biologique. Les définitions de ces notions, leurs principales propriétés sont illustrées dans ce texte par des exemples très variés. Si la singularité est le lieu géométrique ou physique associé à la genèse ou à la disparition, la bifurcation décrit les modalités des transformations qui adviennent en cette singularité.

Abstract
Singularity and bifurcation are essential notions, not only in mathematics, but also in the daily life, and in the organization of the physical and biological universes. The definitions of these notions, their main properties are illustrated in this text through various examples. If the singularity is the geometrical or physical place associated with genesis or vanishing, the bifurcation describes the modalities of transformations which happen in the singularity.

A celui qui serait tenté de se pencher sur cet article, l'auteur ne saurait trop recommander la lecture préalable et complémentaire de la fresque philosophique constituant la première partie de *Topologie et Perception* [2]. On y traite d'objets, appelés systèmes dans cette revue. On en dégage des propriétés générales qui fournissent le soubassement à maintes explications, à une compréhension renouvelée de nombreux faits de sociétés. On fait appel dans cette étude à deux concepts, celui d'extrémalité d'une part, celui de centre

1. Mathématiques, U.F.R. Sciences, avenue du Général-de-Gaulle, 94010 Créteil Cedex.

organisateur d'autre part, dont nous allons bientôt voir le lien avec le concept de singularité.

Comme chaque fois dans nos aventures intellectuelles, l'étude statique précède l'étude dynamique parce que le fixe, plus longtemps visible, s'imprègne en premier dans nos esprits. Le concept de singularité a été élaboré par référence à une vision figée du monde. Ce n'est que plus tard qu'il a pris sa place naturelle dans une aperception plus complète de notre univers, où les transformations, les changements sont incessants. Dans cette perspective dynamique, les singularités sont apparues comme les lieux particuliers où se produisent des transformations radicales, appelées bifurcations par les mathématiciens.

Extrémalité, singularité et bifurcation sont trois notions que l'on peut considérer comme inséparables. Je ne m'attarderai pas, ici, sur l'extrémalité, mais porterai par contre une plus grande attention aux conceptions dynamiques liées à la notion de singularité, car les phénomènes les plus intéressants, les plus significatifs de notre univers sont les phénomènes de genèse et de fin des choses (*generatio* et *corruptio*), qui relèvent typiquement des théories de la bifurcation.

Il n'est pas de domaine d'investigation où les concepts précédents ne peuvent trouver leur emploi. Davantage les modèles sont précis, davantage sont importants les développements que l'on peut donner aux applications. En quelques pages, on ne peut que donc que se restreindre à la description de modèles fort simples, ou à résumer des études plus longues et très techniques.

On distinguera par ailleurs d'une part la notion purement mathématique, et d'autre part la signification physique attachée à la notion considérée, qui, à l'heure actuelle, ne fait pas encore l'objet d'une transcription en termes mathématiques.

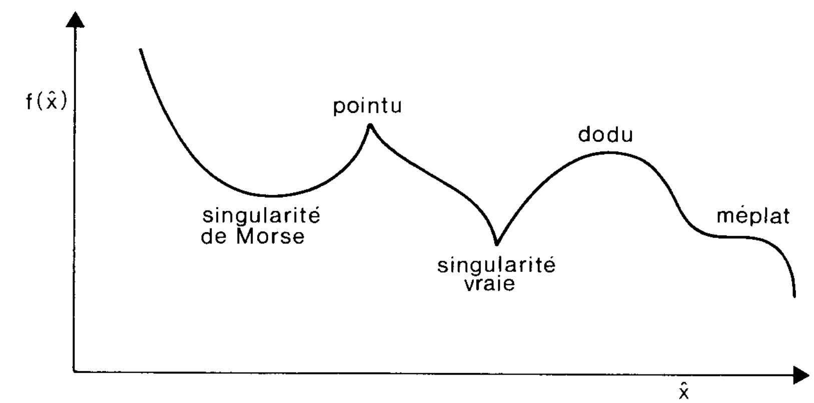
1. La singularité en tant que concept statique

Il est impossible de retracer en quelques lignes l'histoire de la théorie des singularités. On peut convenir de la faire débuter avec un travail de Cauchy sur les *intégrales singulières* (1814). La notion de singularité apparaît plus généralement dans l'étude des fonctions analytiques où se sont illustrés Riemann, Weierstrass, Puiseux. On peut admettre que le travail de Puiseux (1850) marque le début véritable de la géométrie algébrique : l'étude des singularités reste l'objectif essentiel. Quelques-uns des résultats, nombre de concepts (comme par exemple celui de généricité), nombre de méthodes utilisées en géométrie algébrique ont joué un rôle décisif dans l'étude des singularités des applications analytiques comme différentiables.

H. Whitney, M. Morse, R. Thom, J. Mather, V. Arnold sont les principaux fondateurs, constructeurs et développeurs de cette théorie. En réfléchissant à ses applications possibles dans les domaines les plus divers où il pouvait déployer son intuition de géomètre, R. Thom lui a donné une audience justifiée. Outil nécessaire à l'étude des bifurcations, la théorie des singularités fait partie du bagage nécessaire au mathématicien appliqué un peu sérieux.

1.1. *Exemples mathématiques élémentaires*

1.1.1. Emprunté tant à la géométrie qu'à l'analyse, l'exemple suivant possède un caractère historique et paradigmatique :

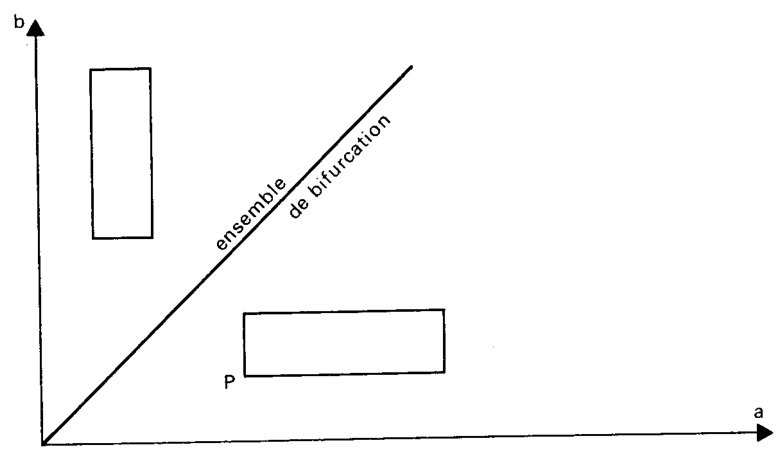


Considérons une forme géométrique G dans le plan $R^2(x, y)$, définie comme le graphe d'une fonction f de R dans R, *i.e.* G est l'ensemble des points $(x, f(x))$ du plan. Cette forme G possède des extrémums locaux, bosses ou cuvettes, dodus ou pointus, ainsi que des méplats.

Ces extrémums locaux sont aussi les *points singuliers* – on dit quelquefois critiques – de la fonction f.

On voit ici le lien élémentaire entre extrémalité et singularité. Tout phénomène extrême est singulier, et toute singularité peut être interprétée en termes d'extrémalité.

