PROPOS ÉCLECTIQUES

Préfaces
et
Allocutions de Vernissage

Claude Paul BRUTER

PRÉFACES

Jean Largeault

Hasards, Probabilités, Inductions 1979

PRÉFACE

Quelques notes de cours sont à l'origine de cet ouvrage. On ne s'étonnera pas que les thèmes traités soient classiques, comme, par exemple, ceux du hasard et du déterminisme. Tout philosophe un peu sérieux se doit d'aborder un jour ces problèmes de fond. Monsieur Largeault les attaque avec savoir et pertinence.

La culture scientifique dont il fait preuve est exemplaire. Maîtrisant les difficultés techniques des Théories, l'auteur écrit en connaissance de cause. Il n'ignore aucun débat épistémologique, et sait, en quelques mots, reconstituer l'exacte pensée des auteurs nombreux, français comme étrangers, auxquels il fait référence. A cet égard, et du point de vue bibliographique, cet ouvrage rendra des services extrêmement précieux auprès du public même le mieux averti.

Sur le fond, il convient d'abord de définir le statut des probabilités et des statistiques; Monsieur Largeault s'y emploie avec justesse. Nous savons bien que nous sommes en présence de modèles. Le modèle des probabilités quantiques, pour des questions de distributivité d'un treillis, diffère du modèle des probabilités usuelles. A l'intérieur de chaque modèle, la pensée chemine selon des règles rationnelles et causales. Les fondements de ces modèles sont de nature déterministe et point livrés au hasard. Les dés, les ensembles d'épreuves ont leur stabilité propre, sans quoi on ne pourrait pas établir de mesure de probabilité. Un savoir déterministe et empirique est nécessaire pour construire le modèle. Aussi nombre de discours tenus sur les lois des grands nombres sont déraisonnables. Comme tout modèle, le modèle probabiliste s'attache à décrire un certain type de propriété, par exemple le type de face sur laquelle le dé est tombé. On ne se préoccupe ni de la couleur, ni du poids, ni du matériau qui le constitue, ni de la provenance du dé, ni de la manière précise avec laquelle il est lancé, ni des qualités du plan sur lequel il achèvera sa course. Toutes ces données contiennent un ensemble de conditions aux limites et de règles d'enchaînement des positions qui peuvent permettre de prévoir exactement la face sur laquelle le dé va tomber. Monsieur Largeault dira ici que je fais vieux jeu : je maintiens pourtant que l'emploi d'un modèle probabiliste (respectivement d'un modèle différentiel), pour décrire un comportement, suppose l'ignorance partielle

(respectivement une connaissance suffisante) des causes et des modalités de ce comportement. Le modèle différentiel décrit avec finesse un type spécifique de comportement. Le modèle probabiliste gagne en généralité ce qu'il perd en précision locale. Accepter la valeur pragmatique du modèle probabiliste n'est pas un gage de croyance en l'existence d'un indéterminisme ontologique.

Ces premières considérations montrent que l'examen du modèle probabiliste ou de la seule notion de probabilité ne peut apporter aucune lumière sur la nature déterministe ou indéterministe de notre univers. De manière générale, le débat entre deux conceptions ontologiques ne peut être fondé sur une image tronquée de la réalité physique que constitue un modèle mathématique quelconque. Malheureusement, les experts commettent trop souvent l'erreur de prendre l'objet pour son image. La discussion devrait plutôt porter sur les arguments concrets avancés par les physiciens pour justifier leur position.

J. Largeault écrit, non sans raison, qu'« on n'a pas d'information suffisante pour trancher ». Je préfère pour ma part faire preuve d'imprudence sociologique et scientifique, et m'engager. On peut se demander, en premier lieu, si les physiciens qui défendent le point de vue indéterministe n'ont pas fait preuve d'impatience et manqué d'imagination. Nous éprouvons déjà bien des difficultés à étudier les phénomènes hydrodynamiques très complexes liés à la turbulence. Faut-il alors raisonner de manière macroscopique au moment où l'on aborde l'étude des mécanismes d'interférence en présence d'électrons dont la nature, la forme, la dynamique, les propriétés des espaces dans lesquels les représenter, sont, pour le moins, mal connus. Ce n'est pas une preuve d'indéterminisme, tout au contraire, de constater l'impossibilité, pour deux objets distincts, de posséder le même domaine spatio-temporel, ou encore, dans un ordre d'idées plus étendu, la difficulté, pour deux pensées différentes, d'occuper le même espace mental. Le modèle même de la mécanique quantique, à partir duquel est établie la relation d'indétermination, la manière dont on construit cette relation, les conclusions que l'on en déduit peuvent faire l'objet de nombreuses critiques d'ordre divers. Par ailleurs, l'affrontement entre déterminisme et indéterminisme devrait être examiné à bien des niveaux dans la localité ou dans la globalité spatio-temporelle; alors se rencontreraient les problèmes de passage d'un niveau à l'autre, liés aux questions délicates des extensions de propriétés considérées comme locales sur des étendues plus globales. Il a fallu attendre que les travaux de recherche physique atteignent les premiers confins de l'infiniment petit pour que certains savants, tel Feynman, se mettent à affirmer l'existence d'un indéterminisme ontologique. Les conditions quelque peu particulières qui ont conduit à cette attitude peuvent faire douter de son bien-fondé général. On conçoit que derrière les convictions indéterministes se cachent des attitudes philosophiques *a priori*, des refus quasi-politiques, des désirs profonds. L'homme voudrait croire qu'il est libre, et ne supporterait pas l'idée même d'être esclave du destin. Pourtant, rien n'interdit de penser qu'il n'en soit pas ainsi; selon une vision un peu idyllique, la nature serait bien faite, nous serions heureusement, par la construction même de notre être, trop peu conscients des réalités pour

garder la conscience d'une destinée aussi aveugle; le ressac du futur maintiendrait en nous l'espoir, qui nous rendrait insensibles aux difficultés à venir. Mais ce sont là conjectures. On ne voit pas, surtout, en quoi la croyance en l'indéterminisme a pu contribuer au progrès de la connaissance. Bien au contraire, l'affirmation du déterminisme contraint le savant à ne pas baisser les bras, et à s'engager avec toujours le même courage, vers la recherche de nouvelles causes premières, d'explications plus générales et plus profondes. La tendance à préférer le déterminisme à l'indéterminisme, relève aussi de la psychologie individuelle, et d'une certaine conception prométhéenne de l'homme.

La notion de désordre peut être envisagée sous deux angles différents : ou bien il s'agit d'un ordre qui a été rompu; ou bien nous sommes en présence d'éléments que nous sommes incapables d'ordonner. Cette dernière situation nous met mal à l'aise. Nous éprouvons un sentiment d'instabilité, d'incertitude — on peut échanger de manière arbitraire semble-t-il la place des éléments; faisant appel à un mécanisme de généralisation, on finit par affirmer l'existence d'un hasard ontologique : « «désordre» et «hasard» seraient désormais des mots interchangeables, doués de signification cosmique. Cet optimisme est sans doute exagéré. » J'irai à nouveau plus loin dans l'aventure que Monsieur Largeault. Je ne crois guère qu'il puisse exister dans la nature deux objets physiques identiques. En poussant dans le détail l'étude de leurs propriétés, on s'apercevrait toujours qu'ils diffèrent par une fraction infiniment petite de leur poids, par l'agencement instantané de leurs molécules, par la forme des atomes, etc. Par exemple, les biologistes sont maintenant acquis à l'idée de ne pas pouvoir trouver deux hommes dont le sang ait des compositions identiques. L'égalité en tout point est contraire à la nature, les sociologues le savent depuis Durkheim. Cette constatation n'implique aucun jugement de valeur. Les objets ne peuvent paraître indiscernables que *grosso modo*, ou du point de vue du mathématicien. Encore une fois, ne laissons pas notre sensibilité naturelle s'émousser, se dissiper sous l'influence d'une pensée mécanique soumise au pouvoir simplificateur des modèles mathématiques et de la logique dichotomique. N'oublions jamais qu'une occurrence d'événements, une disposition d'objets, est le résultat d'un processus dynamique. Or, même des processus dynamiques très simples, gouvernés par exemple par des relations de récurrence du premier ordre, conduisent à des situations où des objets (points singuliers, attracteurs ponctuels) semblent apparaître, au bout d'un nombre fini ou *infini* d'étapes, dans le plus grand désordre; pourtant la localisation est en fait entièrement définie, de manière rigoureuse, par le mécanisme déterministe associé à la relation de récurrence. Si l'on connaissait toutes les conditions initiales qui définissent le mouvement des molécules de gaz dans un récipient fermé de taille arbitraire, on pourrait en principe calculer au bout d'un temps quelconque les positions de chaque molécule; le désordre observé dans le récipient ne serait qu'apparent. Naturellement, l'observateur n'aurait pas la possibilité temporelle à la fois de mesurer les vitesses des molécules si elles devenaient trop grandes et d'indiquer la position spatiale de ces petits objets. Cette difficulté d'observation ne

change rien au fait qu'à tout instant, les molécules ont une vitesse et une position bien déterminées.

On peut être tenté de ramener les discussions sur le hasard, l'incertitude et l'indéterminisme, à un débat sur le statut ontologique de l'instabilité. Face aux arguments circulaires, le déterministe têtue prétendra bien sûr qu'il faut beaucoup de légèreté pour admettre que la nature s'abandonne à bâtir des constructions sur des bases fugaces. Pour le déterministe, des événements complexes adviennent à des niveaux d'organisation très fins; ils échappent, sinon par bribes, à l'observation la plus aigüe, ils contribuent à fixer localement, dans l'espace et dans le temps, les valeurs des paramètres qui dirigent les dynamiques. Il resterait par ailleurs à comprendre comment un objet stable pourrait prendre consistance dans un milieu instable; qui ne ressent ici la force explosive d'une contradiction? Nous sommes confrontés, en dernier ressort, aux problèmes de la pluralité des mondes, de leurs échelles, de leurs propriétés, de la nature de l'éther, du continu physique, des qualités des représentations mathématiques. Et sur ces points, nous ne savons pratiquement rien. La nature a pour nous encore bien des secrets; en matière scientifique nous n'avons point de raison pour rejeter l'intuition première, ni même le gros bon sens, ni, enfin, les démarches qui ont fait leur preuve.

Le thème de l'induction ne sera pas abordé dans ces lignes. Monsieur Largeault le traite de manière approfondie. Je préférerais dire quelques mots du problème de la vérité. Il se place à la croisée de tous les chemins qui mènent à la connaissance. L'impression prévaut que la théorie popperienne de la falsification des énoncés et des théories a été établie au cours d'une période marquée par l'influence sur les esprits du modèle probabiliste. Un cadre meilleur semble-t-il, car plus général, dans lequel il convient sans doute d'examiner la notion de vérité, est le cadre dynamique. On y étudie les questions de stabilité. Seules des raisons de stabilité assurent la reproductibilité d'une expérience. On perturbe les conditions de l'expérience pour tester les limites de stabilité du résultat. La falsification d'une expérience procède de cette démarche. Vérifier un raisonnement, chercher un contre-exemple sont des moyens pour tester le degré de stabilité d'une proposition. Cette stabilité structurelle s'inscrit à l'intérieur d'un certain schéma : dans le monde des objets factuels, schéma expérimental, défini en particulier par l'étude du domaine spatio-temporel sur lequel on opère, le niveau de finesse auquel on descend dans l'examen du réel, les conditions aux limites imposées à l'expérience; dans le monde en miroir des objets idéels, schéma axiomatique et règles de déduction. Dans la mesure où un énoncé du monde idéal se veut le reflet d'un événement du monde factuel, la stabilité des deux objets, ou encore la qualité de vérité que nous leur attribuons, doit être la même. Naturellement, nous souhaitons obtenir des complexes d'énoncés stables se rapportant à des domaines spatio-temporels les plus vastes possibles. De ce point de vue, les propositions mathématiques ont un caractère de stabilité intrinsèque.

La stabilité d'un énoncé est intimement corrélée à l'usage qui est fait de cet énoncé. Une proposition qui engage un acte immédiat est soumise aussitôt à

l'épreuve de vérité. Un énoncé faux est instable dans le monde des objets idéels. Il peut parfois, grâce à l'appui d'objets du monde factuel, par la ruse, ou par méconnaissance, persister au cours des âges, et se répandre dans le monde. A long terme, il est pourtant condamné. A travers ces considérations, on débouche sur l'examen des fondements de l'éthique.

