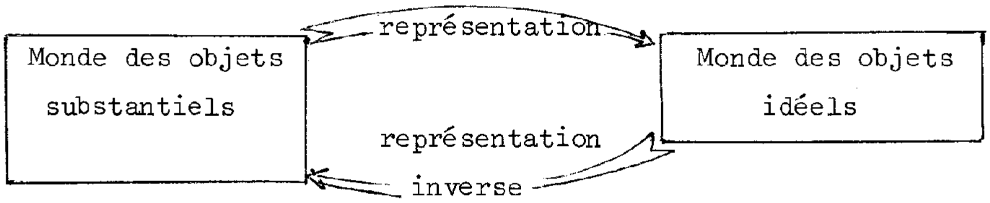
SUR LA REALITE DES ENTITES MATHEMATIQUES

1 - Dualité entre le monde des objets substantiels et le monde des objets idéels.

1.1 Les mathématiques que nous découvrons ont-elles une existence en dehors de notre pensée, ou bien sont-elles de purs produits de notre intellect ? En d'autres termes, existe-t-il un monde d'idées comme il existe un monde d'objets physiques, matériels, dont les atomes et les particules dotées de masse sont quelques-unes des pierres apparentes ?

En suivant Platon, ce maître prodigieux de la Philosophie, je répondrai par l'affirmative. Toute chose matérielle, substantielle admet en effet une représentation dans le monde des idées, représentation qu'on appelle, dans certains cas, l'essence de la chose.



Le rôle de notre pensée, de notre outil nerveux, est d'assurer l'équilibre, l'homéostasie de notre être situé au double contact, dans le double environnement, du monde substantiel et du monde idéel. L'homéostasie de l'individu, considéré comme plongé dans le monde substantiel, s'accomplit par l'intermédiaire des organes des sens ; ils nous permettent de déceler la présence d'objets, puis de découvrir leurs propriétés multiples. Après de nombreux codages , notre pensée transporte ces renseignements physiques dans le monde des idées, où se décantent les concepts, où finissent par surgir à notre vision mentale les propriétés communes aux objets du monde substantiel. Les propriétés intrinsèques étaient là, avant que nous y pensions, avant que, poussés par l'expérience sensible et par l'expérience mentale, nous songions à les chercher et à les exprimer, de même que les objets matériels, avec leur cortège de propriétés, ont une existence assurée avant que l'observation humaine et physique n'établisse la preuve de leur existence.

Tenir le monde des idées pour un royaume mythique, sans réalité, ne serait pas raisonnable. Lorsque nous agissons, nous devons tenir compte des obstacles matériels que nous rencontrons : nous sommes en quelque sorte assujettis à leur présence. De la même façon, une fois une valeur morale instaurée, un concept établi, ils exercent leur propre contrainte sur le comportement de chacun. On échappe difficilement à leur pouvoir.

1.2 Lorsque nos sens nous révèlent la présence d'un objet du monde physique, il n'y a aucune ambiguïté quant à son existence, celle-ci est tenue pour vraie. Par contre, un énoncé puisé dans le monde des idées peut n'être pas vrai. Que veut-on dire par là ? Certes, puisqu'il a été exprimé, cet énoncé existe, il a sa réalité propre, il est vrai en soi, de même que l'objet arbre est vrai en soi. En affirmant que l'énoncé est faux, on entend par là qu'il n'est pas l'image d'une réalité substantielle.

Notons qu'un énoncé vrai aujourd'hui peut se révéler faux demain, dans la mesure où l'approfondissement de la connaissance de la réalité substantielle modifie l'image que nous nous faisons de cette réalité.

Par ailleurs, notre pouvoir d'induction nous permet parfois de découvrir des idées dont nous ne trouvons pas, sur le champ, le pendant dans la réalité substantielle. Ceci ne prouve en rien la fausseté de ces idées.

Nous verrons plus loin quelques exemples tirés des mathématiques où l'on constatera que plusieurs siècles sont parfois nécessaires pour faire apparaître la correspondance entre l'idée et sa signification substantielle.

L'idée fausse, le jugement faux conduisent au comportement erroné, par suite fatal à l'individu, à l'espèce. Il est alors de notre devoir ou plutôt nécessaire pour le bien particulier et pour le bien général, d'éliminer les énoncés faux du monde des idées. On peut maintenant apporter quelques éléments de réponse à la question suivante : dans cette dualité entre le monde des objets substantiels et le monde des objets idéels, quel est l'équivalent substantiel de l'idée fausse ? La réponse est maintenant évidente. L'analogue matériel cherché est l'objet mal conçu, mal construit, mal réalisé, qui va s'écrouler au moment où la solidité qu'on lui attribuait devrait se révéler la plus nécessaire. Comme l'idée fausse, l'objet non fiable peut conduire un individu, une collectivité, à leur perte.