1.1.2. Dans ce second exemple, je considère une famille d'objets, disons les rectangles, ou bien les ellipses : une déformation continue permet de passer du rectangle à l'ellipse. Un rectangle, dont les côtés ont respectivement pour longueur a et b, est représenté dans le plan par un point $P(a, b)$ $(a > 0, b > 0)$. Le même point représente l'ellipse définie par l'équation $ax^2 + by^2 = 1$. Ces objets ont en général une forme allongée soit verticalement $(a < b)$ soit horizontalement $(a > b)$. Les objets singuliers de ces familles sont les carrés et les cercles $(a = b)$. Ils sont représentés dans le plan (a, b) par la première demi-bissectrice.



Si $f = a/b = f(a, b)$ désigne un paramètre de forme, les éléments singuliers sont les minimums de f si $a > b$, b constant, les maximums de f si $a < b$, b constant.

1.2. *Principales propriétés de ces singularités : aspects mathématiques et physiques*

1.2.1. Les exemples précédents mettent en évidence une première propriété essentielle des singularités : elles sont rares, elles présentent un caractère exceptionnel. L'ensemble qu'elles forment est de mesure nulle : l'aire de la demi-bissectrice est nulle dans le plan (a, b).

1.2.2. Si nous reprenons l'exemple donné en 1.1.1, nous voyons que la donnée des singularités, de leur position, de leur forme locale suffit, à peu de chose près, pour reconstituer le graphe G. Ce qui se passe entre deux singularités voisine n'a qu'un intérêt secondaire; la forme de la courbe est monotone aux sens propre et figuré.

On voit donc tout l'intérêt que l'étude de la forme des objets au voisinage de leurs singularités. De très nombreux travaux de géométrie algébrique sont consacrés à cette étude.

Si l'on joint par des arêtes les différentes singularités d'un objet G, on obtient ce que j'ai proposé d'appeler « le squelette perceptif » de l'objet. Un objet peut alors être défini comme la donnée d'un squelette perceptif, et des caractéristiques géométriques des singularités représentées par les sommets du squelette.

1.2.3. On remarquera, en la singularité, l'accroissement des capacités potentielles d'évolution. En un extrémum, des dérivées s'annulent, en d'autres termes des croissances ou décroissance s'évanouissent. En un point régulier, la direction de croissance, sa valeur, sont fixées. Au point singulier, on est en situation d'expectative. En franchissant ce point, on peut, selon les cas, croître ou décroître.

1.2.4. Abordons maintenant quelques propriétés physiques essentielles des singularités.

Par ses propriétés d'*extrémalité*, une singularité est *visible.*

Par son caractère *rare*, une singularité est *précieuse*, son coût de fabrication spatio-temporelle est élevé.

Par la géométrie qui lui est associée en son voisinage, elle joue, autour d'elle, un rôle actif de *centre organisateur*, tant sur le plan structurel que sur le plan fonctionnel, autorisé par le fait que les potentialités de transformation locale y sont de manière naturelle plus élevées qu'en des points réguliers.

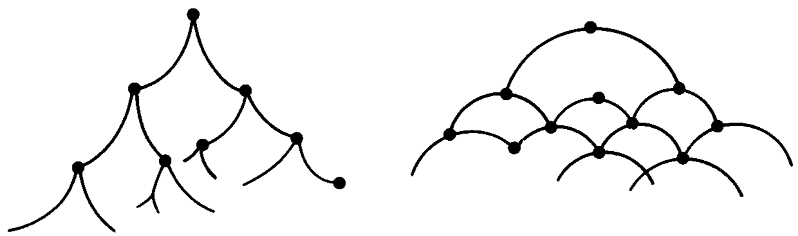
1.3. *Illustrations immédiates*

1.3.1. *Reconnaissance de formes :* Pour procéder à une reconnaissance de forme, on cherchera à en discerner les singularités (par rapport aux qualités qui rendent la forme visible dans l'espace (fond) au sein duquel elle est plongée). On étudiera ensuite les propriétés locales au voisinage de chaque singularité : décomposition cellulaire, courbures.

Cette procédure de reconnaissance de forme est la procédure habituelle, comme celle, par exemple, que suit le système visuel dans son activité habituelle. N'est-il pas raisonnable de chercher à retrouver et de suivre les voies économes, efficaces, éprouvées, que la Nature a, depuis longtemps, su mettre en place?

1.3.2. *Morphologies sociales :* Par morphologie sociale, on peut concevoir celle, territoriale, d'une communauté, en liaison avec l'activité sociale, économique, culturelle de ses membres.

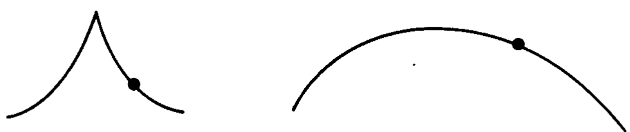
Si l'on considère cette communauté en tant que groupement politique, on constate qu'elle délègue son pouvoir à un appareil politico-administratif. Ce pouvoir, qui se répartit dans l'espace, peut prendre les deux formes extrêmes et singulières suivantes – on donne ici une section dans un plan vertical de l'architecture du pouvoir dans chacun de ces cas paradigmatiques et très élémentaires.



1 2

Les sommets pointés sont les représentants géométriques des éléments singuliers de la structure hiérarchique considérée.

Supposons qu'un individu, représenté par une bille gravisse les marches du pouvoir, et accède au sommet de ces pyramides, qui reposent sur le corps social. Un ébranlement de celui-ci fait vibrer la pyramide politique, de sorte que la bille située sur un sommet de la pyramide 1 ne pourra que tomber, alors que la bille placée en un sommet de la pyramide 2 pourra changer légèrement de position sans perdre de sa situation avantageuse.

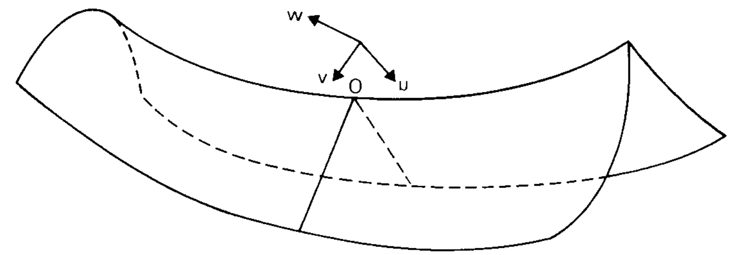


1 2

Une morphologie de type 1 est typiquement de style militaire, autoritaire, féodal, alors qu'une morphologie de type 2 est, de manière en quelque sorte duale, du genre pacifique, convivial, démocratique.

Il est naturel qu'un corps social encore mal différencié, selon la nature des contraintes qui pèsent sur lui, tende à évoluer vers la forme 1 ou vers la forme 2. Par le jeu des rivalités et des paranoïas, la forme 1 est, dans une première étape de l'évolution sociale, devenue rapidement prépondérante mais aussi sécurisante. Si l'évolution postérieure conduit à la mise en place de la forme 2, la forme 1 reste néanmoins encore présente dans l'inconscient collectif, et continue pour un temps à moduler les formes supérieures du pouvoir. La fonction suprême peut être bicéphale : symbolique, chamarée et royale d'une part, exécutive d'autre part. Un seul individu présidentiel peut aussi réunir dans sa personne les deux aspects fondamentaux du pouvoir.