Voilà des siècles que le traitement de ce sujet n'a pas été sérieusement repris. Pourtant, la stabilité et le devenir de nos sociétés sont liés aux conceptions éthiques. Il est sans doute parfois plus important de bien conduire une réflexion sur un problème de société que de résoudre un problème de mathématique d'un intérêt probablement secondaire. Les problèmes éthiques concernent au plus haut degré l'évolution de la science. Tous les sociologues de la Science, aussi marxistes soient-ils, en sont probablement intimement convaincus. Mais combien d'entre eux sont-ils capables de s'élever au-dessus des clans et des coteries dont le sectarisme n'a d'égal que l'aveuglement ? Ce n'est pas ici le lieu d'examiner les incidences de telle ou telle conception sur les comportements, les attitudes d'esprit et les choix des savants, ou bien les effets globaux sur les niveaux dans le développement des sciences, et les manières d'appréhender les problèmes. Il suffit de reconnaître que l'énoncé vrai, parce qu'il finit par recueillir l'assentiment général, a tendance à supprimer le caractère destructeur de la rivalité, et contribue à atténuer les effets des violences internes à toute société. La capacité d'activité du groupe, au lieu d'être dissipée de manière absurde en procès de toutes sortes, peut être utilement mise à profit pour l'amélioration des conditions existantes.

Ce progrès ne peut s'accomplir sans le développement et la diffusion de la connaissance, sans une prise de conscience accrue des qualités de notre être, des raisons de nos activités, de la manière de les conduire. Les philosophes jouent un rôle essentiel dans cette réflexion dont l'importance vient d'être soulignée. La présence d'une philosophie ouverte sur les problèmes de fond est révélatrice d'un élan général vers l'acquisition d'un savoir toujours plus étendu et plus sûr.

L'ouvrage très solide de Monsieur Largeault laisse bien augurer d'un renouveau de la philosophie scientifique française. Les analyses détaillées, les références bien choisies aux philosophes qui font preuve de discernement et « ont des idées », les jugements fermes ou mesurés exprimés par l'auteur, enrichissent le savoir, forment l'esprit critique, et incitent à la réflexion.

On appréciera enfin le rejet du verbiage et des discussions byzantines, portant sur des sujets creux, et exprimées dans un langage abscons. Depuis l'époque de Catos et de Magdelon au moins, la société française, parisienne surtout, s'enorgueillit de posséder quelques salons où de brillants faiseurs, le verbe haut, la langue preste, font de l'esbroufe. Monsieur Largeault a le style clair, la plume simple, vive et sûre. Il attaque, et pourfend : il vise juste. Qu'il parvienne à tuer l'esprit de nos salons serait étonnant. Nous participons tous de la société française, elle n'est souvent que réactions et contre-réactions. J. Largeault a du tempérament, de l'humeur et de l'humour, à quoi l'on reconnaît les gens sérieux.

Claude Paul BRUTER

Jean Largeault

Enigmes et Controverses **1980**

POSTFACE

par C.P. BRUTER

0. Vers une Science de la pensée ?

Deux catégories suffisent peut-être pour classer les motivations à l'origine du progrès de la connaissance. Dans la première catégorie, apparaissent les raisons qui nous poussent à acquérir un savoir sur le monde extérieur, savoir destiné, avant tout, à mieux préserver notre être de toutes les formes d'actions destructrices que peuvent avoir sur notre personne prédateurs et cataclysmes, de façon directe ou indirecte.

Ce savoir se rapporte sans nul doute au monde physique et biologique. Il concerne également l'univers social et politique, puisque nos conditions matérielles, physiques et affectives sont en partie fonction des rapports que nous entretenons avec nos semblables, et du mode d'organisation de la collectivité.

Dans la seconde catégorie, nous plaçons les raisons qui nous conviennent à prendre connaissance de nous-mêmes. Il s'agit certes, ici encore, et en premier lieu, d'apprendre à mieux sauvegarder notre identité physique. Le savoir accumulé au cours d'années et de siècles d'observation et de recherches sur notre corps, permet de lutter avec succès contre les déséquilibres, les dégradations, et les dommages causés par les malnutritions, les maladies, la vieillesse. Nous apprenons à réparer la machine humaine, à en entretenir le fonctionnement harmonieux. Nous apprenons également, mais avec combien de lenteur, à mieux connaître les ressorts cachés de l'âme humaine ; ainsi naît l'espoir de parvenir à mieux résister nous-mêmes aux agressions d'origine sociale et affective, d'aider plus efficacement notre entourage à supporter moralement les vicissitudes de la

vie, de construire une société où les rapports entre hommes soient moins tendus et plus sains.

Mais cette connaissance sur soi-même vise plus loin. Elle a pour ambition d'améliorer l'être humain dans sa totalité, dans son organisation physique et ses capacités perceptives, dans sa richesse affective, dans son pouvoir de pensée. Ainsi l'homme semble-t-il engagé, comme malgré lui, dans un processus qui tendrait à lui conférer une extraordinaire puissance, puisque, par un savoir chaque fois plus étendu et plus sûr, il deviendrait capable de maîtriser son propre développement, et son aptitude même à acquérir ce savoir et à concevoir.

L'homme a saisi depuis longtemps que, le jour où il sera parvenu à dominer entièrement les mécanismes par lesquels une pensée prend naissance, devient consciente, et s'exprime, il sera tout proche de réaliser son vieux rêve faustien. Aussi comprend-on que, depuis les sophistes et Aristote au moins, tant de savants se soient penchés sur les mystères du fonctionnement de la pensée.

1. Sur quelques travaux récents et leurs conséquences

Quoi de plus naturel alors, que ces mêmes savants aient accordé un grand crédit à l'étude des manifestations immédiates et les plus apparentes des mécanismes mentaux ? Telles les ombres projetées par les flammes sur le mur rougeoyant, les combinaisons de mots qui sortent de notre bouche ou que nous couchons sur le papier, sont les reflets stylisés et obscurcis des formes et des activités mentales. Que l'auteur du *Περί Ψυχης* ait également fondé la logique est significatif. Et faut-il s'étonner que Boole, dans l'exaltation peut-être de sa découverte, ait pu donner à son traité de logique, le titre triomphant de « *Laws of Thought* » ?

On attend beaucoup des marginaux, le meilleur comme le pire. Des mathématiciens et des poètes, dont les productions intellectuelles sortent de l'ordinaire, on espère recueillir quelques secrets sur les mystères cachés de leur réussite. On les interroge, en vain d'ailleurs, sur les procédés mentaux qu'ils emploient pour deviner leurs démarches de pensée singulières. Cette voie d'approche conduit droit aux études logiques, linguistiques et sémiologiques.

La formalisation du raisonnement élémentaire a eu, finalement, une énorme influence sur le devenir des mathématiques. Les logiciens ont accompli un travail mathématique important, tout en

s'efforçant de rester dans le cadre très contraignant de leur formalisme et des règles de déduction qu'ils s'étaient fixés.

L'arithmétique et l'algèbre, de manière générale toutes les mathématiques algorithmiques, sont des matières sur lesquelles les logiciens peuvent travailler sans difficulté de transcription dans leur propre langage. Peut-être se trouvera-t-il un jour un mathématicien ou un logicien qui fera le point sur les apports de la logique à la connaissance mathématique — l'article de Mac Lane (8) est, malgré son titre beaucoup trop pauvre. Il est bien connu par exemple que non seulement l'analyse p -adique a été considérablement enrichie par les logiciens, mais que de grands problèmes de la théorie des groupes n'ont pu trouver leur solution que par l'intermédiaire des travaux réalisés en théorie des mots. C'est encore un logicien qui a créé l'arithmétique et l'analyse non-standard (7) (10) (11) : leur usage se répand lentement mais sûrement. L'emploi de la forme géométrique du théorème de Tarski-Seidenberg a permis de faire de gros progrès dans l'étude des singularités en géométrie analytique et, dans une large mesure, a autorisé le développement de la théorie de la stratification. Via l'algèbre, l'étude des formes topologiques peut espérer gagner en étendue et en profondeur à partir des travaux des logiciens. Qu'il s'agisse du point de vue local ou global, on s'efforce de parvenir à une sorte de représentation de la forme en examinant dans quelle mesure un certain nombre d'opérations, de manipulations sur cette forme sont possibles de manière répétitive : il peut s'agir d'opérations de translations aboutissant à un processus convergent, ou bien d'opérations répétées de subdivisions, de rotations simples (S^1) ou complexes (S^n), ou bien d'autres actions de groupes, discrets ou non. La nature et les invariants des opérations que l'on peut ainsi réaliser sur la forme caractérisent celle-ci, et permettent de créer des structures algébriques sur lesquelles on pourra la représenter. Ainsi, la célèbre conjecture de Poincaré en dimension 3 est-elle devenue aujourd'hui la conséquence d'une conjecture portant sur un groupe libre (12).

Les travaux formels sur les expressions linguistiques ont également abouti, en conjonction avec les recherches logiques, à la création des divers langages adaptés à l'intelligence des automates et des ordinateurs. L'humanité a pu ainsi se doter de moyens de calculs et de simulation extrêmement puissants : ils ont facilité le développement technologique, l'expansion spatiale, les capacités de renseignement de toute sorte, le progrès du savoir fondamental.

2. *Entrevue sur les travaux futurs*

Cependant, pour acquérir de nouvelles connaissances sur les mécanismes mentaux, il semble nécessaire d'entreprendre des recherches dans plusieurs directions. D'un côté, il faudra bien, quittant le niveau de l'expression vocale, saisir et maîtriser les processus physiologiques et neurologiques qui précèdent et accompagnent l'expression orale des pensées ou des réactions affectives ; de nombreux neurophysiologistes caressent sans doute ce rêve encore lointain. D'un autre côté, il est indispensable d'entreprendre une modélisation de la sémantique. Celle-ci a échappé totalement jusqu'ici à l'emprise des logiciens et de leurs émules. On peut toutefois espérer qu'ils parviendront à effectuer une percée, avec l'introduction de topologies sur les grammaires formelles, et l'emploi des topoi (6) (5). Comme sous-produits importants, ces travaux pourraient permettre de construire de bons modèles de logiques continues. Ils devraient alors prouver leur utilité dans la représentation de l'infiniment petit.

Dans l'immédiat, les questions de sens pourraient être abordées par une approche géométrique : le livre de la Nature ne s'écrit-il pas en termes de géométrie ? Le sens serait ainsi représenté par une forme. Examinons par exemple le terme col. Il désigne avant toute chose une forme que les mathématiciens savent très bien exprimer par la voie analytique. Il est toutefois nécessaire, pour que le langage ait un début de sens, de préciser la localisation de ce col. Cette localisation, explicite lorsqu'on précise le col de cette montagne, le col de cette chemise, ou bien implicite, est toujours présente. Le col apparaît comme une forme locale qu'il convient d'inscrire au sein d'une forme plus globale.

Lorsqu'on parle d'une chemise ou d'une montagne, on se réfère à une famille de formes bien spécifiée. On peut alors porter son attention sur certaines parties singulières ou fonctionnelles de ces formes. On en vient ensuite à l'examen des propriétés métriques des formes, puis à celui des qualités des matériaux qui les constituent — elles sont, d'ailleurs, en relation plus ou moins étroite avec les propriétés métriques. On peut finalement établir au-dessus de la base constituée par la forme topologique, un espace fibré ; la fibre locale représente un espace convenable de valeurs numériques attachées à ces propriétés, les sections qui définissent ces valeurs pouvant être obtenues à partir de systèmes différentiels ou d'équations aux dérivées partielles de divers types.

Cette voie d'approche de la sémantique n'est évidemment ici qu'esquissée. Toutes les différentes classes de termes, les diverses manières de les associer en phrases et en discours plus étoffés, admettent certainement des représentations géométriques et dynamiques du genre de la représentation précédente : elles sont des approximations des reflets déjà riches en couleurs, de nos dynamiques mentales très cachées. Nous parviendrons à saisir leur genèse en attaquant de façon classique ce problème, par les deux approches opposées et solidaires, empirique d'une part, théorique d'autre part.