1.4 Est-il nécessaire de montrer que le monde des idées contient la totalité des entités mathématiques ? La réalité de celles-ci ne fait aucun doute pour bon nombre de mathématiciens. Tout mathématicien tend à devenir plus ou moins platonicien. Henri Cartan finit par déclarer, reprenant semble-t-il une formule de Poincaré, que "tout mathématicien sent plus ou moins confusément qu'il est à la recherche d'une réalité cachée qui refuse de se laisser dévoiler du premier jet" [4]. Il est curieux de constater que les mathématiciens adonnés à la théorie des nombres ont toujours été les plus chauds partisans de la réalité des objets mathématiques. La présence du nombre dans l'ordonnancement de l'Univers a toujours frappé les esprits. C'est à Pythagore sans doute, que l'on doit la première théorie systématique qui met en parallèle les propriétés des objets du monde substantiel avec celles des nombres. "Tout est arrangé selon le nombre" s'est exclamé Pythagore, fasciné par la richesse des analogies qu'il avait mis en évidence. Dans son Epinomis, Platon pose à son tour que les nombres sont le plus haut degré de la connaissance , que le nombre est la connaissance même [12] . Ce courant ésotérique n'a jamais cessé de vivre jusqu'à nos jours, porté, au cours des premiers siècles, par l'Ecole d'Alexandrie, puis, au Moyen Age, par le Kabbale. Les mathématiciens assez peu préoccupés de mettre en rapports les propriétés des objets du monde mathématique avec celles des objets du monde concret, ne sont pourtant pas en reste pour affirmer la réalité de l'univers dont ils cherchent à pénétrer les secrets. Hardy, spécialiste de la théorie des nombres, écrit : "les mathématiques, en revanche, me semblent être un roc sur lequel achoppe tout espèce d'idéalisme" [8]. Hermite, également spécialiste de la théorie des nombres, est plus explicite : "Mon cher ami, écrit-il à son collègue Stieljes, votre doctrine est la mienne ; je crois que les nombres et les fonctions de l'analyse ne sont pas le produit arbitraire de notre esprit ; je pense qu'ils existent en dehors de nous avec le même caractère de nécessité que les choses de la réalité objective, et que nous les rencontrons, les découvrons, ou les étudions, comme les physiciens, les chimistes, les zoologistes, etc...". [10]. Le fond de la pensée de Galois ne diffère pas de celui de la pensée d'Hermite : "Toute immatérielle qu'elle (est), l'analyse n'est pas plus en notre pouvoir que..."[7]. La fin de la phrase de Galois est illisible, la pensée n'en est pas moins claire. Elle rejoint celle du logicien Gödel pour qui "Les objets et les classes peuvent être conçus comme des objets réels, existant indépendamment de nos définitions et de nos constructions" (cité dans [2]).

L'étude du développement de l'univers des objets idéels, sa phylogénèse, ne semblent pas, jusqu'à présent, avoir fait l'objet de travaux très approfondis. Mais on peut apercevoir, à travers la manière selon laquelle progressent les idées mathématiques, comment la Nature procède pour faire évoluer le monde des objets idéels. L'observation joue un rôle important dans le cours de ce développement.

2 - <u>La mathématique est une science d'observation</u>

2.1 L'homme, par son système nerveux, par sa pensée, fait l'office de pont, de charnière entre le monde physique et le monde idéel. Par lui transitent et sont transmutés les uns dans les autres, les objets du monde physique et les objets du monde des idées.

Examinons l'attitude du savant qui exerce son activité dans le champ des sciences dites de la Nature. Son occupation première est d'observer les objets, les phénomènes, pour mettre en évidence des propriétés, des faits que ses collègues n'avaient pas encore notés. Mais, dans la manière de guider son observation, le savant est éminemment tributaire des conceptions et des suggestions qu'il puise dans le monde des idées, et donc, pour certaines d'entre elles, par la règle de représentation inverse, dans le monde substantiel.

Tournons-nous maintenant vers le savant adonné à la science des idéalités mathématiques. Il existe une sorte de dualité entre son attitude et celle du savant naturaliste. A la manière de ce dernier, le mathématicien observe des objets appartenant au monde mathématique, des exemples, des cas particuliers, des théories, et il cherche des propriétés que ses collègues n'ont pas encore entrevues. Et pareillement, dans sa démarche, il se laisse volontiers guider par les données et par les propriétés des objets du monde substantiel.

Notons ici la dissymétrie évidente entre les deux mondes, substantiel et idéel, dissymétrie analogue à celle que nous montre la neurophysiologie entre l'hémisphère cérébral gauche qui contient l'aire du langage, plus développée chez la femme que chez l'homme, et l'hémisphère cérébral droit , qui contient l'aire visuo-spatiale, géométrique,plus développée chez l'homme que chez la femme. Dans notre univers masculin, mais qui se féminise et s'équilibre, l'hémisphère substantiel apparent, spatial, est à l'origine plus développé que l'hémisphère idéel apparent, verbal, et en pleine expansion.

