ORTHOGONALITY IN MATROIDS AND MATHEMATICAL PROGRAMMING

Bruter, C. P.

Proceedings of the Princeton Symposium on Mathematical Programming

Foreword

'Orthogonality in matroids and mathematical programming' appeared in the proceedings of the VIth Intern. Symp. on Math. Program. Princeton University Press (1970) p. 592, but was prepared in 1967.

Now, in 2025, 55 years later, I do not find the original papers from which the last pages of my book in French, titled « Les Matroïdes » (Dunod, Paris, 1970), have been written. In this book, I often replaced « matroïde » by the word « stigmier », from the term « stigm » introduced by Tutte instead of circuit (an abbreviation of the Latin word « stigma »). I suppose that the first following lines took account of the content of the Princeton presentation.

On the other hand, I have found old papers of mine as for instance :« Extension of the Huard's heuristic method to the solution of integer convex mathematical programming », and « A Note on Kuhn and Tucker's conditions » that will appear after the extract of the book on matroïdes.

Au sommet s_2, la valeur du flot est nulle sur les arcs e_2 et e_4 dirigés vers s_3, le flot sortant est nul puisqu'il n'y a pas d'arc dirigé vers l'extérieur de s_3.

Au sommet s_2, la valeur du flot entrant par l'arc e_1 est 1, la valeur du flot sortant par l'arc e_3 est 1 ; $1 = 1$.

Au sommet s_4, la valeur du flot entrant selon les arcs e_3 et e_5 est égale respectivement à $+1$ et -1. La valeur du flot sortant par l'arc e_4 est nulle : $0 = 1 - 1$.

2. Voir Exemple 26.

IV.9 *APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES STIGMIERS A QUELQUES PROBLÈMES IMPORTANTS D'OPTIMISATION*

On va mettre à profit la remarque suivante : un stigmier M et son orthogonal M^* sont définis sur le même ensemble E. Si $w : E \to A$ est une fonction de E dans un anneau d'intégrité A, la recherche des éléments $\hat{e}$ de E tel que $w(\hat{e})$ soit maximal doit aboutir au même résultat selon que l'on considère $\hat{e}$ comme éléments de M ou de M^*.

IV.9.1 *APPLICATIONS A LA PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE*

IV.9.1.1 Les conditions d'exclusion de Kuhn et Tucker

Supposons connue la valeur $\hat{v}$ de $v(x)$ à l'optimum. Après introduction, si besoin est, de *variables d'écart*, le problème peut s'écrire :

$$\boxed{\begin{array}{lll} & & \text{Maximum } v(X_3) \\ \mathrm{Pb}_1 & \text{s.l.c.} & \mathbf{B}_1 X = 0, X \geqq 0 \end{array}}\,.$$

$$\text{(i) } \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \hat{v} & -v(\ ) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -b & 0 & B & 0 & & I & \end{bmatrix}.$$

I désignant la matrice unité, qui a autant de lignes que $\mathbf{B}$.

(ii) $X = (1, 1, X_3, X_4)$, avec $X_3 = x$; X_4 est le vecteur des variables d'écart.

Remarquons alors que, puisqu'on s'impose $X_1 = X_2 = 1$, le problème Pb_1 a mêmes solutions que le problème Pb_2 suivant :

$$\boxed{\text{Pb}_2 \quad \begin{array}{ll} & \text{Maximiser } v(X_2) \\ \text{s.l.c.} & \mathbf{B}X = 0,\ X \geqq 0 \end{array}}.$$

(i) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \hat{v} & -v(\ \ ) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -b & B & 0 & & I & \end{bmatrix}.$

(ii) $X = (X_1, X_2, X_3)$, avec $X_1 = 1$, X_3 étant cette-fois-ci le vecteur des variables d'écart.

Lorsque v est une forme linéaire ($v(x) = vx = v_1 x_1 + \cdots + v_n x_n$, où v_i est un coefficient appartenant à A, x_i une composante de x) l'ensemble des X qui vérifient $\mathbf{B}X = 0$ est l'ensemble des points d'un sous-espace T de A^n. (En effet, si X et X' satisfont $\mathbf{B}X = 0$, c'est également le cas pour $\lambda X + \mu X'$ comme on le vérifie immédiatement en prémultipliant cette expression par $\mathbf{B}$.)

Le sous-espace T engendre (théorème III.4) un stigmier $M(T)$ dont l'orthogonal est engendré par T^* orthogonal de T dans A^n (théorème III.7). Ce stigmier est défini sur l'ensemble $]n] = \{ 1, 2, \dots, n \}$ des composantes des vecteurs de T par une T-représentation.