3. *Sur deux facteurs du progrès : rigueur et invention*

Les questions de genèse sont tout à fait passionnantes. L'objet nouveau présente, au moment de sa naissance, des caractères de totipotence. Plusieurs voies d'évolution peuvent s'offrir devant lui. On y rencontre donc une sorte de liberté alliée à quelque confusion. Au contraire, lorsque l'objet est bien engagé dans un mode de développement, des règles fixent le cours de son histoire. On retrouve ici l'opposition entre esprits intuitifs et esprits logicistes, entre qualités créatives et aptitudes techniciennes. La jeunesse a souvent les premières, la vieillesse les secondes. Le vrai géomètre serait plutôt un intuitif, et l'algébriste un logiciste, qui pourrait s'égarer dans le respect outrancier des lois. Qui n'a jamais rencontré ces esprits juridiques, sclérosants, et parfois même totalitaires ? A vrai dire, ces spéculations psychologiques ne sont pas sans danger. Nul n'ignore le comportement exécrationnel du topologue Pontryaguine, et celui, exemplaire, de l'algébriste Kurosh. Mais après tout, on peut voir dans ces attitudes les manifestations des caractères intrinsèques de l'esprit d'invention d'un côté, qui exige la souplesse mais dont l'excès tourne à la veulerie, et de l'esprit de rigueur de l'autre côté, dont les travers conduisent à des formes larvées de schizophrénie.

Ces remarques psychologiques attirent l'attention sur les dangers d'un enseignement mathématique basé exclusivement sur la conception ensembliste et algébrique des problèmes. Un tel enseignement ne favorise ni l'acquisition ni le développement de la sensibilité aux choses ou aux êtres. Il enferme en effet l'activité mentale dans un univers coupé du monde, et entraîné par le seul effet de la mécanique linguistique. Les esprits déjà portés, par leur propre nature, à se maintenir à l'intérieur de l'univers clos de leur propre discours, sont encouragés dans cette attitude par l'exercice de cet enseignement. Celui-ci conduit ainsi à façonner des individus parfois peu aptes à la

vie sociale, et dont les jugements sur leurs semblables sont établis à travers l'optique rigide et grossièrement déformante d'a priori de pensée. Ainsi s'élabore une société, à la fois mécanique dans sa démarche et rigide dans sa structure, conservatrice dans ses profondeurs, opposée à l'épanouissement de la fantaisie gaie et créatrice, et de la liberté printanière et pourtant sereine.

Pour ces raisons, les enseignements des lettres, de tous les arts, de la géométrie, par lesquels nous entrons en contact avec l'infinie richesse des sensations, des formes, des attitudes, des réactions, qui prédisposent à l'harmonie sociale comme à l'invention, doivent en définitive jouer un rôle plus important dans la formation de l'esprit que les enseignements des disciplines formalistes, aujourd'hui logique, théorie des ensembles, algèbre, programmation, linguistique structurale. Ainsi peut-on espérer maintenir en place des sociétés vivantes, capables de résister à l'emprise sournoise des totalitarismes rampants, tant politiques qu'intellectuels.

4. *Pour un renouveau de la philosophie des mathématiques*

Dans cette lutte, le rôle de la philosophie naturelle est très important. Elle nous apprend les grandes lois de l'évolution, les erreurs à ne pas commettre sous peine d'échec. Fruit de l'esprit de synthèse autant que de l'esprit d'analyse, la philosophie naturelle ne peut que suivre le progrès des sciences par lesquelles elle formule ses règles. Elle inclut en elle la philosophie des mathématiques en tant que réflexion sur les principales démarches de la pensée mathématique, et sur la signification des grands concepts employés par les mathématiques. Certes, comme nous en prévient Jean Largeault dans son avant-propos, il ne s'agit pas de tomber dans l'erreur d'un méthodologisme insignifiant, ou d'entreprendre une étude sur l'essence des concepts. Il s'agit d'apprécier le caractère d'universalité que recèlent la démarche ou le concept étudiés, *à travers leur signification physique*.

Les théories mathématiques sont, à l'origine, des sortes de théories linguistiques, élaborées à partir de modèles d'objets ou de phénomènes du monde naturel. De manière plus ou moins consciente, les mathématiciens ont ainsi codifié à leur façon des règles, des modalités de comportement et de développement : on les retrouve dans toutes les sciences et dans tout l'univers, animé comme inanimé. Naturellement, elles prennent parfois, en mathématiques, des formes abruptes et sans nuance. Il importe donc, par la suite, de

les adapter à la réalité, éventuellement de les assouplir, ou bien de leur donner du corps (cf quelques références de travaux préliminaires (1) (2) (3) (4)).

Si la géométrie conserve, dans l'esprit de beaucoup, une sorte de primauté, elle le doit à sa valeur de représentation du monde physique, perçu à travers l'optique déterministe. La géométrie décrit la forme et ses propriétés métriques. Dans la mesure où cette forme présente, dans son mode de construction, des régularités codifiables à l'aide de la structure très simple et très générale de groupe, la géométrie devient l'art de faire apparaître la présence de tels groupes, ainsi que l'étude de l'action plus ou moins locale de ces groupes sur des ensembles d'éléments standards : ceux-ci, mis bout à bout, reconstituent la forme.

Ainsi, les motivations des mathématiciens qui, par exemple, étudient la géométrie ou les groupes, ne sont pas superficielles. Le chercheur qui entreprend une étude doit toujours être capable de justifier son travail. Deux critères sont essentiels : le premier concerne le degré de généralité de l'étude entreprise, le second la pertinence physique, immédiate ou lointaine, du sujet et des concepts autour desquels s'articule cette étude. Il est naturellement toujours à craindre que de tels travaux ne finissent par déboucher sur une forme d'exercice scolastique, prouvant seulement les aptitudes du chercheur à apprendre, comprendre, combiner, deviner et imaginer. Il est facile de tomber dans le piège du discours insignifiant, sous la pression d'un environnement culturel ou intellectuel trop superficiel.

Se pencher sur les problèmes difficiles, voire non résolus, présente souvent un grand intérêt. Les obstacles dont sont porteurs ces problèmes sont des indices signalant la présence de propriétés structurelles non encore dévoilées, ou dont la signification véritable échappe encore. Dans bien des cas, on parvient à résoudre ces problèmes par des sortes de méthodes constructives. Elles aboutissent à fabriquer des classes d'objets possédant les propriétés observées sur les exemples particuliers, et dont on cherche à démontrer la validité dans des cas plus généraux. On s'attache souvent à déterminer en premier lieu, les règles de passage, au sein de ces classes, d'un objet à l'autre, en second lieu à caractériser ces classes par les propriétés d'objets singuliers, parmi lesquels on rencontre les objets extrémaux et invariants, enfin, à examiner les phénomènes de bifurcation qui accompagnent le passage d'une classe à l'autre.

Ce serait une tâche de la philosophie des sciences que d'entreprendre une réflexion sur les types de problèmes abordés par les mathématiciens, et sur les procédés employés pour les résoudre. Plus

difficile serait sans doute l'étude critique des théories mathématiques en tant que modèles du monde physique. De tels travaux, celui de Riemann (5) est peut-être parmi les premiers du genre, permettraient de mieux préciser l'étendue du domaine sur lequel le platonisme mathématique prétend régner.

Le lecteur nous pardonnera peut-être de suggérer seulement des voies d'étude¹, sans entreprendre de traiter à fond aucun des problèmes particuliers que l'on pourrait poser. Nous tenons simplement à montrer que pourrait être relevé le défi lancé par Jean Largeault dans son avant-propos, et repris, à juste raison, dans le corps de son ouvrage. Les mathématiques offrent encore la matière à des réflexions nouvelles; celles-ci pourraient être utiles au progrès des théories mathématiques elles-mêmes; elles permettraient également de mieux préciser le statut de ces théories.

5. Quelques remarques sur le platonisme et l'indéterminisme

Dans quelle mesure les a priori de pensée jouent-ils un rôle dans le progrès des connaissances? Pour répondre à pareille question, il faudrait d'abord établir un inventaire de ces a priori, puis les classer. Peu de philosophes se sont encore hasardés à entreprendre cette tâche. Nous nous contenterons ici de revenir sur deux d'entre eux: ils continuent de jouer un rôle considérable dans l'orientation des travaux des savants, et, par conséquent, dans les résultats de la recherche.

Il s'agit, en premier lieu, du platonisme, dont le succès repose naturellement sur la validité physique des théories mathématiques. Avouons qu'il faut une bonne dose d'audace pour affirmer la valeur des conceptions de type platonicien. Dans l'hypothèse où ces conceptions se verraient davantage encore étayées par l'expérience, il faudrait également reconnaître à leurs adeptes des qualités d'intuition peu communes. Jusqu'à l'heure actuelle, le platonisme est resté, pour beaucoup, un acte de foi. Dans leur immense majorité, les mathématiciens l'ont accompli, soit consciemment, par conviction ou par besoin de justification de leur activité, soit inconsciemment, et pour les mêmes raisons. Ce que le platonisme perd aujourd'hui en rigidité, il le gagne en crédibilité. Il est d'abord normal qu'une telle théorie ait pu être conçue. Les Grecs avaient de la connaissance du monde une expérience trop peu étendue dans l'espace et dans le temps pour imaginer une construction dynamique et fluctuante de l'univers. Le platonisme est une forme de théorie scientifique établie

à l'échelle des observations dont les hommes étaient capables. Il est conçu à partir des activités de simulation réalisées par le cerveau. Petit à petit, au fil du temps, émergent des démarches, des modes de construction, des formes, assez stables par eux-mêmes pour assurer la solidité des constructions naturelles dans l'espace et au cours du temps. Le fondement et la valeur du platonisme ont pour assise cette stabilité empirique.

Il serait intéressant que les tenants des probabilités et de l'indéterminisme fixent leur position en regard du platonisme, et que deux écoles de pensée s'affrontent. Mais faute de héraut et de chevalier, il est à craindre que le tournoi n'ait pas lieu. Le débat reviendrait, une fois de plus, à essayer de trancher entre déterminisme et indéterminisme. Il est, pour l'instant, pratiquement impossible de le faire sur des bases purement empiriques ou entièrement rationnelles. Il s'agit davantage de convictions; l'influence des grands maîtres du passé, ou des modes du moment, est souvent à leur origine. Mais ces convictions ne tirent vraiment leur force que des impressions que nous ressentons après avoir pressé nos sens et nos facultés perceptives à saisir la texture intime d'une réalité qui, en définitive, se dérobe toujours à notre emprise.

L'auteur de ces lignes est déterministe. Mais la forme de déterminisme auquel nous croyons est plus subtile que le déterminisme mécanique auquel on se réfère d'ordinaire. Pour préciser cette notion, il faudra sans doute acquérir une bien meilleure connaissance des propriétés des mondes subatomiques et infiniment grands. On sait qu'un certain nombre de physiciens, spécialistes de la mécanique quantique, rejettent le déterminisme laplacien. Il serait néanmoins absurde d'en nier la valeur sur la totalité de l'univers qui nous est perceptible. Nous ne prenons de toute façon conscience de cet univers que par le truchement d'écrans. « Le mur de la caverne » est plus qu'un mythe, il est une réalité. Les sens et le cerveau jouent le rôle d'écrans sur lesquels se fixent quelques images du monde. A l'échelle atomique ou subatomique, les écrans sont d'abord physiques, par lesquels on détecte la présence de phénomènes, voire d'objets. Ces écrans sont, dans une certaine mesure assez triviaux, et ne donnent de la réalité des mondes éloignés de nous que des images à peine lisibles. Comme, en général, l'image est plus petite en dimension que la réalité, il nous est impossible d'espérer voir les objets du monde petit si nous ne sommes pas capables de maîtriser les objets de mondes encore plus ténus. La description que nous en avons est écrite dans le langage mathématique. Même si les modèles sont remarquables de précision et de fidélité, il n'en reste pas moins

vrai qu'ils sont conçus à partir de catégories causales et de modes logiques adaptés à la représentation du monde ordinaire. Plutôt que de postuler un indéterminisme foncier, on pourrait tout aussi bien mettre en cause notre défaut de capacité de représentation, l'inadaptation de nos catégories conceptuelles, pour expliquer l'insuffisance de notre connaissance. Quant aux interactions entre des mondes de grandeur différente, elles s'accomplissent de manière extrêmement délicate et compliquée dont la physique ne rend guère compte. Cette discipline a la prétention de tout ramener à elle. Mais peut-être ferait-elle bien de s'inspirer de la manière dont évolue le monde biologique pour imaginer des procédures d'interactions nouvelles, qui rendraient caduc un certain indéterminisme apparent.