2.2 L'histoire semble montrer [2] que les premières idéalités mathématiques ont été conçues sous l'effet stimulant de l'observation des objets du monde matériel. Il faut, pour compter le nombre de ses amis ou de ses ennemis, le nombre de têtes de son troupeau, faire preuve d'attention, mettre en avant des qualités d'observation. Compter le nombre des années, déterminer les apogées des astres, des calendriers, se livrer à des travaux d'arpentage et d'architecture, toutes ces activités nécessitent la mise au point de notions et de techniques arithmétiques, géométriques, trigonométriques. Tous les problèmes liés au mouvement, "ce principe de vie" disait Léonard de Vinci, ont également joué un grand rôle dans le développement des mathématiques : astronomie, mécanique, optique, électricité, chaleur, biologie, ont posé des problèmes d'observation, de modélisation, de formalisation, et ont conduit à l'élaboration de concepts et d'énoncés mathématiques. D'ailleurs, avec beaucoup plus de difficultés aujourd'hui qu'autrefois, la plupart des grands mathématiciens n'ont jamais cessé de pratiquer des disciplines relevant des sciences de la Nature, dans lesquelles ils ont trouvé la motivation et l'inspiration à certains de leurs travaux mathématiques. Par exemple, Fermat et Descartes s'intéressèrent entre autres à l'optique, les Bernouilli, Newton, Clairault, Laplace, Lagrange, Gauss, Poincaré à la cinématique et à l'astronomie, Fourier à la propagation de la chaleur, Gauss, Riemann, Klein, Hadamard à l'électricité. Parmi les contemporains, et pour ne citer qu'eux, H. Cartan a contribué à fonder une école de spécialistes de la théorie du potentiel, L. Schwartz, par l'attention qu'il a accordé à l'électricité et à la mécanique quantique, a fondé la théorie des distributions. De façon générale, les mécaniques classiques, relativistes, quantiques continuent à influencer le développement de la théorie des groupes (travaux d'Elie Cartan), de la géométrie différentielle (travaux de Lichnerowicz), des systèmes dynamiques (école de Strasbourg). La résolution des équations mathématiques de la physique, de la chimie, sont à l'origine de très nombreux travaux en analyse mathématique (travaux de Leray), en théorie des systèmes dynamiques, en analyse numérique -qui n'a véritablement pris son envol qu'après l'apparition des ordinateurs. Il n'est pas jusqu'à la biologie qui n'ait fourni au moins des terminologies nouvelles, comme par exemple celle de déploiement, tirée de l'embryologie, et introduite par Thom en analyse différentielle.

Il est d'ailleurs instructif d'examiner le vocabulaire du mathématicien : "adhérence, anneau, anse, arête, arbre, arête, atlas, bassin, bord, boule, bouquet, brin, carte, chambre, champ, chemin , col, commutateur, couronne, déformation, étoile, fermeture, feuillet, fibre, image, immeuble, jet, lisse, montagne, noeud, orbite, permutation, potentiel, puits, réduction, représentation, sommet, source, squelette, stabilité, symétrie, tour, trajectoire, transformation, variété". Le liste est certainement incomplète. Tous ces noms sont empruntés au langage quotidien. Ils indiquent une analogie de comportement, de configuration entre le phénomène physique, et l'objet ou l'évènement mathématique. Ils témoignent également du souci du mathématicien de rattacher ses constructions au tangible.

2.3 Le rôle du mathématicien est de lever le voile derrière lequel se cachent certains objets du monde des idées. Il y parvient par un travail préliminaire d'observation. Observation des objets, du processus des mondes substantiel et idéel, pour en dégager des traits communs. Abstraire est cet acte mental qui, à la suite d'une observation attentive, érige une propriété observée sur un exemple déterminé, en une propriété universelle, démarche possible parce que, dans l'esprit de l'observateur et du mathématicien, s'enclenche un processus de comparaisons répétées qui présente un grand nombre d'objets de même nature, sur lesquels le savant, pratiquant en somme des expériences de vérification renouvelées, s'assure du caractère universel de la propriété qu'il a aperçue.

Certaines de ces propriétés, posées en observations premières, en axiomes, donnent un premier reflet du monde substantiel. Dans le monde des idées, la pensée reconstitue le monde des objets substantiels, elle les simule. Elle les reconstruit aussi, à sa façon, dans l'univers des idéalités mathématiques, sous l'angle qualitatif de l'implication des propriétés, selon un processus combinatoire et analogique.

Pour travailler, le mathématicien a donc besoin de forger dans son esprit une sorte d'imagerie mentale, consciente ou non, élaborée dans un premier temps à partir d'objets physiques, puis, dans un second temps, à partir d'objets scripturaux, et mentaux. Les objets de cette imagerie sont considérés comme des cas particuliers, ils portent le nom d'exemples, qu'ils soient de nature arithmétique, algébrique, géométrique, etc..., que ce soient même des théories déjà bien assises qu'un examen plus attentif peut faire apparaître comme éléments d'une théorie encore plus générale.

Par exemple, en remarquant que les complexes et les modules possédaient des propriétés communes, A. Whitney, en 1935, a bâti une théorie synthétique, la théorie des matroïdes ; ses applications vont de l'algèbre à la combinatoire. En étudiant, de façon systématique, les ensembles munis de structures, et les classes d'applications qui préservent ces structures, Eilenberg et Mac Lane, en 1945, ont fondé la théorie des catégories. Une autre théorie importante est celle des espaces fibrés ; une première extension de cette théorie a conduit à la théorie des faisceaux (Leray, Godement) ; lorsqu'on couple la théorie des catégories et la théorie des faisceaux, on aboutit à la théorie des toposes (Lawvere) dont les applications vont de la logique à la géométrie algébrique. Le point culminant dans cette ascendance vers l'universel, est atteint lorsqu'on parvient à proposer des métathéorèmes, des méta-conjectures dont les règles transcendent toutes les sciences. Il n'est pas sûr que l'intérêt de ces énoncés soient bien compris par tous les mathématiciens.