Les formes 1 et 2 peuvent être plongées dans un même modèle de référence, défini analytiquement à partir de « l'ombilic elliptique », ensemble de bifurcation associé à la fonction des deux variables $x, y : x^3+y^3+wxy-ux-vy$, *i.e.* par les trois équations $u=3x^2+wy$, $v=3y^2+wx$, $36xy-w^2=0$; x et y peuvent être considérés comme des intensités de compétence, u et v comme des potentiels de compétence. Le paramètre w détermine la forme dodue ou acérée de la singularité : on pourrait pour l'instant l'appeler paramètre d'agressivité collective : il est homogène à une intensité de compétence.



Il est clair qu'une société moderne se compose de sous-sociétés (par exemple la caste militaire) dont les squelettes du pouvoir peuvent comporter des morphologies locales de type différent. Les sociologues, historiens, voire ethnologues sauront évaluer bien mieux que l'auteur le poids des différents paramètres qui peuvent conduire à l'évolution de w.

Par ailleurs, la visibilité de la singularité est plus marquée dans la société autoritaire que dans la société démocratique. Son rôle organisateur y est également plus affirmé : les décisions du prince sont sans appel et immédiatement mises à exécution. Il ne se trouve point de rival ni de partenaire pour lui porter ombrage, cacher sa visibilité, contester ses avis et ses décisions, ternir son image de marque, affaiblir la portée de ses actes.

1.4. *Seconds exemples mathématiques : les singularités fonctionnelles*

On considère l'objet formé par une familles d'applications de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$. Comment définir les singularités de cet objet?

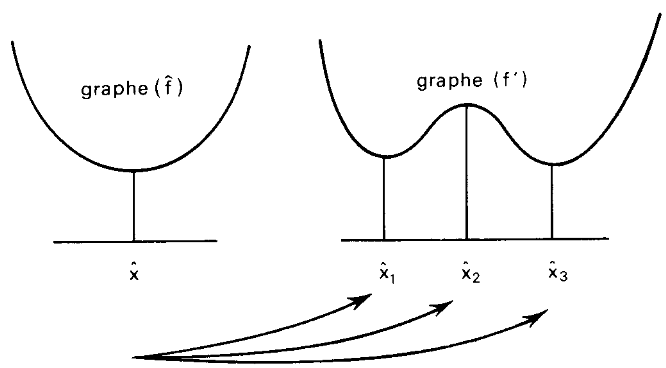
Pour résoudre ce problème, il est nécessaire de donner au préalable une bonne vision géométrique de l'objet considéré. Celui-ci n'est autre, dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$, que l'ensemble des graphes des applications constituant l'objet, chaque graphe étant lui-même caractérisé par ses propres singularités.

Soit f un élément de l'objet donné, c'est-à-dire une application de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$. Si f' est une autre application de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$, à laquelle est associée un graphe G′, ayant en commun avec G la singularité $s\ (\hat{x}, f(\hat{x})=f'(\hat{x}))$, f' ne pourra être dans un « bon » voisinage de f que si d'une part, au voisinage de s les graphes G et G′ sont voisins, et si d'autre part f et f' ont même nombre potentiel de singularités, nombre égal à celui des zéros de leur dérivée.

Par exemple, si au voisinage de s, le graphe de f est donné localement par une forme polynômiale de degré k − on dit que f est localement k-déterminé − alors tout ajout à f de formes polynômiales de degré inférieur ou égal à k ne changera pas le nombre potentiel de singularités de l'application obtenue f'.

Pour que l'application f soit singulière, notons-la alors $\hat{f}$, il faut qu'elle présente par rapport à ses voisines des propriétés d'extrémalité. Une manière d'exprimer cette extrémalité est de dire que le nombre de paramètres et de termes que possède $\hat{f}$ est minimal pour la propriété de conservation du nombre potentiel de singularités (*i.e.*, répétons-le, le nombre de racines possible de l'équation $\hat{f}^{(1)}(x)=0$, où $\hat{f}^{(1)}$ désigne ici la « dérivée » de $\hat{f}$). Dans ce cas, $\hat{f}$ est telle qu'elle ne possède qu'une seule singularité apparente $\hat{x}$, alors que dans le voisinage de $\hat{f}$ peuvent figurer des f' possédant plusieurs singularités issues de la singularité originelle.

Un cas typique est celui de la fonction $\hat{f}$ de R dans R définie par $\hat{f}(x)=x^4/4$. Elle possède à l'origine une singularité d'ordre 3, 0 est en effet racine triple de la dérivée $\hat{f}^{(1)}(x)=x^3$. L'addition de termes supplémentaires comme ux^2+vx transforme $\hat{f}$ en $f'(x)=\hat{f}(x)+ux^2+vx$: $\hat{f}$ et f' ont même nombre de singularités potentielles. Pour des valeurs convenables de u et v, celles-ci peuvent se matérialiser comme il apparaît dans le schéma qui suit :



Toutes les singularités ponctuelles de la singularité fonctionnelle $\hat{f}$ étaient concentrées à l'origine. Sur cet exemple, on assiste au déploiement de cette singularité $s(\hat{x}=0, \hat{f}(\hat{x})=0)$ en la gerbe de maximale de singularités $(\hat{x}_1, f'(\hat{x}_1))$, $(\hat{x}_2, f'(\hat{x}_2))$, $(\hat{x}_3, f'(\hat{x}_3))$.

Par extension, on dit également que f' est un *déploiement* de $\hat{f}$.

Puisque, encore une fois, la détermination des singularités d'un objet permet de le reconnaître, le travail a été entrepris de trouver les singularités (fonctionnelles) des objets définis en tant qu'espaces d'applications. Ce travail de recherche et de classification a permis de mettre en évidence la structure stratifiée de ces espaces.

La description de l'objet en *strates* (fonctionnelles) dépend de la manière dont on définit la relation de voisinage entre $\hat{f}$ et f'. Il existe donc plusieurs modes possibles, par ailleurs assez proches les uns des autres, de stratification fonctionnelle.

Quoiqu'il en soit le schéma suivant est toujours valable : appelons strate fonctionnelle l'ensemble des applications qui admettent un déploiement (au sens précédent) de la singularité fonctionnelle $\hat{f}$. Toute strate admet un modèle $F(x)=\hat{f}(x)+\Sigma u_i g_i(x)$, appelé *déploiement universel* de $\hat{f}$: le nombre de paramètres u_i est alors minimal, tout élément h de la strate est défini par des valeurs particulières des u_i ne dépendant que du choix de h.

La connaissance du modèle associé à chaque strate va jouer un rôle essentiel dans de nombreuses applications.

1.5. *Troisième exemple mathématique : la singularité en dynamique*

Dans un monde à la Parménide[1], en perpétuel changement, l'immobile est singulier.

Supposons qu'un objet soit représenté par un vecteur $x=(x_1, \ldots, x_n)$ de variables d'état, dépendant de paramètres $a=(a_1, \ldots, a_r)$. La transformation de l'objet se traduit par celle de ses paramètres d'état, dont les vitesses d'évolution dx_i/dt sont supposées analytiquement données :

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x, a, t) \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{$*$}$$

L'objet est dans un état singulier lorsqu'il n'évolue pas, *i.e.* $dx_i/dt=0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Les états singuliers sont donc analytiquement définis comme les zéros des $f_i(x, a, t)$ pour $i=1, 2, \ldots, n$ et t quelconque. Les $\hat{x}$ correspondants sont les *points singuliers* du système différentiel ($*$).