De toute façon, le déterminisme a pour lui de présenter, à l'échelle humaine, une valeur ontologique indéniable. Aussi constitue-t-il une des composantes importantes, bien que rarement explicite, de tous les systèmes du monde. Pour le réaliste, le succès de la position déterministe dans le progrès des connaissances est le meilleur argument empirique en sa faveur. Une approche déterministe, même vague et confuse, précède toujours la mise sur pied des modèles, aussi indéterministes soient-ils. Ceci n'est point la preuve que la conception indéterministe, parce qu'elle serait plus tardive, aurait davantage de profondeur que l'attitude déterministe. La position indéterministe témoigne simplement, à nos yeux, d'une forme de pragmatisme immédiat, et, souvent, d'une fuite en avant, qui évite d'entrer dans la recherche, sans doute très difficile et très longue, des causes véritables.

Il serait intéressant de reconnaître les raisons qui poussent les uns ou les autres à opter en faveur du déterminisme ou de l'indéterminisme. L'historien Toynbee avait quelques idées sur ce sujet. Comme tant d'autres, il voyait dans l'attitude déterministe l'indication d'un esprit autoritaire. L'indéterminisme restait pour lui le symbole de la liberté. Il y a certainement du vrai dans ce jugement. Popper parlant de Fichte et du roi de Prusse, ne le désavouerait peut-être pas.

Pourtant ces jugements ne vont pas au fond des choses. On ne peut émettre un avis sur une conception philosophique en se basant sur l'opinion et le comportement des hommes politiques. A de très rares exceptions près, emportés par les nécessités de l'action immédiate, par l'obligation et l'habitude de prendre des décisions rapides, les hommes politiques n'ont guère la possibilité d'approfondir les questions, de consacrer un temps suffisant de préparation à leurs choix, de se livrer à des méditations prolongées sur le sens de

l'histoire, et sur le poids des différents facteurs sociaux et individuels qui en infléchissent le cours.

Le déterminisme ne s'oppose pas aux valeurs de l'éthique traditionnelle. Ces valeurs sont même en quelque sorte l'expression de ce déterminisme. La position des indéterministes devient alors cocasse qui prétend tirer sa force du respect de ces valeurs. Le déterminisme est inséparable de l'humilité et d'une généreuse tolérance. Dans cette conception en effet, l'homme est plutôt le jouet du destin qu'il n'en est le maître. Il participe à l'évolution, mais ne la conduit pas à lui seul. Il ne saurait s'ériger en roitelet arrogant. Son orgueil ne peut être que la simple expression de la dignité d'être. Ceux qui l'entourent sont soumis aux mêmes lois que lui-même. Ils contribuent, au même titre que lui-même, à établir l'état présent du monde, à peser sur son lendemain. Il n'a guère de raison, dans sa méconnaissance partielle d'autrui, d'affirmer une quelconque supériorité. Il appartient plutôt à la sagesse de faire preuve de prudence et de délicatesse.

Le déterminisme ne signifie en aucune façon que le monde est figé. Il croit simplement que celui-ci est une phénoménologie, où les interactions peuvent être subtiles, lointaines, parfois sans effet profond, agissant par des voies détournées, souvent avec retard. Comme certains objets possèdent des dynamiques internes qui leur sont propres, sont des systèmes en partie fermés, il est naturel qu'ils possèdent des propriétés d'autonomie. Mais leur devenir est fonction de l'état de tout l'univers, passé, présent et parfois même futur, puisque sont constamment à l'œuvre des mécanismes d'anticipation, des procédures de prévision. L'état de chaque objet est fonction de toutes les contraintes exercées sur lui par l'environnement considéré dans tous ses aspects. Parmi ces contraintes figurent des règles globales comme rechercher une sorte d'efficacité maximale, établir l'organisation qui permet la moindre dépense d'énergie. Ce monde en évolution est donc en perpétuelle agitation sous l'effet des ajustements constamment remis en question pour satisfaire aux règles globales, de nature déterministe. L'ensemble de leurs possibilités d'évolution et de rééquilibrage caractérisent l'autonomie des objets². Cette autonomie est nécessaire : seule, en effet, la mise en œuvre de mesures de décentralisation permet de satisfaire aux règles globales. Dans notre cerveau-miroir s'établit une image des possibilités d'évolution autonome. La contemplation inconsciente de cette image induit en nous le sentiment diffus de liberté.

La présence de règles globales, dans la mesure où l'existence en est acceptée, les moteurs de l'évolution, personne ne peut nier

celle-ci, ont des origines bien mystérieuses. Ranger leur existence dans les attributs de Dieu ne résoud aucun problème. Et l'indéterministe qui, pour justifier sa position, appelle la mécanique quantique à la rescousse, trompe un tantinet son monde. Car on voit bien, en définitive, le louable mobile du physicien : je veux prouver que l'homme est libre, j'affirme donc, à partir d'observations sur le monde obscur de l'infiniment petit, l'indéterminisme ontologique, d'où je déduis que l'homme est libre. Mais l'imprévu n'existe-t-il pas déjà au niveau macroscopique ? La défense de l'autonomie de l'être humain pour maintenir l'harmonie du monde se passe volontiers de l'argumentation du physicien.

Peut-être, comme nous le suggérait J. Largeault dans une lettre, le débat entre indéterminisme et déterminisme est-il assez vain. *E pur si move*, quel que soit le point de vue. Cependant, nous prenons parti. Nous choisissons d'adopter une opinion qui, fondée sur l'expérience de l'univers observable, a conduit à obtenir le plus grand nombre de résultats positifs.

Notes de la postface

1. Dans « Sur quelques facteurs de la différenciation socio-économique », *Economie Appliquée* 2-3 (1979) 425-437, je suggère également l'étude du développement et de l'organisation des mathématiques d'un point de vue organique.

2. P. Vendryès a développé une idée analogue, mais dans un cadre indéterministe, établi de manière assez peu rigoureuse par ailleurs.

Alain Laraby

**Le constitutionnalisme
à la lumière
des sciences contemporaines
2025**

Préface

La très grande majorité des livres scientifiques sont des ouvrages de spécialité. Ils ont pour vertu leur efficacité immédiate sur le plan pratique.

L'une des originalités, parmi d'autres, du présent et imposant recueil, est d'être l'œuvre d'un témoin éclairé. Cette agréable et intelligente ouverture d'esprit permet de jeter un regard très neuf sur des sujets de politique constitutionnelle, essentiels dans la description et la marche de nos sociétés.

Faisant appel à des notions et à des outils d'une discipline autre que ceux pratiqués dans sa famille juridique d'origine, l'ouvrage entend mettre en lumière, au travers de représentations géométriques, et des jeux de relations, des mécanismes qui président à l'établissement et au fonctionnement du système institutionnel.

On retrouve ici la démarche première et fondatrice des progrès de la connaissance vers la maîtrise des facteurs de notre évolution. Sur plusieurs plans sans doute, l'auteur s'expose à des observations d'ordre technique ou philosophique, d'autant que ses représentations ne sont point encore accompagnées de données de nature physique, par exemple des coefficients d'induction, de compréhension, de pénétration ou de diffusion des contenus, selon les milieux auxquels s'adressent les discours écrits ou oraux (les lois, leurs attendus et leurs règles d'application).

L'ajout de ces compléments et développements pourrait déboucher sur des analyses plus approfondies des systèmes juridiques, sur des modèles locaux appropriés permettant d'affiner et de mieux justifier leurs corpus, les choix et les décisions.

En somme, le contenu de l'ouvrage pourrait être la source de nombreux articles, féconds et enrichissants. Cela ne serait pas là le moindre mérite de ce livre, à qui l'on souhaite une longue descendance.

Claude P. Bruter

Abdelaziz EL KAABOUCI
Laurent PLUCHART

Calcul Différentiel à une Variable **2023**

Préface.

Cher lecteur,

D'où vient ta présence dans cette grande aventure qu'est l'enseignement supérieur ? Que mets-tu d'abord en avant : le souci de ton futur matériel ou le plaisir ineffable d'admirer le vol d'un avion dans le ciel ? Son grondement inquiétant, sa trajectoire évanescence, la forme élégante de son fuselage, autant d'éléments observés et fascinants qui accaparent les sens. Comment ne pas essayer de comprendre toutes ces données, pour dans toutes leurs facettes nous les rendre plus familières, et parvenir ainsi petit à petit à se les approprier aussi entièrement autant que possible ? Spontanément, tu les observes d'abord, puis de plus en plus attentivement tu décris leurs comportements dans leurs plus grands détails, tu remarques toutes les relations de cause à effet, celles qui te paraissent les plus fréquentes, les plus répétitives, les plus stables. Tu les notes, fais des dessins, en gros tu les représentes : par ces mots que tu prononces, par ces symboles que tu écris ou que tu fais jaillir de ton ordinateur.

Le terme principal de la phrase précédente est « représentes ». Représenter notre environnement par nos sens et dans notre esprit d'abord, n'est-elle pas, avec celle de se nourrir, l'activité principale qui assure notre présence vivante ? Il y a donc une raison profonde pour que, dans ce traité, tu rencontres plus d'une fois ce terme essentiel de représentation . En écrivant que le premier rôle d'une « fonction » est de créer des « images », les auteurs lui confère ce statut : une fonction, une application est avant tout une représentation.

Ce disant, prends également conscience qu'une représentation n'est jamais, sauf exception, l'équivalent parfait de la chose qu'elle représente.

Les auteurs et les praticiens utilisent également le terme de « modèle » : une autre manière de dénommer une représentation.

Mais aussi, n'oublie jamais que la représentation est le fruit de l'observation, et de l'expérience :

- observation que tu pratiques constamment, souvent de manière inconsciente, mais ici plus attentive,*
- expérience que tu acquiers sous l'effet de la répétition de l'observation, observation du phénomène présent dans ton environnement dont tu t'efforces de mettre en évidence les transformations, les modalités d'action, les effets, imaginant, créant dans ce but, à l'aide d'outils appropriés, des spectacles mettant en évidence tous ces événements, tu en formaliseras ensuite les étapes et le contenu.*

Tu es donc d'abord observateur, physicien dans la recherche de descriptions et d'explications que tu transcris et transmets en discours simples et en jeux de symboles représentatifs. Ces jeux de symboles sont certes ceux que tu lis en ce moment, mais aussi évidemment tous ceux qu'utilisent les physiciens et mathématiciens pour expliquer ce qu'ils observent, décrivent et tentent de rendre intelligibles.

Dans tout discours mathématique, tu devras d'abord rechercher les raisons qui ont conduit à ce discours. Tu les découvriras dans les écrits des premiers savants qui ont introduit la signification et les raisons de la présence des termes que l'on emploie.

Une des notions les plus fondamentales est celle de stabilité. Tu n'es présent que parce que tu possèdes, dans tous les aspects de ta personne, des propriétés de stabilité. Elles sont la conséquence de l'équilibre des différentes forces qui s'exercent en toi. Un objet, soumis seulement aux effets de deux forces, n'est stable que si ces forces agissent en des directions opposées, tout en ayant la même valeur absolue. Elles sont symétriques l'une de l'autre.

La notion de symétrie est intimement liée à celle de stabilité. La stabilité ne peut s'affirmer qu'en présence de symétries internes, dont certaines peuvent parfaitement s'extérioriser : la plus évidente sans doute pour toi, et de surcroît la plus fondamentale, est celle de ta propre personne.

La notion de symétrie joue un rôle immense en physique, et il est très heureux et significatif que les auteurs de cet ouvrage l'introduise presque immédiatement après avoir défini la notion de représentation, à travers les définitions de fonction paire et impaire.

Une autre caractéristique si fréquente et très profonde de la stabilité est la répétition au cours du temps d'un même processus interne, comme celui, au sein du système solaire, du mouvement de la terre autour du soleil, raison pour laquelle les auteurs introduisent la notion de fonction périodique qui explicite cette répétition.

Une représentation (une fonction) étant donnée, il convient parfois de la déplacer ou bien de l'agrandir pour mieux la voir. Les auteurs montrent comment l'on peut procéder pour obtenir ces résultats.