Que les mathématiques, contrairement à ce que pensent la plupart des profanes, soient également une science d'observation, est une remarque que certains mathématiciens avaient déjà faite. Peut-être est-elle trop évidente, trop aveuglante. Dans les discussions qui, à partir des années 70, opposèrent sur la réforme de l'enseignement, mathématiciens et physiciens, ces derniers maniaient avec beaucoup d'assurance l'argument selon lequel les sciences dont ils étaient les représentants , étaient des sciences d'observation, au contraire des mathématiques, science de l'abstraction. Il est curieux de constater que, jusqu'en 1973, aucun mathématicien ne releva le gant. Pourtant, rappelons-nous ce que disait Hermite : "(les mathématiques), nous les rencontrons, ou découvrons , ou étudions, comme les physiciens, les chimistes, les zoologistes, etc..." Hermite développe son point de vue dans un autre texte : "On peut néanmoins, à l'égard des procédés intellectuels propres aux géomètres, faire cette remarque fort simple que justifiera l'histoire même des sciences, c'est que l'observation y tient une place importante et y joue un grand rôle. Toutes les branches des mathématiques fournissent des preuves à cette assertion, mais je les choisirai de préférence dans l'une de celles que l'on regarde comme la plus abstraite, je veux parler de la théorie des nombres". [10] . Hardy, naturellement, confirme la remarque de Hermite : "J'ai, pour ma part, toujours considéré le mathématicien comme étant un <u>observateur</u>, un homme qui fixe son regard sur une chaîne de montagnes lointaines et note ses observations" [8] .

3 - <u>La Mathématique est science synthétique, locale, causale, inaltérable</u>

3.1 Arrêtons-nous un instant sur cette comparaison de Hermite qui assimile le mathématicien à une sorte de géographe dont l'attention se porte sur la découpe d'une chaîne de montagnes. Cette métaphore est l'occasion de rappeler le lien profond qui existe entre géo-graphie et géo-métrie : le dessin de la terre suppose d'une part la connaissance des formes variées que la terre peut prendre localement, et d'autre part celle des rapports métriques entre les accidents de ces formes. Cette connaissance revient à celle de la géométrie, la mesure de la terre. Cette équivalence entre géométrie et géographie pourrait être utilisée à des fins pédagogiques. Poincaré, dans son mémoire "Sur les courbes définies par des équations différentielles" l'a utilisée implicitement à des fins mathématiques. Cette métaphore permet d'illustrer également d'autres aspects de la nature des mathématiques.

D'abord la mathématique est une science synthétique : c'est bien toute la chaîne de montagnes que le mathématicien géographe aperçoit. Cette vue d'ensemble permet d'apercevoir les liens entre sommets, entre les différentes vallées : à travers ses nombreuses ramifications, la mathématique possède une profonde unité que les mathématiciens ne manquent jamais de rappeler et de souligner.

On peut également examiner le point de vue synthétique sous un autre angle. La science mathématique réunit dans un même corps conceptuel la description d'une très grande variété de phénomènes naturels. Les théories axiomatiques, par leur très grande généralité, par les conséquences multiples qu'elles portent en elles, permettent de donner une présentation ramassée de centaines et de milliers de cas particuliers, au premier abord très disparates .

Prenons par exemple la forme d'un parallélépipède : à deux dimensions, cette forme unique décrit celle d'une myriade de tables, à trois dimensions, cette forme représente celles de millions de barres en métal, ou de pièces d'habitation. Lorsqu'on parle d'un groupe, cette notion peut se rapporter aussi bien à des nombres, les entiers, les fractionnaires, etc..., qu'à des évènements, cinématiques et géométriques, les rotations, les translations, les déplacements.

3.2 La mathématique est aussi une science locale : le savant géographe consciencieux arrête son regard sur toutes les aspérités du paysage, et les décrit avec le plus grand soin, avec la plus grande luxuriance de détails. Pareillement, le mathématicien s'acharne à examiner les objets qu'il manipule sous tous les angles d'approche possibles, il cherche à faire apparaître toutes les particularités des reliefs, les relations que les lient et les caractérisent dans leurs secrets les plus cachés.

Prenons le cas très élémentaire de l'étude d'une courbe plane. Le mathématicien étudie le comportement de la courbe au voisinage de chacun de ses points, à l'aide des dérivées successives en ce point de la fonction qui définit la courbe. Le point considéré P est d'ordre 50 000 au moins, si les 50 000 premières dérivées en P existent et sont continues. Pour préciser davantage les propriétés de la courbe en ce point, le mathématicien doit vérifier l'existence ou la non-existence de la dérivée d'ordre 50 001 en P. De fait, un très grand nombre de travaux mathématiques portent sur des questions de propriétés locales, par exemple de forme ou de stabilité de forme au voisinage de points singuliers (sommets, cols, fonds de cuvettes) de sortes de paysages géographiques appelés variétés.

Les questions du passage des connaissances locales aux connaissances globales sont loin d'être toutes résolues. Ce problème important ne sera pas traité ici.

3.3 La mathématique apparaît également comme une science causale, puisque axiomes, vérités et observations premières mises à part, elle n'accepte pour valides que les seules propositions impliquées par les axiomes et leurs conséquences. Chaque proposition traduit un fait, et ce fait est cause partielle d'un autre fait, exprimé par l'énoncé d'une proposition nouvelle. Le mathématicien se doit de montrer au lecteur, à l'auditeur, la justesse de son observation. Le discours qu'il tient est appelé une démonstration. Une démonstration est un enchaînement causal de faits et d'énoncés, dont on privilégie le dernier, appelé lemme, corollaire, proposition ou théorème.

3.4 La mathématique est enfin une science inaltérable. Ses énoncés sont invariants par tout déplacement spatio-temporel, ils sont stables dans l'espace et au cours du temps, même s'ils tombent en désuétude faute d'usage, comme l'un des 10 000 théorèmes que Chasles aurait démontrés sur les coniques.