Remarquons ici que, par l'assimilation standard d'une dérivée à une vitesse, les définitions des points singuliers rencontrées dans le premier paragraphe et dans celui-ci coïncident.

La notion de point singulier s'étend de manière naturelle en celle d'un ensemble de points invariant au cours du temps, et que l'on appelle parfois un *attracteur*. Il représente en quelque sorte la finalité de l'évolution.

Par exemple une trajectoire est un ensemble globalement invariant : l'évolué de tout point de l'ensemble est encore un point de l'ensemble. Celui-ci n'est pas forcément un attracteur. Il faut en plus pour cela qu'au voisinage de cette trajectoire émergent ou viennent mourir d'autres trajectoires.

1. « Car tout, de même que la pensée, trouve en tout temps, le mélange de ses organes errants... ».

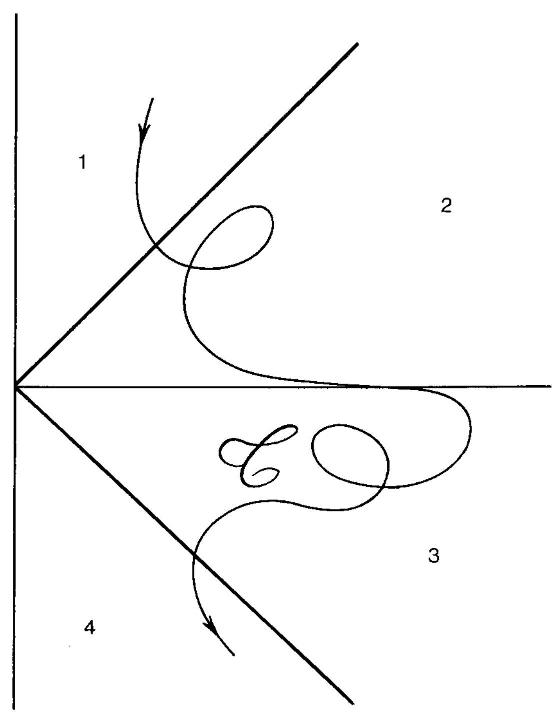
2. Prolongement dynamique de la notion de singularité : la notion de bifurcation

2.1. *Définition générale*

La bifurcation décrit un changement immédiat de forme, d'état ou de comportement entraîné par la variation de paramètres distincts des variables d'état. Nouveauté de la forme, de l'état, du comportement : la bifurcation mathématique est une approche permettant de comprendre la genèse et la fin des choses.

2.2. *Exemples mathématiques élémentaires*

2.2.1. *Exemple géométrique :* reprenons ici l'exemple présenté en 1.1.2. Considérons dans l'espace à trois dimensions un objet dont le contour apparent C supposé plan est défini par une équation de la forme $ax^2+by^2=1$, où a est un réel positif, b un réel quelconque. Appelons le plan (a, b) le *plan des variables de forme, de contrôle ou de bifurcation.*



Dans le domaine (1), les objets sont du type EV (ellipses allongées verticalement); dans le domaine (2), les objets sont du type EH (ellipses allongées horizontalement); dans le domaine (3) [resp. (4)], les objets sont du type HO (hyperboles « ouvertes ») [resp. HF (hyperboles fermées)]. Supposons qu'on

déplace l'objet de sorte qu'au cours du temps, a et b se modifient. Dessinons dans le plan (a, b) la trajectoire $\mathscr{T}(a(t), b(t))$ de ce couple de paramètres de forme associés à l'objet. La forme persiste quand le point $P(t)=(a(t), b(t))$ est à l'intérieur de chacun des domaines que l'on vient de spécifier. Lorsque P franchit la demi-droite (1-2), l'apparence change brusquement : la forme, initialement étirée dans le sens vertical, devient soudain étirée dans le sens horizontal. La forme cercle, intermédiaire, n'est réalisée que ponctuellement : elle ne peut véritablement apparaître qu'exceptionnellement. Un phénomène analogue se produit lorsqu'on examine la transition (3-4). Dans ces deux transitions, on remarquera que la trajectoire est *transversale* aux demi-droites dites de bifurcation (1-2) et (3-4) : on entend par là qu'au point de croisement de la trajectoire avec une quelconque de ces demi-bissectrices, l'espace engendré par les vecteurs tangents à la trajectoire et à la demi-bissectrice a même dimension que l'espace (a, b).

Le passage de (2) à (3) est le plus spectaculaire : on passe d'une forme ellipse à une forme hyperbole. La transition (2-3) n'est pas moins étonnante puisqu'elle se compose de deux droites. Dans le cas présent, la trajectoire n'est pas transversale à la demi-droite de bifurcation (2-3), la forme transitoire persiste quelque temps avant de disparaître.

Les demi-droites où adviennent des bifurcations forment l'*ensemble de bifurcation* : leur mesure (celle de l'aire du domaine qu'elles forment) est nulle dans l'espace des variables de bifurcation.

2.2.2. *Exemple analytique :* On reprend l'exemple présenté en 1.4. Soit un objet dont l'état est régi par une fonction d'énergie de la forme $f(x)=x^4/4+ux^2/2+vx$. x est la variable d'état, u et v sont les variables de bifurcation. Au cours du temps, u et v évoluent, et on suppose donnée la trajectoire $\mathscr{T}$ du point $P(t)=(u(t), v(t))$ dans le plan (u, v).

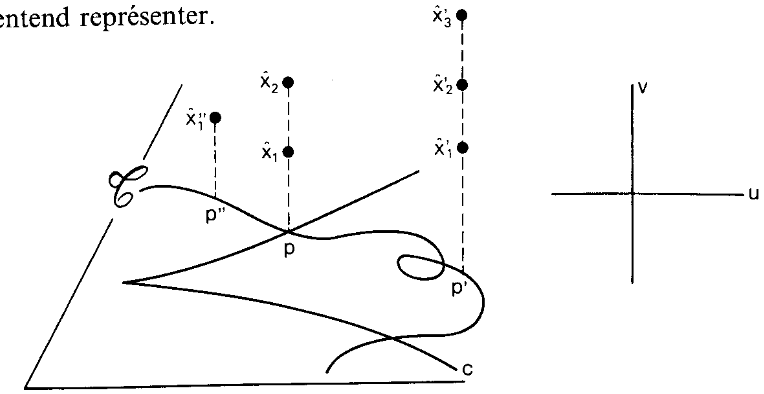
Les états observables correspondent aux extrémums de cette énergie. Ils correspondent donc aux racines de l'équation $f^{(1)}(x)=x^3+ux+v=0$. Nous avons à discuter, selon les valeurs de u et de v, du nombre de racines d'une équation.

Une racine est double lorsque $f^{(2)}(x)=3x^2+u=0$, c'est-à-dire, après élimination de x entre les équations $f^{(1)}=0$ et $f^{(2)}=0$, $4u^3+27v^2=0$.