Mais on peut définir par une W-représentation un autre stigmier qui nous intéressera davantage : rangeons les éléments de T, définis par des vecteurs de A^n, en une seule matrice $\boxed{X}$. En admettant que la théorie des stigmiers s'étend au cas dénombrable, la fonction rang associée aux sous-matrices de $\boxed{X}$ définit sur l'ensemble des éléments de T, noté $\{ T \}$, un stigmier, comme on l'a vu au début de ce chapitre. Notons $M(\pi)$ le stigmier engendré par les vecteurs positifs de T. Son orthogonal $M^*(\pi)$ est défini à partir des vecteurs X^* de l'orthogonal T^* de T. Rappelons en effet que si M est un stigmier défini par une représentation de Whitney T elle provient d'une représentation de Tutte de M engendrée par sous-espace isomorphe à T^*, M^* a une représentation de Tutte engendrée par un sous-espace isomorphe à T et par conséquent M^* a une représentation de Whitney par des vecteurs d'un sous-espace isomorphe à T^*.

Si X est tel que $\mathbf{B}X = 0$, X^* un vecteur de T^* vérifie la relation d'orthogonalité (o) :

$$X^* X = 0 .$$

X^* peut être considéré comme engendré par les vecteurs lignes de $\mathbf{B}$ car si B et B' sont deux tels vecteurs :

$$(\lambda B + \lambda' B') X = 0 .$$

Une telle combinaison linéaire de vecteurs lignes de $\mathbf{B}$ s'écrit de façon générale $X^* \mathbf{B}$ et la relation d'orthogonalité (o) peut s'expliciter sous une des deux formes suivantes :

$$X_1^*[v - vX_2 + X_{31}] + X_2^*[- b + BX_2 + X_{32}] = 0 \qquad (1)$$

$$[X_1^* v + X_2^* b]\, X_1 + [- X_1^* v + X_2^* B]\, X_2 + X_1^* X_{31} + X_2^* X_{32} = 0 . \qquad (2)$$

Si on s'impose X et $X^* \geqq 0$, ces relations impliquent que chaque parenthèse est alors nulle, soit :

$$\left.\begin{aligned} \hat{v} - vX_2 + X_{31} &= 0 \\ - b + BX_2 + X_{32} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} X_1^* \hat{v} - X_2^* b &= 0 \\ - X_1^* v + X_2^* B &= 0 \\ X_1^* X_{31} &= 0 \\ X_2^* X_{32} &= 0 \end{aligned}\right\} . \qquad (2)$$

Si on choisit pour fonction $w : \{ T \} \to A$ la fonction

$$w(X) = X_1 = w(X^*) = X_1^*$$

où X et X^* représentent le même élément de $\{ T \}$, puisque $X_1 = 1$, $X_1^* = 1$ et le système d'égalités précédentes s'écrit, compte tenu du fait que X_{31} devient nul,

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \left.\begin{array}{ll} \hat{v} - vX_2 & = 0 \\ -b - BX_2 + X_{32} & = 0 \end{array}\right\} & (\hat{1}) \\ \left.\begin{array}{ll} \hat{v} - X_2^* b & = 0 \\ -v + X_2^* B & = 0 \\ X_2^* X_{32} & = 0 \end{array}\right\} & (\hat{2}) \end{array}}$$

Ce système d'équations est connu sous le nom de *conditions de Kuhn et Tucker* à l'optimum.

IV.9.1.2 Autres formulations du problème de la programmation mathématique

Le problème de la programmation mathématique, écrit sous la forme Pb_1, peut être également présenté de la manière suivante :

$$\begin{array}{ll} & \text{Maximiser } v(X_3) \\ \text{s.l.c.} & \mathbf{B}_1 X = 0 \\ & 0 \leqq X_4 \leqq \infty \\ & 0 \leqq X_3 \leqq \infty \\ & 1 \leqq X_2 \leqq 1 \\ & 1 \leqq X_1 \leqq 1 . \end{array}$$

C'est un cas particulier du problème plus général suivant

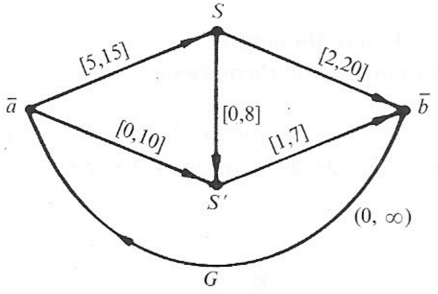
$$\boxed{\begin{array}{ll} & \text{Maximiser } v(X_j) \\ \text{s.l.c.} & \mathbf{B}X = 0 \\ & \forall i, \quad c_i' \leqq X_i \leqq c_i \end{array}}$$

Ce dernier problème est appelé *problème de programmation mathématique à variables bornées*, ou encore *problème de flot avec capacités c_i et c_i'*.