À ce titre, on ne peut que se réjouir et féliciter les auteurs du traité que tu as entre les mains d'avoir, quand ils le pouvaient, renvoyé le lecteur aux sources des développements mathématiques que tu vas rencontrer. Ils évoquent par exemple ce très grand physicien et mathématicien que fut Newton. Le terme physique de « fluxions » qu'il emploie dans

ses travaux novateurs en matière de calcul différentiel n'est-il pas révélateur de son tempérament d'observateur ? On sait qu'il fut aussi un alchimiste convaincu et un grand expérimentateur en matière d'optique. Si les physiciens-mathématiciens qui l'ont précédé, observant par exemple les mouvements d'une roue, ont su définir la vitesse et la comprendre comme la variation de position par unité de temps, ce fut Newton qui formula précisément ce que certains avaient sans doute déjà compris, que l'accélération a , la variation locale de vitesse au cours du temps, est le résultat de l'action d'une force f . En d'autres termes à un coefficient m près : $f = ma$. N'est-ce pas la force musculaire soudainement déployée de tes muscles qui accélère le mouvement de ton bras ?

Tu remarqueras qu'en fin de leur chapitre (trois) consacré à la notion de dérivée, « emmené par le léger courant bleuté, l'élégant bateau dérivait lentement de sa trajectoire initiale », les auteurs donnent le bel exemple des caustiques observées et étudiées par le mathématicien-physicien allemand, Tschirnhaus. Cet exemple te rappelle le rôle de la lumière, de la physique de la lumière comme source de notions et de travaux mathématiques importants. C'est le cas, ici, de la notion de tangente (mathématique) : cette ligne, d'abord lumineuse puis représentée par l'artiste par un dessin auquel on finit par donner le nom de géométrique, n'est autre que la représentation celui-ci, singulier, des rayons de soleil qui, entre autres, illuminent la sphère, et qui au-delà de leurs présences se perdent dans l'infini sans plus d'effet sur la sphère. La notion de tangente n'est pas une notion abstraite et a priori issue de la machinerie mentale d'un mathématicien frigide, elle est intimement associée à un phénomène optique. Quant aux caustiques, ces lieux de lumière particuliers mentionnés dans la citation, ce n'est qu'au siècle dernier que leur description et leur classification furent menées à bien à travers le développement de la théorie des singularités des applications différentiables.

Et nous retrouvons ces singularités au chapitre cinq : elles correspondent notamment aux extrema des fonctions et applications que nous présentent les auteurs. En ces points ou dans les cas plus généraux ces ensembles de points en lesquels s'annulent les dérivées et leur généralisation, adviennent en effet des phénomènes visibles importants, souvent majeurs, parfois des mutations, voire des métamorphoses. Et ici est donc apparu le phénomène de l'extrémalité, une notion métaphysique, c'est-dire une notion correspondant à un phénomène naturel tout fait universel, que l'on observe sans cesse sans qu'aucune explication, ni aucune raison apparente le justifie, en somme tombant du ciel. La première exposition de cette présence de l'extrémalité, je l'ai trouvée chez cette très grande figure dans l'histoire de l'humanité, le savant-peintre Leonard de Vinci :

« Une cause étant donnée, la nature provoque l'effet par le court chemin possible. »

« Quoi que fasse la nature, personne ne peut le faire avec les mêmes moyens par un plus court chemin. »

Tout le calcul variationnel, qui conduit à la mise à jour du plus court « chemin » et que pratiquent tous les physiciens, est annoncé dans ces mots.

Claude Bruter

*Professeur retraité de Mathématiques de l'Université Paris-Est-Créteil
Président-fondateur de la Société Européenne pour les Mathématiques et
les Arts www.math-art.eu*

Galerie Abstract Project 2025

Art et Mathématiques 6 ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ-SYMÉTRIE 2025

De tout temps, dans toutes les cultures, l'homme a utilisé la symétrie pour comprendre le monde et créer un ordre, un équilibre, tendant vers la perfection. Platon pensait que les lois mathématiques qui dirigent le monde sont la source de la symétrie dans la nature, mais il ajoute que l'artiste utilise la symétrie intuitivement et ne connaît pas forcément ses lois.

Dans la série *Art et Mathématiques*, la sixième exposition est consacrée à ce thème. Les artistes participants utilisent tel ou tel type de symétrie en connaissant les théories mathématiques ou par intuition. On leur a demandé d'explicitier leur démarche.

Le Pr Claude Paul Bruter, auteur de nombreux ouvrages sur l'Art et les Mathématiques et fondateur de l'ESMA (European Society for Mathematics and Arts) auprès de l'Institut Poincaré, a bien voulu introduire le catalogue de cette exposition.

David Apikian

Les œuvres visuelles qu'un collectif d'artistes nous présente ici sont associées à quelques-unes des expressions premières de la symétrie. Elles sont les plus aisément intuitives, et donc probablement les plus fondamentales et de ce fait accessibles. Des travaux ultérieurs pourront faire entrer dans le dédale de leur enrichissement, mais c'est d'abord par l'assimilation et la compréhension des données premières et simples que peut s'approfondir la connaissance.

Le visiteur qui souhaiterait découvrir la diversité des symétries des objets répartis sur une surface plane, qu'ils soient eux-mêmes plans, ou bien que ce soient leurs ombres observées sur une telle surface alors qu'ils sont eux-mêmes situés au sein d'un espace de dimension plus élevée, pourra trouver une présentation immédiatement visible et complète de ces différentes symétries dans le bel article de Andreia Hall, paru dans le petit ouvrage publié en 2015 par l'éditeur Cassini, « *Mathematics and Art* » IV. Le visiteur pourra donc, a priori, associer à chaque œuvre qu'il rencontrera une sorte de sigle qui, en partie au moins, la caractérise.

Cela dit, l'artiste est un créateur qui a le droit de déformer et de pratiquer des constructions plus ou moins inattendues, elles peuvent déranger un moment notre appréciation. La réflexion sur ces « défauts » est souvent à l'origine d'un enrichissement de notre savoir, et du déploiement de nos créations.

Puisse le visiteur tirer le meilleur profit du regard posé sur ces œuvres originales.

Claude P. Bruter

ALLOCUTIONS DE VERNISSAGE

Note introductive: Ces allocutions furent adressées à des publics différents sur des thèmes tout à fait nouveaux pour la plupart d'entre eux. Les contenus de ces allocutions possèdent donc naturellement des points communs. Ils ont cependant tous leur originalité propre : elle autorise une lecture séparée et justifie leur présence dans ce petit recueil. La première allocution effectivement prononcée à l'Institut Henri Poincaré a été de contenu plus bref que celui, trop lourd, qui avait été préparé et qu'on pourra lire ici. La seconde allocution, faite à l'École Normale d'Instituteurs de Bonneuil en 2006, comprend quelques lignes de présentation (en jaune) qui, bien sûr, ne correspondent pas tout à fait à la réalité; peut-être, ont-elles été choisies par leurs auteures pour faire mieux passer mon message. On trouvera la liste des expositions, et leur contenu, auxquelles correspondent ces allocutions en allant sur : <http://www.math-art.eu/exhibitions.php#1>

Institut Henri Poincaré Paris 2005

Mesdames, Mesdemoiselles, Messieurs, chers Collègues,

Permettez-moi de vous remercier pour votre présence, et de dire quelques mots rapides sur l'exposition.

Elle présente un caractère quelque peu exceptionnel pour célébrer simultanément deux événements, la remise d'un prix prestigieux d'une part, la naissance de la Société Européenne pour les Mathématiques et les Arts d'autre part, l'attribution du prix de l'Institut Clay à Grigori Perelman, il a récemment apporté la preuve finale et difficile de la dernière conjecture géométrique d'Henri Poincaré. Il était naturel que l'Institut, dont le nom honore ce très grand mathématicien, soit le lieu de remise du prix. L'exposition entend rendre hommage à tous les acteurs présents et passés de cet événement, à commencer par Poincaré lui-même.

Quant à la Société Européenne pour les Mathématiques et les Arts, elle s'apprête à tenir, dans ce même Institut qui lui a généreusement ouvert ses portes, son tout premier Colloque. Une exposition des œuvres de ses participants va de soi.

Le public ne manquera pas de s'étonner que les mathématiques les plus savantes conduisent à la création d'œuvres d'art. Œuvres d'art en effet par la beauté des contours et des lignes, leur pureté, leur richesse picturale et parfois mathématique, la nouveauté, la diversité et l'abondance des contenus. Par la

nature même du nombre, les mathématiques nous font entrer dans un monde fabuleux et infini de formes jusqu'alors inconnues, que des artistes d'avant-garde s'emploient à incarner dans la matière, faisant appel à toutes les nouvelles technologies et techniques créées au cours de ces trente à quarante dernières années.

Les visiteurs d'aujourd'hui sont évidemment privilégiés, pour être parmi les premiers à découvrir des œuvres de pionniers dans un mode nouveau d'expression artistique, appelé à des développements considérables, et qui rendront inestimables la valeur de ces œuvres nouvelles. Tant et si bien qu'on finira par construire un musée spécifique dédié aux arts mathématiques et aux mathématiques, musée dont l'absence jusqu'à ce jour n'a pas fini d'étonner, de surprendre, de laisser pantois.

Alors les quelques 35 artistes représentés dans cette exposition trouveront le cadre qui permettra de mettre pleinement en valeur leurs œuvres.

Elles ne sont ici que quelques-unes, puisées dans le fonds dont nous disposons, présentées non pas par auteur mais selon leur contenu mathématique.

Au rez-de-chaussée sont les œuvres les plus directement en rapport avec quelques-uns des travaux de Poincaré sur le mouvement, et surtout sur les espaces, en particulier ceux de dimension 3 et 4, au sein desquels ont lieu ces mouvements.

A l'étage, dans la bibliothèque, trois thématiques principales sont présentes :

- remplissage d'un domaine par des motifs identiques dans l'entrée et le fond de la bibliothèque
- formes minimales que développe le monde physique, le long du couloir le plus éclairé, donnant sur l'extérieur du bâtiment
- surfaces issues de la géométrie algébrique et de la résolution de certaines équations aux dérivées partielles dans le reste de la bibliothèque.

Ces thèmes sont illustrés tant par les tableaux que par les petites sculptures dans les vitrines.

Je n'ai cité aucun noms des artistes présents. Puis-je simplement rappeler qu'ils s'inscrivent dans une tradition immémoriale qui lie les arts aux mathématiques, tradition dont le peintre Agatharque qui fit les décors du théâtre d'Eschyle, Dürer et Vinci à la Renaissance, Dali au siècle dernier, sont parmi ses plus illustres représentants,. Nul doute que plus d'un de ceux que vous allez découvrir laissera son nom dans l'histoire de cette tradition.

Je vous remercie de votre attention, et vous souhaite une fort agréable visite.

Ecole Normale d'Instituteurs de Bonneuil

2006

Chers Collègues,

Permettez-moi d'abord de remercier toutes celles et tous ceux grâce auxquels cette exposition est aujourd'hui présente en ces lieux. **Annie Ceresuela** du Rectorat et **Gilles Bogaert** de l'Ecole Polytechnique ne sont pas pour rien dans cette affaire.

On peut attribuer à une telle manifestation des objectifs très divers, le premier d'entre eux, à mon sens, étant de faciliter la réconciliation du public avec les mathématiques, et à travers elles, avec toutes les sciences dont elles constituent le support indispensable.

Bien des raisons ont contribué à détourner nos concitoyens des mathématiques. On peut citer, entre autres, les idées fausses qui ont pu circuler à son encontre, les exigences parfois mal fondées des mathématiciens eux-mêmes, des programmes pas toujours très bien conçus, une méconnaissance de ce que sont les mathématiques, de la manière dont elles ont été créées, de la manière dont elles évoluent. Il faut ajouter en bonne place les diverses facettes de l'état de notre société, l'omniprésence des écrans de toute nature qui n'incite pas forcément au travail, le volume considérable des nouvelles connaissances qu'on voudrait faire acquérir à nos successeurs.

Ce qui est importe avant tout, aux yeux du pédagogue, est la formation de l'esprit. Une formation est réussie si elle rend l'esprit curieux, un esprit qui, certes, cherche à savoir, mais surtout à comprendre. On éprouve le sentiment de comprendre, soit de manière directe, intuitive, soit parce qu'on est capable de donner une explication.

En mathématiques, donner une explication est appelé faire une démonstration. Il convient sans doute de rappeler aux élèves la signification de cette activité principale qu'on leur demande de conduire à travers l'enseignement de notre discipline, d'attirer leur attention sur ce fait.

