C. R. Acad. Sc. Paris, t. 271, p. 542-545 (21 septembre 1970). Série A

THÉORIE DES MATROÏDES. — *Application des notions de stabilité et d'extrémalité à la théorie des matroïdes.* Note (*) de M. **Claude P. Bruter**, présentée par M. André Lichnerowicz.

1. Construction des matroides. — Soit $M(E, \mathfrak{S})$ un matroïde défini sur l'ensemble fini E par la famille $\mathfrak{S}$ de ses stigmes S [1]. On va associer à M sa représentation géométrique [2].

Définition 1. — On dira qu'un matroïde est représenté géométriquement par une *n-droite* D_n si cette droite possède $n+1$ points. n est le *type* (*topologique*) de la droite.

Définition 2. — Soit Δ_n une n-droite qui représente géométriquement le matroïde $M(E, \mathfrak{S})$. On suppose qu'il n'existe pas de matroïde défini sur un ensemble E' de cardinal strictement inférieur à celui de E et qui soit représentable par uue n-droite. Δ_n est appelée *n-droite minimale.*

1.1. Théorème. — *Soit* $M(E, \mathfrak{S})$ *un matroïde défini sur l'ensemble* E *et représentable par une n-droite minimale. Alors*

$$|E| = n+1,$$
$$S \in \mathfrak{S}, \qquad |S| = n.$$

On désigne indifféremment par D_n une n-droite et le matroïde que cette droite représente.

Définition 3. — Étant donnée une n-droite D_n définie sur un ensemble de cardinal $|D_n|$, on appelle :

(i) *s-excision* ou *s-réduction partielle* l'application surjective stable $D_n \to D'_n$ qui envoie D_n sur une n-droite D'_n de cardinal $|D'_n| = |D_n| - s$;

(ii) *s-éclatement* ou *s-réduction propre* l'application surjective non stable $D_n \to D_{n-s}$ qui envoie D_n sur une $(n-s)$-droite de cardinal $|D_{n-s}| = |D_n| - s$.

On appelle *s-expansion* (partielle, propre) l'opération inverse d'une s-réduction (partielle, propre). Au lieu de s-expansion partielle on utilise parfois la terminologie de *s-subdivision.*

1.2. Théorème. — *Étant donnée la n-droite* D'_n, *désignons par* $s(D'_n) = \{S'_1, \ldots, S'_{n+1}\}$ *l'ensemble de ses stigmes. Soit* $\rho_1 : D_n \to D'_n$ *une* 1-*réduction partielle de* D_n

$$s(D_n) = \{S'_{\sigma(1)} \cup e, \ldots, S'_{\sigma(n)} \cup e, S'_{\sigma(n+1)}\},$$

où $e \in D_n - D'_n$, σ *est une permutation du groupe symétrique à* $n+1$ *variables.*

Lemme 1. — *Soit* $M' = M(E-e)$ *la réduction de* M *à* $E-e$. *Les stigmes de* M *qui sont invariants par cette réduction forment une sous-classe linéaire* [2] L *de* M (*et de* M').

On en déduit le théorème de construction suivant [on trouvera dans [3] un premier énoncé encore incomplet] :

1.3. Théorème. — *Soient* M′ *un matroïde défini sur l'ensemble* E—*e et* L *une sous-classe linéaire de* M′. *On peut construire sur l'ensemble* E *un matroïde* M *dont l'ensemble des stigmes est le suivant :*

(i) *les stigmes* S′ *de* M′ *contenus dans* L *sont des stigmes* S *de* M;

(ii) *les stigmes* S′ *de* M′ *non contenus dans* L *engendrent des stigmes* $S' \cup e = S$ *de* M. *Si* D′ *est une droite de* M′ *non contenue dans* L, *s'appuyant sur un point de* L, *son image dans* M *est une* 1*-expansion partielle de* D′;

(iii) *si* M′ *possède une* $(n-1)$*-droite* D′ *non contenue dans* L *ne s'appuyant pas sur un point de* L, *dans le cas où* $n > 2$ *le support de* D′ *sera le stigme d'une n-droite* D *connexe de* M *obtenue par* 1*-expansion propre de* D′. *Si* $n = 2$, D′ *est en fait un stigme et* D *sera une* 2*-droite reposant sur les stigmes* $(S - F) \cup e$, $\{e, F\}$, S, *où* $F \subseteq S$ *est un ensemblin de* M′.

Le cas (iii) $n = 2$ du théorème 1.3 peut être érigé en proposition indépendante [*cf.* 12.2 de (4)]. On dira dans ce cas que *e* a été *greffé* sur M.