Dans le plan (u, v), espace des paramètres de bifurcation, traçons la parabole semi-cubique C d'équation $4u^3+27v^2=0$. Elle sépare le plan en deux domaines disjoints : lorsque P est dans le domaine (1), $f^{(1)}$ n'a qu'un zéro : f n'a donc qu'une seule singularité, il n'existe qu'un seul état observable. Lorsque P atteint la parabole semi-cubique, le nombre de solutions de l'équation $f^{(1)}=0$ passe à 2 : deux états sont *a priori* possibles, il y a possibilité de saut rapide de la valeur de la solution $\hat{x}_1$ à la valeur de la solution $\hat{x}_2$. Lorsque P franchit transversalement C, et arrive dans le domaine (3), $f^{(1)}$

admet trois solutions réelles correspondants à trois états *a priori* réalisables.

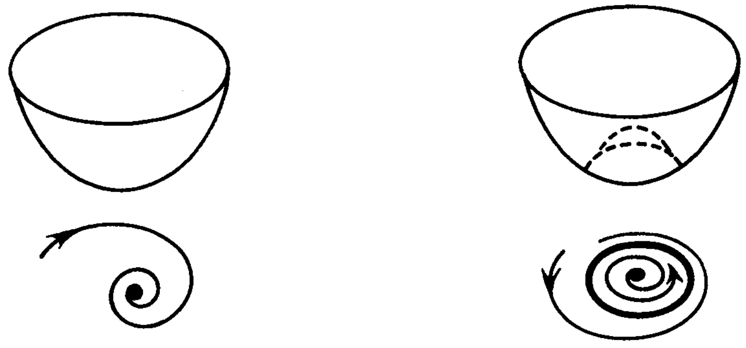
C est appelé l'ensemble de bifurcation associé à f, et au phénomène que celui-ci entend représenter.



Dans le cas présent, f est un déploiement universel au sens de la théorie de Thom-Mather, de la singularité $\hat{f}=x^4/4$. Comme nous l'indiquerons plus loin, des raisons d'ordre physique peuvent conduire à établir d'autres formulations du déploiement de cette singularité. La modélisation est toujours fonction du problème à étudier.

2.2.3. *Exemple dynamique* : Comme tout système dynamique plan est somme d'un système gradient et d'un système hamiltonien (Bruter-Roels), on peut réaliser toutes les dynamiques du plan en considérant des écoulements de fluides incompressibles sur des surfaces géographiques, éventuellement animées de mouvements de rotation. Les trajectoires correspondent aux lignes d'écoulement du fluide.

Supposons alors donnée une coupelle déformable, en rotation autour de son axe de symétrie, et dont une section verticale passant par l'axe de symétrie est une portion convenable du graphe des fonctions f considérées en 1.4. Par projection sur le plan sur lequel repose la coupelle, les trajectoires d'un fluide s'écoulant sur les parois de la coupelle peuvent être les suivantes :



1 2

Dans la situation 2, la trajectoire fermée autour de laquelle viennent s'enrouler les autres trajectoires s'appelle un *cycle*. Cette trajectoire fermée est associée à une évolution périodique du genre $x_1 = a\cos wt$, $x_2 = b\sin wt$. Le passage de 1 à 2 s'appelle la bifurcation de Poincaré-Hopf.

Un modèle mathématique du fonctionnement de l'oscillateur électronique du type push-pull a été proposé dans les années vingt par Van der Pol. L'étude de ce modèle dynamique (Van der Pol, Elie et Henri Cartan) et de son extension par Liénard montre l'existence d'une bifurcation de Poincaré-Hopf. Tant qu'on reste en deçà de certaines valeurs des coefficients évaluant une résistance, une capacité, une self-induction, le système électrique ne connaît pas d'oscillation : un point singulier représente son état électrique (tension, intensité). Au-delà de ces valeurs critiques, tension et intensité varient de manière périodique, un cycle représente leur évolution.

Dans les études de bifurcation en dynamique, en se plaçant au voisinage d'un point singulier tel qu'il a été défini en 1.5, on considère l'approximation linéaire du système à étudier. Si $dx_i/dt=f_i(x, a)$ $(i=1, \ldots, n)$ admet 0 pour point singulier (pour tout i, $f_i(0, a)=0$), alors on examine les propriétés du système linéaire $dy_i/dt=f_i^{(1)}(0, a).y$ $(i=1, \ldots, n)$, où $f_i^{(1)}(0, a)$ est la valeur en 0 de la forme linéaire des dérivées partielles premières de f_i par rapport aux composantes de x. Écrivons ce système sous la forme $dy/dt=\mathrm{M}(a).y$.

A la manière de ce que nous avons vu en 1.4, ce système linéaire dépendant de a, présentera une singularité pour la valeur a_c lorsque, par simple changement éventuel de repère, $\mathrm{M}(a)$ devenant alors $\mathrm{M}'(a)$, on pourra écrire le système sous une forme telle que l'une au moins des équations $dy_i/dt=m_i'(a_c.y)$ soit nulle : pour la valeur de bifurcation a_c, le rang de $\mathrm{M}'(a)$ baisse au moins d'une unité, fait qui a son pendant sur les racines d'un polynôme attaché à $\mathrm{M}(a)$ et qu'on appelle son polynôme caractéristique.

Nous retiendrons encore ici le fait qu'un système dynamique présente un caractère singulier lorsque se produit une dégénérescence interne : pour la valeur critique ou de bifurcation a_c, le système perd au moins une variable d'état significative.

2.3. *Les deux propriétés principales d'une singularité de bifurcation*

Reprenons ici ce que nous avons observé :

2.3.1. Les bifurcations apparaissent pour des valeurs des variables de bifurcation formant des ensembles de mesure nulle dans l'espace des variables de bifurcation.

On n'observe pas des bifurcations à tout instant, mais quand on les observe, on s'en souvient!

2.3.2. Pour ces valeurs singulières, les objets mathématiques présentent des formes de dégénérescence.

Elles correspondent à des situations physiques parfaitement compréhensibles. Pour que la structure d'un objet puisse être modifiée, il faut qu'il passe au préalable par une phase où la structure initiale puisse être partiellement dissoute.

Cette phase ne peut être que transitoire, car l'objet perd des qualités de stabilité immédiate.

Il acquiert par contre des potentialités supplémentaires : une variable y_i devient momentanément muette, elle ne pèse d'aucun poids sur la structure de l'objet. Elle n'en est pas moins potentiellement présente, et peut retrouver un rôle structurel nouveau au sein d'une architecture différente.

On pressent ici l'existence d'un invariant global pour tout objet, liant trois concepts entéléchiques et dont un seul le premier, fait pour l'instant l'objet d'une quantification : l'énergie, les degrés de potentialité, les degrés de stabilité.

Si, durant la phase de stabilisation, un agent extérieur ou endogène pèse davantage que les autres sur l'évolution du système, cet agent va conduire rapidement cette évolution vers une nouvelle structure qui peut être beaucoup plus stable, et mathématiquement représentée par un nouvel attracteur de la dynamique du système.