Il a fallu trois siècles et demi pour parvenir à donner la justification d'un énoncé de **Fermat**. Des énoncés ont des explications faciles et quasi immédiates ; d'autres exigent davantage de temps d'élaboration. Il est un message simple que les professeurs ne pensent peut-être pas toujours à faire passer à leurs élèves. Ce message est celui de leur propre expérience. Un exercice, un problème ne se résolvent pas toujours sur le champ. Mais c'est un fait d'expérience qu'avec le temps, de la persévérance, on parvient presque toujours au succès, gratifiant pour l'amour-propre et qui donne confiance en soi. Adieu aujourd'hui la poésie, adieu **Boileau** qui nous apprenait : « Vingt fois sur le métier remettez votre ouvrage. » Vous n'arrivez pas à résoudre votre problème, eh bien, laissez-le en dormance, faites autre chose, jouez aux billes ou à chat, mais voyez si demain vous parvenez à progresser. Et n'abandonnez pas tant que vous n'avez pas atteint le but final. Rédigez alors votre texte avec soin. Le travail du mathématicien est artisanal, le produit que vous livrez doit avoir sa beauté d'exécution, de présentation.

Il y a la beauté de ce que vous faites, il y a la beauté de la matière sur laquelle vous travaillez. Celle-ci est plus longue et difficile à saisir.

Vous trouvez qu'un objet est beau parce que, d'abord, vous avez la possibilité de l'appréhender dans sa globalité, et parce qu'il se produit des sortes de résonances entre ses propriétés et celles qui sont les vôtres, qui sont constitutives de votre être. Il est beau parce que, comme vous, il possède des propriétés d'équilibre dynamique : il ne s'agit pas d'une symétrie pure qui attire l'œil, mais qui, trop parfaite, par son excès, peut aussi le fatiguer, voire le blesser ; cet équilibre dynamique est marqué par la présence d'une dose subtile de chiralité qui confère un mouvement, une sorte de potentialité de vie interne. L'objet possède comme vous des pans de forme harmonieuse, des effets de couleur à la fois stimulants et apaisants qui enchantent le regard, mais aussi une personnalité, une originalité qui le rend singulier, unique, et suscite alors la plus vive curiosité.

Il n'est pas possible, en ce moment, de donner aux élèves la connaissance d'une seule théorie mathématique dont ils puissent dire qu'elle est belle. Autrefois, il arrivait qu'on y parvienne parce qu'on enseignait de manière intelligente et adaptée à l'esprit encore très concret des enfants, un pan suffisant de géométrie euclidienne. On a détruit cette possibilité en réduisant le contenu géométrique, en introduisant quelques démonstrations trop abstraites pour eux, et en développant un formalisme calculatoire sans visibilité physique. La sensibilité des enfants et des adolescents ne trouve en général aucun intérêt à ces contenus. Revenir à des contenus d'enseignement plus proches de la sensibilité naturelle ne peut que désamorcer le rejet des mathématiques, et ces contenus peuvent être très modernes.

Parlons à nos enfants de leurs poupées, de leurs voitures, de leurs chats ou de leurs chiens, et d'un tableau de nombres, et voyons leurs réactions. Voyons si un enseignement basé sur la description d'un tableau de nombres a quelque chance de fasciner la plupart des élèves ou des étudiants. On court à l'échec car, à part quelques exceptions bien sûr, un tel tableau n'a aucune signification pour eux, leur esprit n'est pas encore formé à l'abstraction, il leur faut encore la familiarité avec une forme de concret.

La visibilité des objets géométriques la leur apporte. C'est d'ailleurs par elle que s'accomplit une bonne part du progrès dans notre science. Je dessine un triangle, des médianes, des hauteurs, je constate qu'elles semblent concourir. Je répète l'expérience qui me convainc du fait. J'en cherche l'explication, je suis heureux de la trouver.

A force de manipuler les objets, par le regard ou par le toucher comme **Bernard Morin** et les mathématiciens aveugles peuvent le faire, on acquiert une familiarité suffisante avec ces objets pour être capable de décliner un bon nombre de leurs propriétés et de donner l'explication de leur présence. C'est la raison pour laquelle certains font beaucoup de visualisation et de manière très savante. C'est le cas par exemple de quatre au moins de nos exposants : **Jean-François Colonna** qui réalise de très nombreuses visualisations à la demande des physiciens ; **Thomas Banchoff**, maintenant retraité, mais qui a travaillé surtout en topologie différentielle ; **Bill Casselmann** qui travaille entre autres sur les pavages et les groupes de **Coxeter** ; et **Mike Field** qui travaille sur les systèmes dynamiques présentant de singularités et des symétries. Tous bien sûr font ces visualisations également pour leur plaisir.

Les élèves peuvent-ils tirer un bénéfice d'une visite, les œuvres exposées peuvent-elles avoir une utilité pédagogique ?

Notons d'abord que le contenu de cette exposition est un reflet de l'étendue et de la richesse de l'univers mathématique. A ce titre, il est avant tout un élément culturel qui ouvre et éclaire l'esprit sur la substance même de notre science. Il n'a pas, a priori, la prétention d'être un outil de formation technique, spécialisée. Il peut le devenir cependant pour des étudiants avancés. Il apporte avant tout une information de qualité sur les mathématiques parce qu'il en montre des incarnations fidèles, authentiques, soignées, conformes aux idéaux qui animent les protagonistes de cette discipline.

On y voit des objets parmi les plus récemment créés. Au sortir de l'exposition, le visiteur est donc à la page. Comme il n'a eu à fournir aucun effort intellectuel particulier, comme le simple regard suffit pour appréhender les objets qu'il côtoie et qui n'ont rien de repoussant, parfois bien au contraire, le visiteur finit par acquérir un premier degré de familiarité avec les objets mathématiques, et peut-être accepte-t-il alors l'idée que faire des mathématiques peut présenter un vif attrait.

Ce qui est remarquable également, est que ces mathématiques peuvent être pratiquées à différents niveaux : niveaux d'âge, niveaux de technicité.

On peut demander par exemple à un tout jeune enfant de réaliser des frises, de proposer des pavages, de construire des polyèdres, sans lui dire quoi que ce soit, puis en l'aidant, si besoin est ; on peut alors lui décrire les propriétés les plus élémentaires de ses réalisations : commence ainsi une initiation aux mathématiques. Le professeur des écoles est la fois le professeur d'art et de mathématiques. Dans le secondaire, on peut aller plus loin dans la réalisation et dans la technique : le professeur d'art et celui de mathématiques peuvent travailler de conserve sur des projets pédagogiques communs. Bien conçues, on peut avoir là des activités dont le contenu mathématique peut être d'une grande richesse tout en restant simple.

Pourquoi choisir ce thème des frises et des pavages : parce qu'il a été pratiqué par les hommes depuis la préhistoire ; il correspond donc à une disposition de l'esprit profondément enracinée, que les enfants par conséquent peuvent extérioriser sans surprise et rejet de leur part.

Un autre thème est présent dans cette exposition, celui de l'étude des formes en soi, étude qui ressort de la topologie dite différentielle et qu'on a nommé autrefois, de manière plaisante, la géométrie du caoutchouc. Les tout-petits peuvent la pratiquer, qui n'ont pas encore l'esprit ligoté par le corset métrique façonné par notre éducation. Avec de la pâte à modeler, ils construiront des polyèdres ou des surfaces lisses comme des boules plus ou moins sphériques, des tores pleins, des objets avec des anses, et ils apprendront à compter le nombre de faces, le nombre de trous, ils apprendront à découvrir des invariants et à expérimenter la formule d'Euler. Ils découperont par le milieu un ruban de Möbius, et essayeront de comprendre ce qu'il est advenu. Et avant de chercher à les classer, les plus grands peut-être feront et se feront des nœuds. Mais sans doute la réflexion, au cours ou après votre visite, vous conduira-t-elle à faire beaucoup d'autres suggestions. La mathématique est une science vivante, la pédagogie aussi.

C.P. BRUTER

Thessaloniki Grèce 2006

Mesdames, Messieurs, chers Collègues,

Ces premiers mots seront pour vous faire part tout à la fois de mon émotion et de ma reconnaissance. Emotion de me trouver, grâce à vous, et vous en particulier Henri Béranger, dans cette Grèce lumineuse, ensoleillée, où s'est épanouie il y a quelques siècles cette très riche activité artistique et intellectuelle qui a fécondé notre civilisation. Je voudrais dire ici combien je me sens lié, combien je suis redevable à ces hommes de cœur et de pensée, poètes et tragédiens, physiciens, mathématiciens et philosophes, dont les œuvres, et la réflexion, ne m'ont jamais quitté, et ne cessent de faire mon admiration.

En cette Macédoine où naquit Alexandre, Alexandre le Grand, on évoquera bien sûr la figure de son précepteur, Aristote, ce brillant élève de celui pour lequel j'ai une plus grande affinité, Platon. Platon est encore l'homme de théâtre, le poète qui fait jaillir la vérité des profondeurs de l'être et de la nature. Aristote est déjà le savant, plus rationnel, qui comprend et analyse en profondeur. Il est à ma connaissance le premier qui ait mis en lumière avec une telle vigueur le fonds commun aux productions artistiques et mathématiques, à savoir le beau. Il en fait l'éloge implicite dans son traité de Métaphysique :

« ..., les philosophes qui prétendent que les sciences mathématiques ne font aucune place au beau, ni au bien, sont assurément dans l'erreur : le beau est, au contraire, l'objet principal du raisonnement de ces sciences et de leurs démonstrations. Ce n'est pas une raison parce qu'elles ne le nomment pas pour dire qu'elles n'en parlent pas, car elles en montrent les effets et les rapports. Les formes les plus hautes du beau sont l'ordre, la symétrie, le défini, et c'est là surtout ce que font apparaître les mathématiques. Et puisque ces formes (je veux dire l'ordre et le défini) sont manifestement causes d'une multitude d'effets, il est clair que les mathématiques doivent considérer comme cause d'une certaine manière, la cause dont nous parlons, le beau en un mot. »

La mathématique est la science de la forme, du mouvement qui engendre la forme, et du nombre par lequel on peut décrire avec précision la forme et le mouvement. Le lien entre les mathématiques et les arts est un fait solidement avéré par leurs enrichissements mutuels. C'est évidemment au niveau conceptuel, au niveau de leur vocation véritable que les deux disciplines se rejoignent. Les mathématiques et les arts ont pour vocation commune de représenter l'espace, ses propriétés, les objets qui le meublent. Les mathématiques s'efforcent de révéler la nature et le contenu structurel de l'espace en s'appuyant sur l'expérience de pensée. Les arts, de leur côté, faisant appel non à la sensibilité rationnelle comme le font les mathématiques, mais à des formes à la fois plus physiques et affectives de la sensibilité, s'attachent à mettre en valeur non seulement les propriétés mises en avant par les mathématiciens, mais également d'autres, toutes celles notamment qui stimulent notre appareil sensoriel, nous font vibrer. Matériaux et couleurs, que les artistes travaillent avec patience, animent les formes et exaltent leurs qualités.

Le passé artistique de la Grèce nous révèle l'importance de la période dite géométrique. La géométrie s'inscrit sur les vases, et sur les sols comme on peut le voir à Pella. Pourrait-on émettre la conjecture qu'en général toute période figurative a été précédée par une période non figurative à tendance géométrique ? Le devenir de l'exposition permettra-t-il de valider ou d'infirmer cette conjecture ?

Je ne dirai ici que quelques mots sur les mobiles à l'origine de cette exposition. Elle s'inscrit dans un cadre plus vaste, dénommé le projet ARPAM. Projet culturel, artistique, mathématique, pédagogique, il vise d'abord à affaiblir sinon à faire tomber les barrières psychologiques qui séparent le public en général des mathématiques, à travers la mise en contact avec des œuvres d'arts, architecturales, plastiques, musicales, dont la création est sous-tendue par le contenu des mathématiques. Il existe maintenant un consensus de la communauté internationale des mathématiciens pour soutenir ce projet.

Mais revenons à notre exposition où tous les grands chapitres de la géométrie moderne sont représentés : géométrie différentielle, topologie différentielle, topologie

dynamique, géométrie hyperbolique, géométrie des pavages, géométrie des polyèdres, géométrie fractale, perspective. Ne soyons pas trop effrayés par cette avalanche de termes au premier abord ésotériques. Tout comme Monsieur Jourdain faisait de la prose sans le savoir, bien des artistes de l'antiquité ont pratiqué à leur manière ces formes de la géométrie.

Chacune des œuvres présentées ici est associée à un savoir mathématique et parfois informatique fort développé. Certaines d'entre elles sont l'aboutissement de recherches d'un grand intérêt, conduisant même à une compréhension meilleure de la réalité mathématique sous-jacente. Leur diversité laisse entrevoir l'extraordinaire richesse de l'univers des objets mathématiques, un univers aussi attirant et fascinant à explorer que celui du monde physique qui nous entoure.