Il est utile à ce propos d'ouvrir une parenthèse sur la portée des mathématiques. Nous ne voyons pas toujours immédiatement la signification concrète des énoncés mathématiques. Celle-ci n'apparaît parfois que des siècles après que le mathématicien ait formulé ses propositions. Ainsi, il fallut attendre 1 800 années pour que les résultats des géomètres grecs sur les coniques trouvent, grâce à Képler, leur application. Les imaginaires ont été inventés par Cardan au 16e siècle, mais ce n'est qu'au 18e siècle qu'on a pu vraiment en faire usage en hydrodynamique. Moins d'un siècle cependant ont séparé les découvertes conceptuelles de Lobatchevsky, et leurs applications à la physique et à la cosmologie, et cela, en dépit des oppositions violentes qui se sont élevées à l'encontre des géométries non-euclidiennes -au rang des opposants, citons les philosophes Dühring et Renouvier, les logiciens, Morgan, Dodgson dit Lewis Carroll, Frege soi-même, les mathématiciens Buniakovski, Ostrogradski, voire dans une certaine mesure Cayley [15] .

Il est naturellement étonnant qu'un énoncé mathématique, vrai en soi, soit également, sans qu'on l'ait encore découverte, porteur d'une vérité substantielle, et suscite la recherche même de cette vérité. Les faits que je viens de citer constituent une sorte de preuve empirique, a posteriori, de l'existence et de la réalité de l'univers des objets idéels.

Un autre phénomène est encore plus stupéfiant : l'aptitude de notre pensée à suivre la démarche causale et cohérente, sa capacité à se dérouler de la même manière que les processus observés, ou dont l'existence est supposée. Pourquoi la qualité de justesse d'une démonstration, nous assure-t-elle de la valeur de l'énoncé qui coiffe cette démonstration ?

Un dernier aspect de la nature des mathématiques vaut d'être abordé : celui qui considère la mathématique comme la science de la forme et de la quantité.

4. La mathématique est la science de la forme et de la quantité

4.1 Ce point de vue n'est pas très neuf. Hegel, qui connaît bien Platon et Kant, écrit par exemple que "La matière dans laquelle la mathématique puise son trésor réjouissant de vérités, est l'espace et l'unité quantitative" [9] . Engels ne peut que reprendre ce point de vue : "La mathématique pure a pour objet les formes spatiales et les rapports quantitatifs du monde effectif" [6] .

Ainsi, grosso modo, la mathématique repose sur deux piliers : un pilier morphologique sur lequel est bâti la géométrie pure ; et un pilier quantitatif sur lequel prennent assise, l'arithmétique, la théorie des nombres. Les mathématiques les plus vivantes et les plus riches font constamment appel, de manière plus ou moins déguisée et immédiate, à chacune de ces deux disciplines-mères.

On peut tenter d'étudier les nombres sans référence à la géométrie, ou, au contraire, essayer d'examiner les propriétés de la forme en faisant abstraction de toute donnée métrique. Ces approches sont en elles-mêmes assez riches d'applications; cependant, le double examen morphologique et numérique que rassemble le seul terme de géométrique, permet souvent d'accéder à une plus grande efficacité dans le travail de recherche.

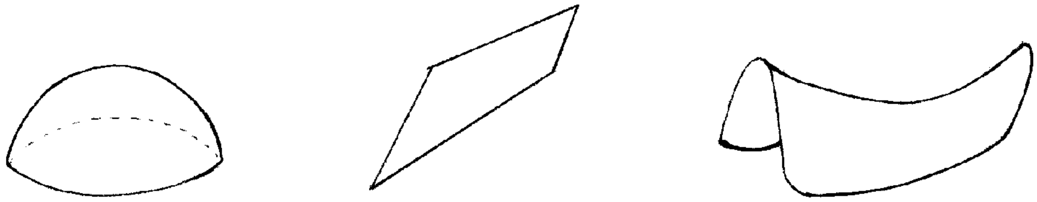
4.2 L'exemple que je prendrai sera emprunté à la théorie des nombres, appelée parfois la "Reine des Mathématiques". Les Grecs, pensaient que tout était proprotion. En un certain sens, je partage encore leur avis. Ils connaissaient les nombres entiers, et par le jeu des propositions, les nombres rationnels (de <u>ratio</u>, rapport). C'est la géométrie, le triangle rectangle, qui fit découvrir à Pythagore l'existence de nouveaux nombres, appelés les irrationnels. Il remarqua, qu'en général, la longueur de l'hypothénuse d'un triangle rectangle ne pouvait s'exprimer comme un nombre rationnel. $\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1^2}$ n'est égal au rapport d'aucun couple d'entiers ; ce nombre est vraiment irrationnel. On voit par là que la théorie des nombres -comme toute discipline mathématique- est fille autant de l'arithmétique, que de la géométrie et des autres branches des mathématiques.