IV.9.2 *CAS PARTICULIER DU RÉSEAU DE TRANSPORT*

Il s'agit d'un problème que nous avons déjà rencontré (voir page 30) et que nous allons examiner lorsque la fonction $v(X_j)$ à maximiser est linéaire. On supposera même $v(X_j) = X_j$.

Exemple 26 . On se propose d'assurer un transport continu de biens entre deux villes $\bar{a}$ et $\bar{b}$ (par exemple du pétrole entre deux ports pétroliers et un grand centre urbain). Le graphe G ci-dessous indique les trajets possibles entre $\bar{a}$ et $\bar{b}$.



Sur chaque arc nous avons indiqué les capacités minimales c_i' et maximales c_i de biens qui peuvent passer sur le trajet que cet arc représente (ce sont par exemple des débits minimaux et maximaux de pipe-lines). Le problème que se pose l'ingénieur est de déterminer les valeurs des flux de bien à faire passer par chaque arc de manière que le flux total qui arrive en $\bar{b}$ soit maximal. On peut arbitrairement introduire un arc de retour $\overline{ba}$ qui porte ce flux.

Désignons par $(X_1, X_2, \ldots, X_6) = X$ le vecteur des flux sur chaque arc. Le problème est de maximiser X_1 :

$$\begin{aligned} \text{s.l.c.} \quad X_1 &= X_2 + X_3\,, \\ X_3 &= X_4 + X_6\,, \\ X_5 &= X_2 + X_6\,, \\ X_1 &= X_4 + X_5\,, \end{aligned}$$

$$0 \leqq X_1 \leqq \infty\,,$$
$$0 \leqq X_2 \leqq 10\,,$$
$$5 \leqq X_3 \leqq 15\,,$$
$$2 \leqq X_4 \leqq 20\,,$$
$$1 \leqq X_5 \leqq 7\,,$$
$$0 \leqq X_6 \leqq 8\,.$$

C'est un cas particulier du problème

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{(F)} & \text{Maximiser } X_1 \\ \text{s.l.c.} & \mathbf{B}X = 0 \\ & \forall i \quad c_i' \leqq X_i \leqq c_i \end{array}}$$

où **B** est cette fois-ci la matrice totalement unimodulaire

$$\mathbf{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Examinons le stigmier engendré par les vecteurs colonnes de cette matrice. Il est défini sur un ensemble E isomorphe à celui des arcs de G. On constate que les vecteurs ② ③ ⑥ forment dans $\mathbf{Z}$ un ensemble linéairement minimal ($2 - 3 + 6 = 0$), de même que ④ ⑤ ⑥ et ③, ④, ⑤, ②, etc. Ces ensembles ne sont autres que les stigmes du stigmier graphique engendré par G. Si $\bar{x}$ est le vecteur

$$(\bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = 1, \bar{x}_3 = -1, \bar{x}_4 = 0, \bar{x}_5 = 0, \bar{x}_6 = 1)$$

$$\mathbf{B}\bar{x} = 0\,,$$

$\bar{x}$ étant un cycle d'une T-représentation du stigmier $M(G)$ dans $\mathbf{Z}$, de même que $n\bar{x}$, où n est entier quelconque non nul.

Si $\overline{x}'$ est le vecteur ($\overline{x}'_1=0$, $\overline{x}'_2=0$, $\overline{x}'_3=0$, $\overline{x}'_4=1$, $\overline{x}'_5=-1$, $\overline{x}'_6=1$) qui correspond au stigme { ④, ⑤, ⑥ } de $M(G)$,

$$\mathbf{B}\overline{x}' = 0 .$$

Par suite, $\mathbf{B}(n\overline{x} + n'\,\overline{x}') = 0$: ainsi si $n = 2$, $n' = 1$, le vecteur

$$2\,\overline{x} + \overline{x}' = x = (x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = -\ 2,\ x_4 = 1,\ x_5 = -\ 1,\ x_6 = 3)$$

représente un ensemble de flux qui satisfont à la condition $\mathbf{B}x = 0$. Un tel vecteur s'appelle en théorie des graphes un flot. (D'où le nom de groupe de flots généralisés au groupe engendré par les cycles d'une T-représentation d'un stigmier M.)

D'après les théorèmes sur la représentation des stigmiers, les vecteurs lignes de $\mathbf{B}$ représentent au sens de Tutte des stigmes de l'orthogonal $M^*(G)$ de $M(G)$. On appelle quelquefois « *coupe en e* » un stigme de $M(G)$ qui contient l'élément e de $E(|\,E\,| = n)$.