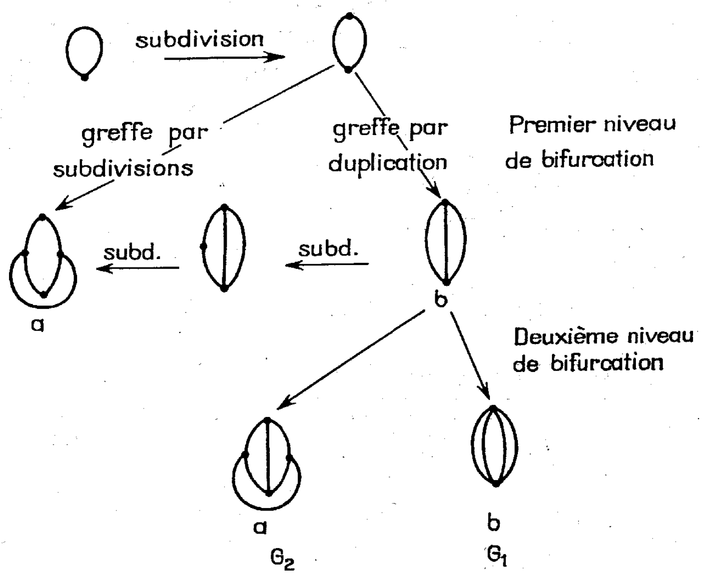
On définit dans (1) la notion d'orthogonal M* de M. Nous dirons que M est *l'orthogonal minimal* (il existe des orthogonaux non minimaux).

1.4. Proposition. — *A toute greffe de* M *correspond une* 1*-subdivision partielle de* M*.

Une 1-subdivision partielle ne change pas la codimension (2) du matroïde. De par la relation [(1), (2)] $\operatorname{cod} M + \operatorname{cod} M^* = |E| - 2$ on voit que l'opération de greffe est la seule opération qui augmente la codimension du matroïde.

2. Applications a l'étude de classes particulières de matroides. — Les graphes offrent les prototypes de matroïdes à partir desquels on peut intuiter les propriétés de matroïdes plus généraux et les difficultés qu'on rencontrera au cours de leur étude.

Voici le début de l'arbre généalogique des graphes :



Nous allons étudier successivement des généralisations des géométries associées à G_1 et G_2. Nous nous limiterons au cas où ces géométries sont représentées dans le 2-plan bien qu'on puisse passer sans difficulté à des codimensions supérieures.

2.1. Théorème. — *Soit* E *un ensemble de cardinal* $n > 2$. *Il existe un 2-plan connexe* P, *représentation géométrique d'un matroïde* $\hat{M}(E, \mathcal{S})$ *dont les droites, en nombre* $n+1$, *sont connexes minimales et de même type* $n-1$. *Par tout point passe deux et deux droites seulement. Tout point non situé sur une droite* D *du plan est joint à deux points de cette droite et deux seulement.*

Définition 4. — On dira d'un tel matroïde qu'il est *équilibré* (en effet, toutes les droites ont des supports de même cardinal n, tous les points ont des supports de même cardinal $n-1$).

2.2. Théorème. — *Soit* $\hat{M}(E, \mathcal{S})$ *un matroïde défini comme au théorème précédent. Soit* $X \subset E$, $|X| < n-1$. *Il existe un matroïde* $\hat{M}[X]$ *défini sur* E *qui a pour stigmes* X *et* $S \in \mathcal{S}$ *ssi* $X \not\subset S$.

Définition 5. — On appelle *déformation* l'application $h : \hat{M} \to \hat{M}[X]$.

Définition 6. — Soit D une droite connexe qui représente un matroïde M défini sur un ensemble de cardinal d. On appelle *comultiplicité* d'un point S de D la différence $d-s$ de d et du cardinal s de l'ensemble sous-jacent au stigme S de M.

2.3. Proposition. — (i) *La comultiplicité de tout point de la droite* $D[X]$ *de* $\hat{M}[X]$ *passant par* X *est égale à* 1, *sauf celle du point* X *égale à* $n-|X|$.

(ii) *La somme des comultiplicités des points d'une droite est invariante par* h, *égale au type topologique de la droite.*

Peut-on déformer $\hat{M}[X]$?

2.4. Théorème. — $\hat{M}[X][Y]$ *existe chaque fois que* : (i) $X \cap Y = \emptyset$; (ii) $Y \subset X$, *et* (iii) *chaque fois que* $|X| = |Y|$ *et il existe une droite* D *passant par* X *telle que* $D - X \subset Y$.

Quel est le nombre $N[\hat{M}[X][Y]]$ de matroïdes qu'on peut construire? En autorisant certains isomorphismes on trouve

$$N[\hat{M}[X][Y]] = \sum_{1<|X|<n-1} N[\hat{M}[X][Y]/\hat{M}[X]],$$

avec

$$N[\hat{M}[X][Y]/\hat{M}[X]] = \frac{1}{2}[2^{n+1-|X|} + C(|X|+2, 2|X|-n)].$$

On voit là se dessiner une bonne méthode pour dénombrer les matroïdes.