Avant de quitter le nombre pour parler de la forme, rappelons que l'on dispose d'un procédé standard pour construire tous les nombres. L'existence de ce procédé a porté un coup fatal à cette affirmation* d'un mathématicien du 19e siècle, Kronecker : "Dieu a fait les nombres entiers, tout le reste est l'oeuvre de l'homme". La construction des entiers par les hommes est pourtant fort simple, et s'accomplit selon la méthode des extensions. On peut formuler cette méthode de la façon suivante [1] : soit O' un objet défini sur un ensemble E' et vérifiant les propriétés $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n, \ldots$ (par exemple $E' = \{0, 1\}$, O' désigne cet ensemble muni de l'opération + de sorte que $0 + 0 = 0$ $0 + 1 = 1 + 0 = 1$) ; trouver un objet O, défini sur un ensemble E, le plus petit possible, contenant E', vérifiant non seulement les propriétés P'_i mais encore des propriétés $P_1, P_2, \ldots P_m, \ldots$ (exemple : trouver l'objet O contenant l'objet O' précédent, de sorte que l'opération $1 + 1$ ait un sens dans O ; réponse : on construit $2 = 1 + 1$, on pose $E = E' \cup \{2\}$, on bâtit l'objet O dont on montre qu'il a toutes les propriétés exigées [3]). Une réflexion sérieuse serait nécessaire pour apprécier l'avantage de ce procédé par rapport à la méthode si féconde et si profonde des proportions.

4.3 Si la succession du nombre peut être comparée à celle du temps, la construction de la forme est liée à celle de l'espace. La science spatiale

* On pourrait la remplacer par celle-ci : "la Nature a créé les mathématiques, l'homme les révèle".

grecque, celles de Lobatchevsky, de Riemann, etaient géométriques, en ce sens que la forme était rigidifiée par un corset métrique. Dans ces géométries, la notion de plus court chemin entre deux points est définie. En chaque point de ce trajet, on peut mesurer la courbure K du trajet.



K > 0 Riemann — K = 0 Euclide — K < 0 Lobatchevsky

Lorsque l'on s'affranchit des contraintes métriques, on tombe alors sur l'étude de la manière selon laquelle on peut passer d'un point à un autre, et de la consistance du matériau avec lequel on construira les formes rigides. L'analysis situs, ce terme serait dû à Leibniz, l'étude des positions des points d'une forme, les uns par rapport aux autres, a été entreprise par Euler. Elle a conduit à la topo-logie moderne.

Le premier emploi du terme topologie figure sans doute dans un traité paru en 1847, dû au mathématicien allemand Listing ; l'ouvrage s'intitule "Vorstudien zur Topologie". La topologie moderne se ramifie en différentes branches que voici :

- la topologie générale, la plus connue : elle étudie les matériaux et parfois les moyens à l'aide desquels sont construits les objets.

- la topologie différentielle s'intéresse à la construction de ces objets, appelés pour un grand nombre d'entre eux variétés ; ces variétés peuvent être qualifiées de mille manières.

- la topologie algébrique s'occupe essentiellement de la classification de ces objets. On peut rattacher à la topologie, la géométrie algébrique dont l'objet principal est l'étude locale de la forme de certaines variétés. Je propose de qualifier de statiques ces différentes branches de la topologie. La connaissance de la topologique statique est un préalable nécessaire à la connaissance de la topologie dynamique, qui étudie les trajectoires des mouvements dans des espaces où, parfois, le temps lui-même est une donnée multi-dimensionnelle ; les "trajectoires" que 'l'on obtient sont alors appelées des feuilles. Notons à ce propos que, de même que dans la Nature, l'inanimé paraît antérieur à l'animé, de même, en mathématiques et dans toutes les autres sciences, l'étude des objets statiques a toujours précédé l'étude des situations en évolution. [2]

4.4 Une autre branche très importante des mathématiques est l'analyse. Je définirai l'analyse comme l'étude des propriétés locales et de la stabilité des représentations, terme que je préfère, pour des raisons physiques, à celui de fonction ou d'application. L'analyse étudie d'abord, et de manière très fine, les effets sur l'image d'une déformation des coordonnées du point source, ou bien des caractéristiques de la représentation. L'analyse essaye ensuite de voir dans quelle mesure elle peut rendre compte, par l'intermédiaire d'une forme unique, de la totalité des déformations locales soumises à des contraintes préétablies.

4.5 Examinons maintenant le statut de l'algèbre. L'algèbre, dans l'acception moderne de ce terme, traite d'ensembles munis de lois de composition. De façon plus générale, une structure algébrique apparaît en présence d'évènements reproductibles et répétitifs. Elle fige en un même moule des situations analogues que l'on rencontre.

Prenons les entiers, négatifs, nul, positifs. Ils se déduisent tous de l'entier 1 par répétition automatique, machinale, d'un processus de soustraction régulière, et d'addition régulière. Un homme-robot avance et recule d'un pas de longueur fixe. Telle est la situation type que codifie l'algèbre.

Une situation du même genre se retrouve dans l'étude des permutations cycliques, ou encore des rotations d'angle $2\pi/n$, n étant un entier fixé, c'est-à-dire, en définitive, dans l'étude des racines n-ièmes de l'unité : c'est en gros à leur propos que Galois a fondé la théorie des groupes, et de la sorte, la forme moderne de l'algèbre.

Cependant, des suites d'évènements réguliers et algébrisables apparaissent encore dans bien d'autres domaines : en arithmétique et en théorie des nombres bien sûr, en géométrie algébrique, dans l'étude des fonctions au voisinage d'une singularité, dans l'étude des recouvrements simpliciaux de la classification des variétés, dans l'étude des transformations locales définies par des champs de vecteurs, des actions de groupe, des formes différentielles. L'étudiant avancé pourra lire avec profit l'article de Mac Lane "Topology and Logic as a source of Algebra" [11].