3. Applications des notions précédentes

3.1. *Remarques préalables sur les modèles*

Ne pas prendre la formule pour le fait [1], le modèle, toujours approché, pour la réalité. C'est dans le domaine de l'insaisissable, où tout paraît homogène, celui des ondes électromagnétiques, que le modèle mathématique est adapté de manière presque idéale à la description de la réalité physique. Dès qu'on s'éloigne de ce domaine merveilleux, le corpusculaire apparaît, de moins en moins homogène au fur et à mesure que l'on s'élève dans l'échelle de l'évolution. Dans le même temps, les interactions deviennent de moins en moins uniformes, de types de plus en plus divers. La modélisation devient de moins en moins aisée, de plus en plus métaphorique, tronquant à grands coups de hâche formulatoire dans la réalité.

1. *Cf.* C. P. BRUTER, les Architectures du Feu (*Considérations sur les modèles*, Flammarion, Paris, 1982, chapitre 2).

Ceux qui accordent un crédit trop grand aux modèles, par ailleurs indispensables, font preuve soit d'un réel aveuglement, soit, cela arrive malheureusement, d'hypocrisie et de malhonnêteté intellectuelle. Les études sur la stabilité numérique montrent assez combien nombre de modèles paradigmatiques ont un caractère de réalité illusoire. Ils éclairent plutôt l'esprit sur les démarches possibles de la nature qu'ils ne la suivent dans sa marche exacte.

Nous allons considérer maintenant les deux types de modèles auxquels on fait appel : du fait du caractère statique des premiers, il n'est pas raisonnable d'en tirer des conclusions philosophiques réellement pertinentes; les seconds, dynamiques, sont, dans leur conception, *a priori* plus proches de la réalité que les premiers.

3.2. *Les différents types de modèles statiques*

3.2.1. *Principe :* Dans ces modèles, les y observés dépendent des variables d'état x, et de paramètres (de contrôle ou de bifurcation) a : $y=f(x, a)$. Plus encore que l'influence de x sur y, on étudie les différentes issues possibles de y lorsque varient a ou f, en un point singulier de f [dans la théorie, on le place à l'origine et on suppose même $f(0)=0$]. Comme on l'a vu en 1.4, en examinant le déploiement universel classique de $x^4/4$, on peut interpréter si on le souhaite, l'effet de la variation de a sur la valeur de f, comme la transformation de f en une autre fonction $f'=f_a$, telle que $f'(x)=f_a(x)=f(x, a)$.

Voici les cinq types de déploiement d'une singularité fonctionnelle actuellement utilisés à ce jour, selon les problèmes étudiés. A chaque type de déploiement correspond un type d'ensemble de bifurcation. On nomme le type de déploiement par l'intermédiaire du type de son ensemble de bifurcation :

(i) *Bifurcation simple* (selon l'appelation de J. Damon) : le type de bifurcation ici considéré, le premier du point de vue historique, est celui étudié dans la théorie de Whitney-Thom-Mather.

(ii) *Bifurcation avec uni-imperfection :* cette théorie a été développée par Wasserman et Golubitski.

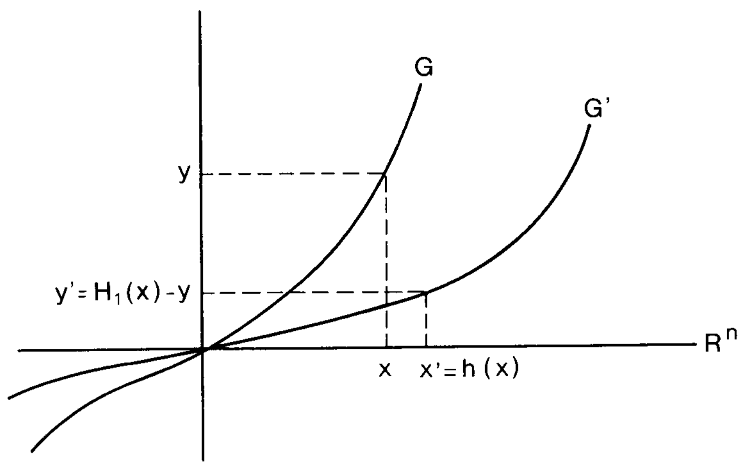
(iii) *Bifurcation séquentielle :* introduite par Dangelmayr et Stewart, cette théorie étend la précédente en tenant compte du fait que la mesure sur la composante d'observation y_k dépend également des valeurs des y_i où i est inférieur à $k+1$.

(iv) *Bifurcation avec multi-imperfection :* c'est encore une extension de la théorie (ii) où l'on distingue non plus une seule mais plusieurs variables-paramètres.

(v) *Bifurcation équivariante :* on reprend l'une des théories précédentes, en supposant les variables d'état invariantes sous l'action d'un groupe de symétrie, une situation très commune en physique. Les premiers travaux ont été faits par L. Michel et M. Golubitski.

Donnons ici, simplement dans les cas fondamentaux (i) et (ii), la donnée de base permettant de définir les déploiements, à savoir la manière dont on passe du graphe G d'une application $f: \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^p$ [telle que par exemple $f(0)=0$] à un graphe G′ voisin de G, donc associé à une application f' voisine de f.

Cas (i) : Supposons que G est le résultat graphique d'une expérience conduisant, pour la donnée de x, à la mesure de y. On répète l'expérience peu de temps après la précédente. Le phénomène étant stable, mais difficile à répéter exactement égal à lui-même, pour la donnée x' voisine de x, $x'=h(x)$, on mesure $y'=g(y)$: h et g sont des déformations indéfiniment différentiables (des difféomorphismes), de sorte que la difféomorphisme global H qui opère sur $\mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^p$ et envoie G sur G′ ($\mathrm{G}'=\mathrm{H}(\mathrm{G})$) se décompose ainsi : si (x, y) est un élément de G, alors $(x'=h(x), y'=g(y)=\mathrm{H}_1(x).y)$ en est l'image dans G′. $\mathrm{H}_1(x)$ est une matrice de format $p \times p$, inversible à l'origine, dont les coefficients sont des fonctions différentiables sur R^n (H est appelée une transformation de contact).



Cas (ii) : Dans le cas où il y a bifurcation avec imperfection, on suppose que la mesure dépend principalement d'un seul paramètre extérieur, a. Lorsqu'on refait la mesure, (x, a) devient $(x', a')=(h_1(x, a), h_2(a))$ où h_1 et h_2 sont deux difféomorphismes. L'image par H de l'élément (x, a, y) de G est $\mathrm{H}(x, a, y)=(x'=h_1(x, a), a'=h_2(a), y'=\mathrm{H}_1(x, a).y)$ de G′.

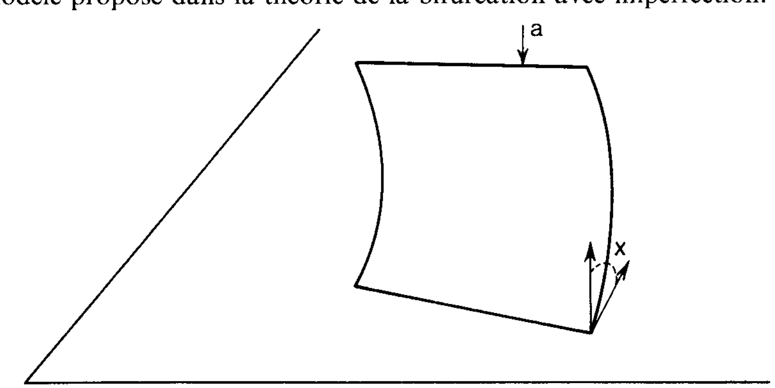
3.2.2. *Applications de la théorie de la bifurcation simple, ou théorie des catastrophes*

Physique : les domaines concernés sont principalement l'optique, la mécanique, les transitions de phase, l'hydrodynamique. On pourra consulter les ouvrages de Zeeman [10], Poston-Stewart [7]. Pour aller au-delà, en optique par exemple il convient de lire le traité d'Arnold, Gusein-Zade et Varchenko [1], de regarder par ailleurs les travaux de M. Berry; en hydrodynamique, on pourra lire par exemple l'exposé de Shirer et Wells [8].