Chaque tableau a une originalité de conception, de forme, une harmonie de couleurs, une sonorité, un timbre qui lui confèrent une personnalité à toute autre incomparable. Dans chaque œuvre, les mathématiques s'incarnent ainsi avec discrétion, pudeur, mais aussi profondeur et humanité.

Chacune de ces œuvres d'art nous met en contact avec un fragment de cet universel que les mathématiques s'emploient à dévoiler et à décrire. Et alors ces mêmes personnes qui regardent ce même tableau, unis par ce même fragment d'universalité, partagent ces mêmes réactions inconscientes, secrètes, informulées. L'œuvre d'art, soutenue par la lumière de la mathématique, œuvre de communication, devient une œuvre de communion, une œuvre de fraternité.

Centre Culturel Christiane Peugeot Paris 2008

**Madame Christiane Peugeot,
Monsieur François Tard, Mesdames, Mesdemoiselles, Messieurs, mes Amis qui
êtes venus parfois de loin assister à cette manifestation,**

Je vous remercie de votre présence. Je remercie en particulier Christiane Peugeot, qui, par l'entremise de l'avisé François, nous a généreusement ouvert les portes de sa magnifique galerie. Permettez-moi, à tous, de vous dédier cette définition des mathématiques : un univers de représentations constituant une physique abstraite où l'on pratique sans cesse l'expérience de pensée. Cet univers est d'une richesse fabuleuse, qui dépasse notre entendement, et que nous commençons à peine à découvrir.

La mise au point récente d'un nouvel outil facilite aujourd'hui son exploration. Cet outil, vous l'avez deviné, est l'ordinateur qui fait entrer l'humanité dans une ère nouvelle. On lui doit en partie la création de la majorité des œuvres qui sont présentées ici. Ces œuvres originales, par leurs qualités artistiques, leur signification, les procédés employés pour les créer, sont des premières qui, sans nul doute pour certaines, resteront dans l'histoire de l'art et des hommes comme les symboles de ce changement profond de civilisation. Il serait pertinent qu'un musée ad hoc puisse assurer leur pérennité.

C'est là un vœu que je formule en ce début d'année. Puissent les dieux l'exaucer !

Avant de procéder aux libations, accordez-moi encore quelques instants pour vous présenter cinq des exposants, cinq seulement car le sixième français, Patrice Jeener, ne dispose pas des ressources financières qui lui aurait permis de se joindre à nous, car également tous les autres exposants n'ont pas de pied à terre dans notre pays. Je vous présente donc François Apéry, un de nos très bons mathématiciens et qui a rendu étincelant le retournement de la sphère, Philippe Charbonneau le créateur de splendides biconiques élancées, Jean-François Colonna mathématicien informaticien et peintre fécond et fort connu du monde fractal, Philippe Rips qui fait jaillir des polyèdres des œuvres inattendues et élégantes, et enfin un tout nouveau dans notre groupe, François Tard, ancien polytechnicien que connaissent bien les amis de Christiane Peugeot, il a approfondi le contenu théorique sous-jacent à quelques œuvres classiques, d'où il a déduit la matière d'œuvres nouvelles. Vous découvrirez également, dans les profondeurs de cette galerie, un merveilleux ballet

créé pour le CERN par Cyril Vacher. Selon le philosophe Alain, « il faut prendre l'idée de celui-là même qui l'a inventée ». Vous n'aurez donc pas de meilleurs guides pour parcourir cette exposition que tous ces créateurs dont vous venez de faire la connaissance. Je vous souhaite une heureuse et réjouissante visite.

Dans l'évolution de cet univers, quelques questions clés ont joué un rôle moteur dans son évolution. L'un des défis posés aux mathématiciens a été et reste de parvenir à résoudre des équations. Dans la première salle à ma gauche, vous allez voir des œuvres de Bahman Kalantari, mathématicien américain d'origine iranienne. Ces œuvres sont basées sur un algorithme de résolution des équations polynomiales. J'ignore qui d'entre vous, alors au Lycée, a jamais imaginé que résoudre l'équation $x^2 + 2 = 0$ pouvait conduire à la création d'un tableau coloré comme celui intitulé le hibou, the owl. Étonnante mathématique, étonnant esprit humain aussi. Face à Kalantari, trois œuvres seulement de Nat Friedman, également mathématicien américain et créateur d'Isama, la société internationale pour les arts, les mathématiques et l'architecture. Tapez sur google Isama et découvrez l'importance de cette société, de ses activités, du nombre de ses adhérents. À partir de blocs de granit qu'il a brisés, Nat Friedman s'est amusé ici à créer une sorte d'illustration astucieuse des côtes de Bretagne, dont le dessin fournit l'un des premiers exemples célèbres de courbe fractale. Entre Bahman et Nat, six œuvres joyeuses, gaies, riches en couleurs, de Jean Constant. Ce n'est pas un mathématicien. Mais c'est un merveilleux manipulateur des formes à l'imagination féconde.

Centre Culturel Christiane Peugeot Paris 2009

Mesdames, Mesdemoiselles, Messieurs, Mes chers Amis,

Permettez-moi, avant tout, de remercier Christiane Peugeot et toutes les personnes qui l'entourent, de nous accueillir dans ce lieu, marqué par la générosité et l'ouverture d'esprit. Tous les artistes qui ont exposé ou exposent ce soir vous font part de leur reconnaissance.

Merci aussi à tous d'être venus si nombreux, et parfois de loin. Je suis heureux de vous retrouver ce soir auprès de ces très belles œuvres dont on appréciera toutes les richesses, qu'elles soient mathématiques, de composition, ou picturales.

Leurs créateurs les plus éloignés, qu'ils vivent à Anvers, La Motte Chalancon ou Montréal n'ont pas pu venir, parfois par un empêchement imprévu. Seuls par conséquent Philippe Rips qui a réalisé les beaux objets placés dans la vitrine, Jean-François Colonna qui habite tout près de l'Ecole Polytechnique, et François Tard, le plus parisien peut-être des trois, sont présents ; ils répondront avec brio à toutes vos interrogations concernant leurs œuvres et la manière dont ils travaillent. Cerise sur la gâteau, Jean-François nous a apporté une œuvre supplémentaire, une surprenante image en relief.

De par l'absence des autres artistes, je me dois de dire un mot bref sur leurs travaux. Le cas de Patrice Jeener est particulier : c'est un graveur, un des derniers qu'ait produit l'école française, et le seul graveur au sein de la communauté internationale des artistes scientifiques. Fasciné par la pureté des lignes, il s'est efforcé d'abord de reproduire les objets mathématiques dans leur nudité. Ses domaines de prédilection sont naturellement géométriques au sens large : les polyèdres, incarnés dans la nature sous la forme des cristaux, les surfaces topologiques comme celles de Boy et de Morin qui apparaissent dans les solutions du problème posé par le retournement de la sphère, les surfaces minimales, Patrice en a découvert quelques-unes. Six de ses œuvres exposées montrent un florilège de ces surfaces minimales : on les rencontre dans la nature prêtant leur forme aux coquillages ou, m'a-t-il semblé, aux vieux bois.

Les autres artistes travaillent un peu différemment puisqu'ils manient la couleur. L'anversoise Jos Leys utilise les palettes données par les logiciels comme par exemple le logiciel Power Ray. Utilisant leurs algorithmes, il travaille avec les mathématiciens, pour lesquels il fournit de magnifiques illustrations. Celles qui sont exposées se rattachent à une autre problématique générale que celle de la recherche d'objets : comment la nature remplit-elle l'espace ?

Cet espace peut être celui sur lequel nous déplaçons : un sol plan, un sol ayant la forme d'un grand vase, on dira que ce sol est hyperbolique, ou bien un sol ayant la forme d'une sphère, mais placée dans un espace à 4 dimensions. Si la sphère était placée dans notre espace usuel, on pourrait la remplir de cercles, les deux pôles de la sphère étant des cercles singuliers de rayon nul. Une sphère de l'espace à 4 dimensions peut être feuilletée par des courbes fermées un peu plus compliquées que le cercle et qu'on appelle des nœuds de trèfle, on en voit un dans la vitrine, matérialisé par Philippe Rips. Deux tableaux de Jos, Seifert et Matrix 3, sont relatifs à ce feuilletage. Papillons 1 et 2 sont des œuvres à la Escher, relatifs au pavage de représentations d'un sol hyperbolique. Penrose 1, fait en dentelle d'Anvers, se rapporte au pavage d'un sol habituel plan. Les autres tableaux sont issus de versions particulières de la problématique générale, elles ont été introduites par Félix Klein à la fin du 19^{ème} siècle : comment remplir complètement un domaine fermé avec des billes, ou s'il est plan avec des cercles, qui savamment coloriés, donnent l'impression de billes, de perles. Dans cette série, le tableau Indra Family a servi d'affiche au congrès international des mathématiciens tenu à Madrid en 2006.

Jean Constant et Luc Bénéard travaillent également avec des logiciels produisant des formes mathématiques, comme par exemple ceux écrits par l'éminent mathématicien Richard Palais. Mais il les retravaillent savamment sur le plan de la forme, sur le plan de la couleur, et ils créent des compositions très originales, des spectacles toujours nouveaux, inattendus, faisant appel à toute la richesse des objets présents dans l'univers mathématique. On admirera leur inventivité, leurs jeux de lumière.

Le fait est que nous sommes ici en présence d'une petite pléiade de créateurs, reconnus, très recherchés par la communauté scientifique locale et internationale. Ainsi grâce au talent inventif de ces artistes, nous pénétrons un peu dans le monde fabuleux des mathématiques. Permettez-moi avant de nous quitter de dire un mot sur ces expositions en général et sur les mathématiques.

Ces expositions représentent la part la plus facile à réaliser d'un projet soutenu par un panel international de mathématiciens, et qui vis à créer, sur un domaine assez étendu, un musée des mathématiques. Un musée éclaté en ce sens que chaque salle est maintenant devenue un petit bâtiment à l'échelle humaine, ce qu'on appelle une folie, dont l'architecture et le contenu décoratif sont entièrement définis par les mathématiques. Un des objectifs de ce projet est de contribuer à abaisser sinon à effacer les barrières psychologiques qui séparent le grand public des mathématiques, en faisant appel à toutes les ressources des arts. Soyez d'ailleurs convaincus que la

majorité des mathématiciens considère que leur discipline est également une forme d'art.

Mais elle aussi une forme de physique abstraite. Il existe une sorte de flèche qui transpose le monde physique dans le monde mathématique, qui en assure la présentation et la représentation. C'est bien sûr l'homme, le mathématicien, qui est le support matériel et actif de cette flèche.

Mais il existe une autre flèche, dans le sens inverse, qui donne une présentation de l'univers mathématique dans l'univers matériel, qui permet d'incarner le monde mathématique au sein du monde matériel. Là encore, ce sont des hommes, passionnés et doués, pénétrants, qui sont les acteurs de ce reflux enrichissant.

La mathématique apparaît donc comme une sorte de miroir : l'homme est à la fois le support du rayon incident qui envoie l'univers matériel sur le miroir, et le support du rayon réfléchi qui renvoie l'image sur l'univers matériel.

Mais rayons incidents et réfléchis n'ont pas tout à fait les mêmes propriétés, car, si les rayons incidents modèlent le monde mathématique, les rayons réfléchis ont le pouvoir à leur tour de modeler l'univers matériel.

Il existe donc, via l'homme, une transformation du monde matériel dans le monde mathématique, et la question se pose de savoir s'il existe des invariants locaux ou globaux pour cette transformation.

Mais revenons à notre exposition. Les tableaux que vous allez voir ou que vous avez vus vous laisseront sans doute quelques traces dans votre subconscient, dans votre regard et peut-être dans vos interrogations sur le monde. Le contact avec ces œuvres est ce soir bien rapide. Mais lorsque l'on devient familier avec chacune d'elles, alors à travers ces toiles rayonnent l'intense activité intellectuelle et chaleureuse de leurs auteurs, les formes subtiles des variations incessantes de leur sensibilité.

L'art moderne, car nous sommes ici en présence de l'art moderne dans sa vérité, est ainsi profondément chargé d'humanité. Merci.