L'outil algébrique a l'avantage de favoriser l'introduction de la rigueur et de la clarté. Mais on ne doit pas oublier qu'il n'est qu'un instrument, que l'usage permet de perfectionner. Le développement de l'Algèbre ne trouve pas sa source dans l'Algèbre seule, mais davantage dans toutes les autres branches des mathématiques, où cette algèbre rend d'incontestables services.

L'algèbre permet de caractériser des formes locales ou globales régulières. Les singularités, où prennent naissance les nouveautés morphologiques, sont ignorées -l'auteur n'ignore pas l'existence des nombres de Betti. L'algèbre actuelle présente donc un caractère statique. L'étude de l'enchaînement des structures lui donnerait un souffle de vie. Cette étude ne semble pas avoir encore retenu l'attention des mathématiciens. Mais peut-être l'algèbre dynamique doit-elle attendre pour naître que la topologie dynamique elle-même ait fait des progrès substantiels.

5. De la rigueur mathématique à la rigueur personnelle

Revenons maintenant sur la rigueur, un thème cher aux grands géomètres, comme par exemple Poincaré. Ces géomètres ont été reconnus comme de très grands mathématiciens pour avoir introduit des concepts féconds et profonds, pour avoir donné des théorèmes importants. Mais deviner l'existence et l'importance d'une notion nouvelle, la formuler de manière pertinente et en toute clarté, ne se fait pas sans difficulté. La notion est d'abord là, enfouie dans les profondeurs de l'inconscient ; il faut aider la nouveauté à émerger. Lorsqu'on la voit enfin apparaître, elle est encore enrobée d'une gangue de données parasites, d'une sorte d'enveloppe ombilicale, qui masque les relations causales nettes, éclatantes de pureté. Aussi tous les grands mathématiciens ont-ils dû parfois éprouver quelque impatience devant le travail de mise au net et de polissage qu'ils devaient accomplir, et, emportés par le fleuve de leur imagination créatrice, contraints par la nécessité d'accoucher des idées dont ils avaient la tête pleine, ont-ils été amenés à négliger quelque peu, dans un premier temps, la forme devant le fond, bien qu'en eux-mêmes, ils fussent entièrement convaincus de la nécessité de présenter des oeuvres belles, sans tâche, parfaites. Il n'est probablement pas de mathématicien, aussi grand soit-il, qui n'ait commis quelque faux pas, surtout en matière de démonstration. Les grands géomètres se passionnent moins pour la rigueur que pour la <u>signification</u> de l'énoncé nouveau, qui remue en profondeur la vision des mathématiques. Ils se heurtent bien sûr à cette fraction des mathématiciens qui compensent et masquent parfois le manque de fertilité de leur esprit par un attachement pathologique à la rigueur et au détail futile.

Que cela plaise ou non, l'algèbre est, dans son essence, davantage attachée à la rigueur indispensable qu'à la fécondité, et ce n'est pas dans le milieu des algébristes purs que se rencontrent les grands créateurs, mais davantage auprès des esprits géométriques. Une étude statistique portant sur les concepts importants et fructueux introduits par les uns et par les autres ne manquerait sans doute pas d'appuyer cette thèse.

On a vu que l'algèbre se construisait en présence de situations de répétitions mécaniques. Or, il faut bien reconnaître que si la Vie comporte des mécanismes locaux qui fonctionnent à la manière des automates, elle est, dans sa globalité, entraînée par le mouvement vers la création de structures nouvelles. L'algèbre statique, en soi mécanique, interdit l'émergence de la nouveauté. Et par son caractère machinal, cette algèbre abstraite est tout près de l'artificiel et du superficiel. "Abstracte vel superficialiter", note Spinoza.

5.2 Poincaré estime qu'"en devenant rigoureuse, la Science mathématique prend un caractère artificiel qui frappera tout le monde. Elle oublie ses origines historiques ; on ne voit plus comment les questions peuvent se résoudre, on ne voit plus comment et pourquoi elles se posent" [13].

On ne comprend bien en effet quelque chose que lorsqu'on est capable d'en reconstituer la genèse et l'histoire. Aussi l'enseignement actuel des mathématiques, qui ignore toute référence au passé et au sensible, est-il bien peu satisfaisant, d'autant plus que les manuels semblent souvent rédigés par des auteurs qui n'auraient jamais fait un brin de recherche, ni bien compris le fond de leur discipline. Ils masquent leur défaut de savoir en se montrant plus royalistes que le roi, en fabriquant des définitions abstraites, compliquées ; elles enlèvent à la compréhension beaucoup plus qu'elles ne lui apportent. En imposant trop tôt un rigorisme excessif, ils tuent le développement nécessaire de l'intuition. L'emploi systématique des méthodes axiomatiques, où les axiomes, puis les théorèmes tombent du ciel sans justification aucune, ramène l'art des mathématiques à l'exercice militaire, scholastique, voire pédant. L'imagination s'éteint ; la pensée, enchâssée dans un monde restreint de formes rigides et rudimentaires, perd petit à petit la faculté de s'évader vers des horizons nouveaux et novateurs. A travers l'épanouissement du rigorisme imposé, un monde figé et désincarné se profile à l'horizon. L'excès mécanique, s'il parvient à s'imposer, prépare la mort de l'homme.

On peut se demander également si ces excès n'atteindraient pas l'équilibre psychique des individus. En prenant l'habitude de vivre dans un milieu mental peuplé de formes élémentaires et en nombre restreint, dont l'esprit reproduit le motif, machinalement et inlassablement, le jeune mathématicien se coupe du monde sensible, et devient incapable de saisir les nuances, les subtilités, et parfois l'essentiel de la réalité humaine.