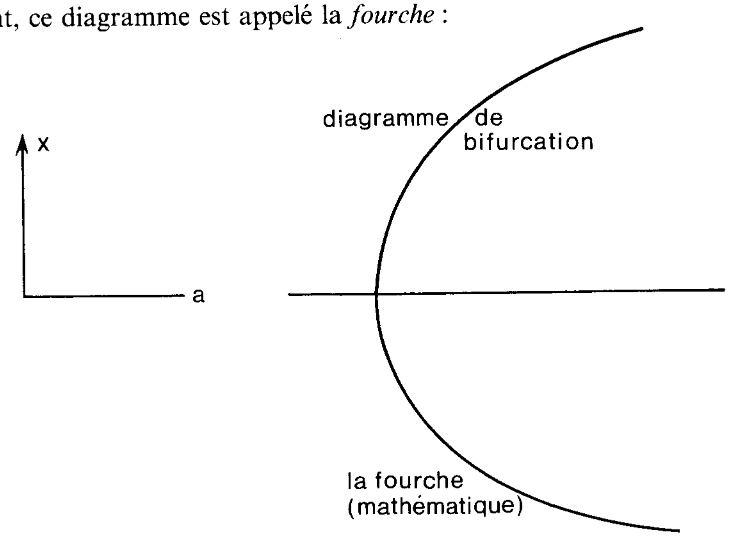
Biologie : embryologie (Thom, Zeeman, Bruter), mouvements du volvox et modifications structurelle du phytochrome (Bruter), radiologie (Kergosien), fibrinolyse (Duport), membranes cellulaires (Viret).

Études des comportements sociaux et individuels (Bruter, Zeeman) : comportements bi-modaux, effets des drogues, empreinte, accoutumance-désaccoutumance, apprentissage, décision et comportement du marché. *Linguistique* (Thom, Bruter) : classification des verbes, phénomène de l'ambiguïté.

3.2.3. *Applications de la théorie de la bifurcation avec imperfection :* Donnons l'application de base, celui du flambage d'une poutre, ou encore l'exemple d'un rectangle en carton que l'on fixe verticalement sur la table le long d'un des côtés de plus petite longueur. On exerce avec le doigt une force a sur le bord opposé au bord fixé, et l'on étudie les positions d'équilibre du carton. Pour cela, on calcule la fonction d'énergie potentielle de ce système mécanique. Les positions d'équilibre sont des extrémums de ce potentiel, par conséquent des zéros de la dérivée de cette fonction par rapport à la variable d'état x qui mesure l'inclinaison du bord du carton par rapport à la verticale. Manifestement dans cet exemple, le passage de (x, a) à (x', a') se fait selon le modèle proposé dans la théorie de la bifurcation avec imperfection.



Autour de son point singulier, la fonction dérivée est équivalente (dans le sens pris dans cette théorie) à un déploiement $\mathrm{F}(x, a)=x^3-(a-1)x$ de la fonction x^3, de sorte qu'il y a, localement, correspondance biunivoque entre les zéros de F et ceux de la fonction dérivée. Les zéros de F forment dans la variété (espace des variables d'état) × (espace des variables de bifurcation), ici le plan (x, a), une figure appelée *diagramme de bifurcation.* Dans le cas présent, ce diagramme est appelé la *fourche* :



Si a est inférieur à 1/2, on a qu'une seule position d'équilibre. Si a est supérieur à 1/2, il en existe trois *a priori.* Dans ce dernier cas, une étude complémentaire de stabilité élimine la solution $x=0$.

Dans cet exemple, R est l'ensemble des valeurs possibles du paramètre de bifurcation, et le point $a_c = 1/2$ constitue à lui seul l'ensemble de bifurcation.

3.3. *Applications à l'étude des modèles dynamiques*

L'étude mathématique de la bifurcation a été faite pour de nombreuses classes de systèmes dynamiques : pour les systèmes gradients (la vitesse en tout point est donnée par le gradient d'un potentiel global), la théorie de leur bifurcation se confond avec celle des catastrophes élémentaires, pour les systèmes dits de Morse-Smale, pour certains systèmes purement conservatifs, pour les systèmes dynamiques plans. L'étude de la bifurcation de Poincaré-Hopf a été menée en toute dimension.

Du point de vue pratique, étant donné un système différentiel, on étudie localement son comportement au voisinage de ses points singuliers. Dans la plupart des cas examinés jusqu'ici, au voisinage d'un point singulier $(\hat{x}, \hat{a})$ du système $dx/dt = f(x, a)$, l'étude locale se fait par l'intermédiaire de la partie linéaire du système proposé, $dy/dt = M(a).y$, où $M(a)$ est une matrice de format $n \times n$ par exemple.

Qu'advient-il au voisinage de $\hat{a}$, alors que $\hat{a}$ est perturbé en $\hat{a}'$? Si le rang de $M(\hat{a}')$ reste égal à celui de $M(\hat{a})$, alors par le théorème des fonctions implicites, le point singulier $(\hat{x}, \hat{a})$ se transporte en un autre point singulier $(\hat{x}', \hat{a}')$. Supposons au contraire que le rang baisse de une unité, passe par exemple de n à $n-1$. Alors $(\hat{x}, \hat{a})$ peut donner naissance à plusieurs points singuliers $(\hat{x}_i', \hat{a}_i')$. Par la procédure de Liapounov-Schmidt, on peut associer au système linéaire une fonction $g(x, a) = 0$ dont on peut obtenir le déploiement au voisinage de $(\hat{x}, \hat{a})$. Le nombre de solutions locales donne le nombre de points singuliers possibles, dont on peut par ailleurs étudier la stabilité. J'ai appliqué ce type de modèle à l'étude du phénomène de l'inflation pour montrer que celle-ci pouvait, sous les hypothèses (raisonnables) faites, être parfaitement contrôlée [4].

On peut employer le même genre de démarche pour étudier la bifurcation de Hopf. L'étude de la cinétique des systèmes chimiques et biochimiques, l'étude des comportements oscillants si fréquents en hydrodynamique sont parmi les principales applications actuelles de ces théories [6].

4. Conclusion

La théorie des singularités, celle de leur variation en fonction du comportement de paramètres extérieurs, est avant tout une théorie de caractère géométrique, même si elle fait abondamment appel à des traductions algébriques ou analytiques locales.

L'étendue de son applicabilité est *a priori* immense, et ne dépend que de notre capacité à formuler correctement les problèmes, ce qui est rarement le cas : les formulations sont la plupart du temps insuffisamment précises. Elles n'en reflètent pas moins très souvent les grands traits du comportement qualitatif réel, car manifestement ces traits présentent une sorte d'inertie, de stabilité que l'on a encore du mal à exprimer et à hiérarchiser.