Il va de soi qu'on généralise facilement le théorème précédent à $\hat{M}[X][Y]\ldots[Z]$.

L'étude de la généralisation du matroïde associé au graphe G_2 bifurque vers plusieurs types de matroïdes selon l'angle sous lequel on regarde G_2.

Définition 7. — On dit qu'un matroïde est *régulier* [ce terme est pris dans une acception différente de celle que lui donne Tutte [2]] s'il est représentable géométriquement de manière que toute droite ait le même nombre de points $n+1$, par tout point passent n droites.

Il est *quasi-régulier* si on peut le rendre régulier par 1-expansions.

2.5. Théorème. — *Étant donné l'ensemble* E, $|E| = 2n$, *il existe un matroïde quasi-régulier minimal* $\tilde{M}$ *sur* E, *représentable par un* 2-*plan qui possède* $2n$ *droites reposant sur* n^2+2 *points, chaque droite étant de type* n. *Ce plan possède deux points* P *et* P′ *appelés pôles tels que* $P \cap P' = \emptyset$, $P \cup P' = E$, $|P| = |P'| = |E|/2$, *et par lesquels passent deux faisceaux* F *et* F′ *de* n n-*droites.*

2.6. Corollaire (de 2.4). — *Soit* $\hat{M}$ *un matroïde régulier défini sur* E, $|E| = 2n$. *Soient* $P \subset \overset{*}{E}$, $|P| = n$ *et* $P' = E - P$. $\tilde{M} = \hat{M}[P][P']$.

$\tilde{M}$ possède *n transversales* : une transversale T est un ensemble de n points, deux d'entre eux n'étant pas situés sur la même droite de $\tilde{M}$. On désigne par $\tilde{M}[T_1]$ le matroïde obtenu après expansion de $\tilde{M}$ en prenant T_1 comme sous-classe linéaire, $\tilde{M}[T_1, T_2]$ le matroïde obtenu après expansion de $\tilde{M}[T_1]$ ... en prenant T_2 comme sous-classe linéaire. Dans $\tilde{M}[T_1, T_2]$ T_1 et T_2 sont devenus des n-droites qui passent par un point P'' dont le support est E. On désigne par $\tilde{M}[T_1, \ldots, T_{i+1}]$ le matroïde obtenu par expansion de $\tilde{M}[T_1, \ldots, T_i]$ en prenant comme sous-classe linéaire les points de T_{i+1} et P''.

Alors $\tilde{M}[T_1, \ldots, T_n]$ est un matroïde régulier défini sur un ensemble de cardinal $3n$. Il possède $3n$ droites et n^2+3 points. Par tout point passent n droites. Toute droite possède $n+1$ stigmes. Ces droites se répartissent en trois faisceaux équipotents qui passent respectivement par l'un des trois pôles Q, Q′, et P'' avec Q (resp. Q′) = P (resp. P′) $\cup \{e_1, \ldots, e_n\}$ où e_i désigne l'élément qui déploie $\tilde{M}[T_1, \ldots, T_i]$. Si on fait une 1-expansion partielle $\tilde{M}[T_1, \ldots, T_n]$ en prenant Q, Q′, P'' comme points de la sous-classe linéaire on obtient un *matroïde régulier fermé* $\tilde{M}[T_1, \ldots, T_n] = \overline{M}$ qui par rapport à $\tilde{M}[T_1, \ldots, T_n]$ possède en plus la droite binaire $QQ'P''$.

Dans le cas où $n = 2$, le matroïde régulier fermé est le matroïde de Fano qui caractérise $\mathbf{Z}/2$ et les matroïdes binaires. On peut raisonnablement penser que les matroïdes $\tilde{M}[T_1, \ldots, T_i]$, $i \geq 2$ et $\overline{M}$ jouent un certain rôle dans les problèmes de classement des matroïdes et de caractérisation géométrique de quelques anneaux d'intégrité.

(*) Séance du 17 août 1970.

(1) H. Withney, *Ann. J. Math.*, 57, 1935, p. 509-533.

(2) W. T. Tutte, *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, 69-B, 1965, p. 1-47.

(3) H. H. Crapo, *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, 69-B, 1965, p. 55-65.

(4) C. P. Bruter, *Vue d'ensemble sur la théorie des matroïdes*, Mémoire n° 17, Soc. Math. de France, 1969.

(*Département de Mathématiques,*
Faculté des Sciences,
avenue Victor-Le Gorgeu,
29-N-Brest,
Finistère.)

182441. — Imp. Gauthier-Villars. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.