Mairie du Ve Paris 2012

Monsieur le Maire,

Madame Elise Picard, Mademoiselle Mokriti, Madame Vaudoyer-Poisson,

Tous les présents ce soir, se joignent à moi pour vous remercier, sincèrement, de nous avoir offert, avec votre soutien complet, la possibilité de présenter cette exposition en ce lieu quelque peu symbolique car il porte le nom d'un juriste et résistant célèbre. L'exposition consacre des oeuvres d'art plastiques, inspirées par la beauté des objets mathématiques que ces oeuvres matérialisent et nous révèlent. Accompagnée d'exposés originaux d'initiation aux mathématiques faits devant des élèves de classes primaires, de collèges ou de lycées, l'exposition s'inscrit dans le cadre des activités de la Société Européenne pour les Mathématiques et les Arts, l'ESMA, porteuse également d'un projet déjà ancien de Parc Mathématique que, semble-t-il, nos collègues russes s'appêtent à réaliser. Il m'est impossible, en quelques minutes, de décrire la richesse informatique, artistique, mathématique et scientifique de chacun des tableaux parmi la centaine qui sont sous vos yeux, de chacune des sculptures parmi la trentaine qui sont exposées, en un mot de faire valoir la diversité, la signification, et le degré d'originalité des oeuvres présentes dans cette exposition, d'art moderne, s'il en est, tant par son contenu que par les techniques mises en oeuvre, d'art abstrait, selon l'apparence, car la mathématique est une manière de physique abstraite, et les objets de son univers ont des liens parfois peu immédiats mais profonds avec notre environnement physique. Chacun des critères, informatique, artistique, mathématique, permet bien sûr de fonder le jugement porté sur une oeuvre.

Je ne pourrai pas non plus évoquer quelques-uns des fondements des relations entre les mathématiques et les arts, et les activités humaines d'une façon plus générale.

Mais en cet instant, puisque nous nous trouvons dans la salle René Capitant, permettez-moi d'esquisser très rapidement un parallèle entre les activités de ce grand juriste et celles des mathématiciens.

Chacun connaît la rigueur morale et logique du raisonnement du juriste, elle a bien sûr son pendant dans l'argumentation du mathématicien qui doit prouver. Qui par ailleurs, pense et dit résistance, évoque une matière difficile, un chemin parsemé

d'obstacles à franchir, parfois dangereux, une persévérance à tout épreuve. Les mathématiciens, certes, ne connaissent pas dans leur vie professionnelle en général les malheurs et les violences physiques qu'ont eu parfois à subir les résistants aux diverses oppressions. Mais ils rencontrent constamment l'obstacle intellectuel qu'est l'affirmation à justifier que nous appelons conjecture. La renommée le rapporte : des siècles de lutte ont parfois été nécessaires pour venir à bout de certaines de ces conjectures, comme celles de Fermat et de Poincaré. La persévérance gagne quand elle repose sur l'intuition profonde du vrai qui renvoie à la réalité, et du juste qui renvoie à la stabilité, le vrai et le juste qui, selon Platon, participent du socle de la Beauté bienfaisante, dont nous avons tant besoin dans les temps difficiles, et que nous rencontrons souvent, rayonnante, dans l'univers aérien de nos mathématiques.

Merci.

Mairie du Ve Paris 2018

**Madame la Maire,
Chers Collègues, chers Amis,**

Tous mes collègues, artistes et mathématiciens, se joignent à moi pour vous remercier, très sincèrement, et chaleureusement, de nous avoir offert le présent d'être réunis ce soir avec nos amis, en ce lieu remarquable, nous permettant de montrer des œuvres peu communes, et de favoriser ainsi une forme subtile de contact entre un public curieux et ouvert, un public de tous âges, et l'univers varié des mathématiques. Les propos d'une personne visitant hier l'exposition m'ont marqué. « C'est mon petit-fils qui avec instance m'a dit de venir. Il est très doué, notamment pour le dessin. Il est venu ici avec sa classe, et il a été ébloui. Il ne parle que de cela à la maison, et il veut revenir avec ses parents ». Cet enfant, ses grands parents, ses parents et moi-même, Monsieur le Premier Adjoint, nous vous remercions.

Certes, je ne commenterai pas en ce moment le contenu très vaste de cette exposition, la 26-ième de notre société, 32 exposants de 9 nationalités différentes, une centaine d'œuvres relevant, de manière évidente ou très cachée, de thèmes mathématiques très divers, certains véritablement très actuels, et dont l'explication détaillée, approfondie, est temporellement illusoire. Six des participants feront chacun à l'Institut Henri Poincaré le 20 mars un exposé sur le contenu mathématique de leurs œuvres. C'est d'une autre façon et dans une autre perspective que, pour ma part, je montrerai quelques-unes d'entre elles le 20 mars. Peut-être dirais-je aussi un mot sur la signification du mouvement artistique.

Permettez-moi de rappeler très brièvement les origines de notre société, de notre association dont le sigle anglais est ESMA.

L'ESMA est fille de l'ARPAM, une association née en 1991 pour la création d'un parc mathématique, un vaste domaine boisé et fleuri dans lequel serait implantée une dizaine de petits bijoux d'architecture, appelés folies, conçues, dessinées et décorées par les artistes mathématiciens, destinées à la fois à la flânerie, au plaisir des yeux, dans le même temps, à initier les promeneurs à quelques concepts et faits mathématiques importants. Un embryon de ce projet va être réalisé à Moscou. Nos collègues russes viendront le présenter à l'Institut Henri Poincaré le 20 mars

également, et pourront la semaine prochaine, en même temps que remplir les vitrines, projeter ici même une petite vidéo. L'ESMA est, en quelque sorte, une extériorisation de la part esthétique de ce projet, soutenu à son origine par les plus brillantes instances politiques et universitaires.

[À l'exception de celle de Fomenko rendant hommage à Dürer, le contenu des œuvres présentées dans cette exposition ne se retrouve chez aucun des peintres classiques. C'est dire la richesse de l'univers des formes mathématiques, le potentiel de fécondité des mathématiques. Nous nous trouvons ici à l'orée d'un champ nouveau et immense dans son étendue de l'art visuel.]

Un jour quelques-unes de ces œuvres, dont certaines sont des chefs d'œuvres, non seulement par leurs qualités propres associées à leur richesse d'invention mathématique, informatique et esthétique, mais aussi parce qu'elles sont pionnières, expressions des fascinantes possibilités de raisonnement et de création de l'esprit humain, auront de toute évidence leur place dans des musées.

Déjà, la Maison des Mathématiques, située à quelques pas d'ici dans le prolongement de l'Institut Henri Poincaré, et qui verra le jour dans deux ans, abritera une première salle consacrée aux petites sculptures mathématiques dont François Apéry parlera le 22. Ne reviendrait-il pas à tous les responsables des arts de préparer l'accueil de toutes ces réalisations qui, employées comme outils de formation de la pensée, accompagnent et symbolisent les progrès de l'intelligence, et honorent l'humanité ?

Mairie du V^o Paris 2020

Note préliminaire: Après nous avoir souhaité la bienvenue, relevé la présence de Sylvie Benzoni, la directrice de l'Institut Henri Poincaré, Madame la Maire a notamment rappelé la place que les activités culturelles et mathématiques occupent dans son arrondissement et dont elle favorise l'épanouissement. En réponse, hormis celui consacré à la persévérance des objets et l'évocation du déchaînement des éléments, j'ai tenu les propos suivants :

Madame la Maire,

Mesdames, Mesdemoiselles, Messieurs, Chers Collègues,

Je voudrais tout d'abord remercier, à titre personnel et au nom de l'ESMA et de toute la communauté mathématique, Madame Florence Berthout, Maire du V^o Arrondissement et Présidente du Fonds régional d'art contemporain, de nous avoir offert, une fois de plus, la possibilité de présenter en cette magnifique salle Capitant, une exposition consacrée aux relations entre les mathématiques et les arts, montrant entre autres l'enrichissement à la création et au développement artistique que, par leurs progrès, les mathématiques peuvent apporter.

Cette année, l'univers fractal est le thème principal de l'exposition. Me permettez-vous, Madame, de dire un mot sur ce qu'est un fractal ?

Sans aucunement entrer dans l'ensemble des techniques mises en jeu pour la réalisation des œuvres relevant de cet univers, je voudrais simplement en souligner un aspect philosophique majeur, résumé par ces mots:

« Le fractal, symbole de la stabilité »

La propriété principale du monde fractal est l'auto-similarité, une observation élémentaire mais essentielle, entrevue par le Prix Nobel de Physique de 1926, Jean Perrin, et énoncée par Benoît Mandelbrot autour des années 1965.

Un objet fractal classique et élémentaire est un objet structuré en strates ordonnées et jointives, il possède une infinité de strates, identiques à ceci près que l'on passe d'une strate à la suivante en appliquant un facteur réducteur de taille, défini par une unique formule.

La stabilité du fractal classique est triple, paradigmatique, exemplaire:

- stabilité de la forme en premier lieu, les strates sont identiques de ce point de vue
- stabilité dans le mode d'assemblage des strates consécutives
- stabilité dans leur évolution, le taux de réduction de la taille des strates étant défini

par la même formule.

Notons au passage que cette définition inclut les pavages, par exemple ceux du plan ordinaire, caractérisés par l'absence de réduction de la taille des motifs.

Un fractal sera appelé évolué lorsque le passage d'une strate à la suivante s'accompagne également d'une déformation contrôlée.

Ce mode idéal et exemplaire de construction d'objets mathématiques est ainsi basé sur la notion de récurrence, caractéristique d'un processus d'évolution éminemment stable.

Et ce mode de construction d'objets est tout à fait prégnant, tant dans l'univers mathématique, que dans la Nature.

Une seule illustration, mais aussi simple que puissante par sa signification et par ses conséquences sur la manière de comprendre et de représenter le monde physique, suffira pour faire saisir l'importance de la notion de stabilité qui sous-tend l'émergence du phénomène de récurrence. Le mouvement oscillant régulier, celui d'une onde qui se propage dans le temps en montant et en descendant, toujours de la même façon, est bien sûr l'un des exemples fondamentaux de mouvement parfaitement stable. La fréquence avec laquelle apparaissent les sommets et les creux de l'onde caractérise celle-ci. Ce qui force l'attention est que presque tout mouvement peut se ramener à la description et à la superposition ordonnée d'une infinité de ces ondes, remarquables par leur parfaite stabilité.

Ce fait général est l'incarnation d'une donnée première peut-être plus universelle encore de la Nature, aux conséquences infinies, donnée selon laquelle tout objet s'efforce de maintenir sa stabilité à travers l'espace et à travers le temps.

Mais revenons au contenu même de l'exposition. On peut s'interroger sur la place que ces œuvres, fractales ou plus généralement inspirées par les mathématiques, occupent sur le plan artistique. Aucune de ces œuvres récentes, apparemment, n'a encore l'honneur de figurer dans nos musées nationaux ou particuliers. Je ne parle pas des musées anglo-saxons. Le caractère très rationnel de ces œuvres, très souvent une certaine pauvreté thématique, n'oublions pas à ce sujet ce que Leon-Battista Alberti écrivait en 1435 « la copia e varietà piace », une absence de contenu affectif, la réputation injustifiée des mathématiques, les rivalités diverses, sont aujourd'hui quelques-uns des freins à une reconnaissance médiatique.

Dans l'hypothèse où l'homme parvient à s'affranchir du déchaînement des éléments, cette situation est bien sûr transitoire. Au fil des jours, au fil du temps, surtout outre-Atlantique, s'accroît le nombre de personnes versées dans ce nouveau mouvement intellectuel et artistique. Dans le domaine de la peinture, en Europe, il y eut déjà l'exemple de l'extravagant Dali, qui a su mettre les connaissances acquises

par sa vive curiosité intellectuelle, notamment en mathématiques, au service de son imagination fertile. Dans la même veine, l'étonnant Fomenko, mathématicien russe de premier plan, a créé un ensemble d'œuvres absolument uniques par leur richesse mathématique et artistique où s'exprime entre autre son rejet du goulag. Les Raphaël, Michel-Ange et autres Léonard sont rares. Il y aura d'autres Dali, d'autres fortes personnalités pour, à des moments inattendus, par l'originalité puissante de leurs œuvres, rassembler autour d'eux tous les publics, emporter leur adhésion, les invitant à partager avec eux la contemplation admirative de l'univers foisonnant des formes mathématiques, dans la pureté de leurs dessins et de leurs contours, ou au contraire dans la diversité et la chaleur haute en couleurs de leurs infinis déploiements lumineux.

Je vous remercie.