L'étude indispensable des formes au voisinage des singularités, et qui fait l'objet des travaux très actifs des géomètres algébristes, n'est évidemment qu'un ingrédient, au même titre que certains travaux d'arithmétique, dans l'étude complète des systèmes dynamiques, dont on n'est pas certain, par ailleurs, que nos définitions diverses de la stabilité soient toujours les plus adaptées à la description réaliste des phénomènes.

Mais, même dans leur état d'imperfection actuelle, les théories mathématiques permettent d'entrevoir l'existence de modèles suggérant des voies de réponse possible à de grands problèmes en suspens, comme par exemple celui de l'évolution et même de la création des espèces. C'est par quelques remarques sur ce thème que je conluerai cet article. Et il est probable que ce qui vaut pour les espèces animales n'est pas très loin de ce qui vaut pour les espèces sociales.

La soudaineté de l'apparition d'espèces animales nouvelles de dispositifs physiologiques apparemment entièrement inconnus jusqu'alors, l'absence totale de formes transitoires, l'étrangeté des métamorphoses, sont quelques-uns des problèmes que les théories classiques de l'évolution restent incapables d'expliquer. L'ouvrage de Denton [5] sur ce sujet fait de manière remarquable le point sur les questions à résoudre – encore qu'il exprime parfois des opinions trop tranchées pour être entièrement exactes et qui faussent le débat, comme celle-ci : « La biologie entière d'un organisme, l'ensemble de ses traits anatomiques, sont fondamentalement réductrices à ses protéines constitutives »! Où est l'architecture dynamique de l'être vivant?

La théorie des systèmes dynamiques offre un début d'intelligence de ces phénomènes d'évolution, au moins sur le plan des principes directeurs.

En premier lieu, il est clair, au moins pour un nombre croissant de chercheurs, qu'une vue locale des mécanismes physiologiques ne permet en aucune façon de comprendre leur genèse, ni même parfois leur fonctionnement, d'où certaines erreurs et aberrations médicales douloureuses... L'être vivant est une totalité qui évolue au sein d'une totalité plus vaste. L'ensemble forme un énorme système dynamique dont les attracteurs symbolisent la nature et le comportement des états des constituants des objets, et qui sait conserver une mémoire du passé dont l'influence sur le présent n'est pas assez prise en compte.

Les interrelations introduisent des couplages entre ce qui peut parfois être considéré localement comme des variables d'état et des paramètres de bifurcation. Le phénomène de la pléiotropie, un traumatisme effectué sur un gène a des conséquences sur des parties de l'être vivant qui paraissent indépendantes du gène touché, constitue une preuve supplémentaire de l'existence de cet entrelacs d'interrelations. L'évolution des paramètres de bifurcation guide partiellement au moins celle des variables d'état. Lorsque des bifurcations se produisent, d'énormes pans d'attracteurs peuvent soudain s'effondrer, entraînant de multiples restructurations, tant sur les plans morphologiques, physiologiques et fonctionnels. Comme on l'a vu, ces périodes de restructuration ont un caractère transitoire très marqué. La métamorphose est typique à cet égard. Ces lignes avaient déjà écrites avant que je ne tombe sur celles-ci, de Denton : « Le premier stade de la métamorphose, qui succède rapidement à la formation de la chrysalide, équivaut pratiquement à la dissolution de tous les systèmes organiques de la larve en une véritable soupe de cellules et de tissus fragmentés. Cette phase de dissolution est rapidement suivie par une phase d'assemblage durant laquelle les systèmes organiques

– musculaires, nerveux et digestifs – de l'insecte adulte sont élaborés à partir de cellules embryonnaires spéciales... ».

Les structures intermédiaires, peu stables, aux potentialités élevées comme nous l'avons vu, ne pouvaient guère, la plupart du temps, laisser de trace significative. Pour résister aux épreuves de la variation possible du milieu (températures, pressions, degrés hygrométriques), à celles des cataclysmes naturels, voire des simples intempéries, aux dangers et aux coups des prédateurs multiples, un minimum de stabilité est évidemment nécessaire. Un même phylum peut, quand certaines conditions sont réunies, bifurquer en plusieurs embranchements, dont les caractères d'adaptation à l'environnement, les réalisations fonctionnelles internes (par exemple la composition de l'hémoglobine) peuvent être radicalement différentes. Sur le plan conceptuel, il n'y a, là, rien de surprenant.

L'évolution écologique de notre planète suscite bien des craintes. Je les partage certes, mais de manière ambiguë, je les envisage aussi avec intérêt : il pourrait en résulter, ne peu de temps, au moins quelques bouleversements des morphologies sociales et économiques. Si nous n'avions ni imprimerie, ni film, ni cassette diverse, l'histoire future n'aurait jamais accès à la connaissance détaillée de cette période. L'évolution de la composition de notre atmosphère aura été le fait de deux centaines d'années. Peut-être en résultera-t-il des effets biologiques. Nous n'avons pas les moyens, au moins aujourd'hui, de connaître ni même de déceler un changement d'environnement accompli pendant 200 ans, des centaines de millions d'années en arrière. Il se pourrait donc que la reconstitution des transformations qui, dans le passé, ont affecté le monde vivant, soit un rêve inaccessible. Cette possibilité n'affecte en rien la validité du schéma conceptuel offert par la théorie. Je parie même qu'un jour viendra où l'homme sera capable de le mettre en œuvre, dans le domaine de la vie, sur le plan expérimental. Souhaitons, sans hélas beaucoup d'illusion, que ce soit pour le bien de ce qui sera alors le vivant.

Bibliographie

[1] V. I. ARNOLD, S. M. GUSEIN-ZADE et A. N. VARCHENKO, *Singularities of Differentiable Maps*, 2 vol., Birkhäuser, Boston, 1988.

[2] C. P. BRUTER, *Topologie et Perception*, 3 vol., Maloine, Paris, 1974, 1976, 1985 (2 éd.), 1986.

[3] C. P. BRUTER, Quelques hypothèses inspirées par les observations du Docteur COULY, *Actes 2e Séminaire de l'École de Biologie théorique*, Pub. Univ. Rouen, 198, p. 355-359.

[4] C. P. BRUTER, Inflation et Théorie des Singularités, *Économie Appliquée*, XL, n° 3, 1987, p. 565-579.

[5] M. DENTON, *Évolution, une théorie en crise*, Londres, Paris, 1988.

[6] M. GOLUBITSKY et D. SCHAEFFER, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, vol. 1, Springer-Verlag, New York, 1985. M. GOLUBITSKY, D. SCHAEFFER et I. STEWART, vol. 2, 1988.

[7] T. POSTON et I. STEWART, *Catastrophe Theory and its Applications*, Pitman, London, 1978.

[8] H. SHIRER et R. WELLS, *Mathematical Structure of the Singularities at the Transitions between Steady States in Hydrodynamic Systems Lecture Notes in Physics*, 185, Sringer-Verlag, Berlin, 1983.

[9] R. THOM, *Stabilité structurelle et morphogénèse*, Ediscence, Paris, 1972.

[10] E. C. ZEEMAN, *Catastrophe Theory*, Addison-Wesley, London, 1977.