La rigueur, tant cherchée dans la démonstration des énoncés mathématiques, se retourne contre l'homme lui-même dans ses rapports avec autrui.

A vrai dire, il ne faut pas avoir peur d'entrer davantage dans la psychologie du mathématicien. Cette psychologie est fonction de faits de nature et de faits de culture. Sous l'influence des faits de nature, il se montrera plus ou moins intuitif, ou bien plus ou moins rationnel, il sera de plein pied dans le monde des hommes, ou, au contraire, il tentera de les fuir et de trouver un refuge dans les constructions verbales et mentales, où sa propre vérité n'aura pas à souffrir d'éventuels contradicteurs. Sur le plan culturel, l'encouragement prodigué dès l'enfance à être le premier, à s'affirmer comme le plus fort, peut finir par créer chez certains des complexes : ils ne font que révéler les faiblesses et les désordres internes de leur esprit, et contribuent à développer chez ces sujets des comportements agressifs, voire aberrants. La passion dévorante de la gloire peut même finir par troubler des esprits parmi les meilleurs.

5.3 H. Cartan a écrit récemment que "la pratique des mathématiques est une rude école de probité intellectuelle" [4]. Rude école en effet, elle exige un travail assidu pour lire les nombreuses et difficiles publications des collègues, pour méditer sur l'intérêt des notions et des théorèmes nouveaux, pour percevoir des propriétés nouvelles, en trouver des démonstrations rigoureuses et élégantes. Mais que le mathématicien formé à cette école soit honnête, rien n'est moins sûr.

Car s'il met sa conduite au service de ses ambitions égoïstes, il en vient facilement à n'envisager ses relations avec ses semblables qu'en termes de rapports de force. A l'égard des mathématiciens de poids, des autorités qui le dominent, il pourra faire preuve de servilité, et vis-à-vis de la communauté mathématique dans son ensemble, il montrera de la prudence, évitant de prêter le flanc à toute critique. Mais ceux que, dans son jugement, il tient pour sans défense, que, dans son aveuglement, il prend pour des naïfs, le mathématicien pathologique n'hésitera pas à les railler, à les tromper, à les piller, si ce n'est à leur faire porter le poids de ses propres errements, de ses propres fautes.

Un tel comportement déshonore non seulement le mathématicien lui-même, mais la communauté scientifique toute entière. Le rôle du savant est de transmuter le monde des objets substantiels bien construits dans le monde des idées, de chasser de celui-ci les idées fausses, et de dévoiler les idées vraies, ces canons incorruptibles selon lesquels sont régis, dans leur présent et dans leur devenir, les objets du monde substantiel.

Or le Beau qui caractérise le Vrai, ne tolère pas d'impureté. Il est incompatible, dans sa globalité, avec une forme quelconque de déséquilibre. Toute rupture dans l'harmonie d'un être, dans l'équilibre de sa physiologie mentale, induit, par contagion, des brisures dans l'harmonie sociale. Ces lézardes qui courent le long de l'édifice l'enlaidissent, et annoncent son écroulement prochain. Le mathématicien qui entend mettre à nu la vérité, dans ce qu'elle a de moins corruptible sous l'effet des modifications des institutions et de l'usure du temps, a le devoir d'éviter que soit dénaturées, par le jeu des passions séculières, les qualités naturelles de son esprit, images en quelques sorte des valeurs intrinsèques qu'il recherche, et qui fondent la justesse de ses intuitions.

NOTE

Ce texte contient la matière d'une conférence* faite devant des étudiants de premier cycle, dans le cadre d'une option d'Histoire des Sciences. L'orientation de l'exposé est philosophique : une perspective avec laquelle nos étudiants sont peu familiers ; pour cette raison même, elle peut ouvrir leur esprit sur des horizons nouveaux.

Etant donnée la brièveté de la conférence, une heure trente, la plupart des questions n'ont pas été traités à fond, comme celle, par exemple, de la classification des idées en fonction de leur caractère de pérennité. Sur ce point, on pourra lire les travaux de Platon, Descartes, ou Spinoza ([14] entre autres).

N'ont point été abordés l'insertion des grands problèmes philosophiques au sein de la réflexion mathématique, ni les diverses questions de méthodologie scientifique, ni les rapports entre les méthodes et les Idées.

Les problèmes posés par l'expérimentation en mathématiques, bien qu'évoqués au cours de la conférence, sont, dans ce texte, passés sous silence. A ce propos, citons les lignes suivantes extraites du livre admirablement écrit d'Arnaud Denjoy [5] : "Toute connaissance avant d'être irrévocablement acquise à l'esprit, doit s'élever jusqu'au dernier de ces trois degrés successifs : l'observation, l'expérimentation, la déduction. Pour les gens trop sommairement informés, toute l'évolution des mathématiques se déroule exclusivement sur ce dernier degré". Ce texte de Denjoy ne contiendrait-il pas la trame d'une thèse d'histoire des sciences ... et de sociologie ?

Certains lecteurs s'étonneront peut-être de la teneur de la dernière partie de cet exposé. Tout mathématicien qui réfléchit sur son activité est inexorablement conduit, un jour ou l'autre, à traiter ces thèmes. Platon ou Poincaré [13] nous ont montré la voie.

---

*6 Mai 1977.