Plaçons-nous dans le cas où

$$c'(e_i) = c'_i = -\ c(e_i) = -\ c_i \,.$$

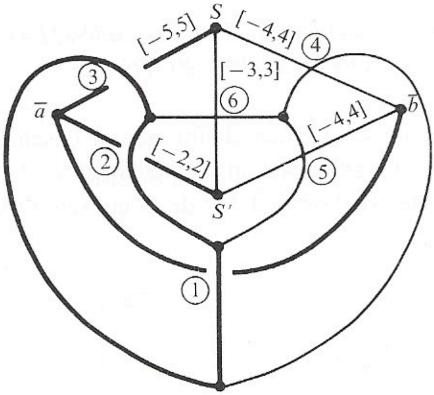
Soit h un cycle de $M^*(G)$ (ligne de $\mathbf{B}$) dont les valeurs sont égales à 0, -1 ou $+\ 1$, et dont le support contient e. Appelons « *capacité de la coupe en e* » la quantité

$$\sum_1^n |\,h(e_i)\,c_i\,| - |\,h(e)\,c(e)\,| \,.$$

Fulkerson [12] montre le

Théorème de la coupe minimale (IV.12). *Le maximum de la composante x_1 attachée à l'arc 1 d'un flot est égal au minimum de la capacité des coupes en e_1.*

Exemple 27. On reprend l'exemple d'un graphe de transport G :

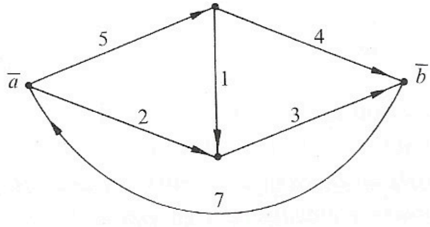


Le co-stigme { ① ② ③ } de $M^*(G)$ détermine une « coupe » dans le graphe G. La capacité de la coupe en ① déterminée par ce co-stigme est $5 + 2 = 7$.

Voici les autres coupes en ① et leurs capacités respectives

① ② ⑥ ④ → 9
① ③ ④ → 8 .

D'après le théorème de Fulkerson, le flux maximal qui peut transiter de $\overline{a}$ à $\overline{b}$ est égal à 7 :



Nous n'aborderons pas ici d'autres théorèmes liés à la programmation mathématique tels que les importants théorèmes de Minty.

IV.9.3 *LE THÉORÈME DE LA COUPE MINIMALE POUR LES SYSTÈMES DE BLOCAGE*

Définition. Soit M un stigmier défini sur un ensemble E'. Soit $S(e')$ la famille des stigmes de M contenant un élément e' de E'. Soit $S^*(e')$ la famille des stigmes de l'orthogonal M^* de M contenant le même élément e'.

On pose $E = E' - e'$,

$$\mathscr{K} = \{ S - e' \mid S \in S(e') \}$$
$$\mathscr{K}^* = \{ S^* - e' \mid S \in S^*(e') \} .$$

(E, $\mathscr{K}$, $\mathscr{K}^*$) s'appelle un système de blocage défini sur E.

On appelle *tohus* les éléments de $\mathscr{K}$, *bohus* les éléments de $\mathscr{K}^*$. D'après l'axiomatique 4 des stigmiers si K et K' sont des tohus (ou bohus) $K \not\subset K'$.

On dira donc de façon plus générale qu'une famille $\mathscr{K}$ (resp. $\mathscr{K}^*$) de sous-ensembles $\mathscr{K}$ de E qui vérifient la simple condition $K \not\subset K'$ (resp. $K^* \not\subset K'^*$) est une famille de tohus ou de bohus sur E.

On voit par ailleurs, d'après l'axiomatique 4 des stigmiers, que pour toute partition de E en deux parties E_1 et E_2,

$$\text{(P)} \qquad \begin{array}{ll} \text{ou bien} & K(\in \mathscr{K}) \subseteq E_1 \\ \text{ou bien} & K^*(\in \mathscr{K}^*) \subseteq E_2 \end{array}$$

les deux éventualités ne se produisant pas à la fois.

La donnée d'une famille de tohus-bohus vérifiant la propriété (P) est également une définition d'un système de blocage.

Théorème IV.13. *Soit (E, $\mathscr{K}$, $\mathscr{K}^*$) un système de blocage, $v : E \to A$ une fonction définie sur E, à valeurs dans l'anneau totalement ordonné A. Ordonnons les éléments de E selon les valeurs décroissantes de $v(e)$, et supposons que les k premiers éléments de l'ensemble E ainsi ordonné forment un tohu K. On a l'égalité minimax*

$$\max_{K \in \mathscr{K}} \min_{e \in K} v(e) = \min_{K^* \in \mathscr{K}^*} \max_{e \in K^*} v(e) = v(\hat{e}) .$$

Réciproquement, si $\mathscr{K}$ et $\mathscr{K}^*$ sont des tohus-bohus définis sur l'ensemble E qui vérifient l'égalité minimax pour toute fonction v, $(E, \mathscr{K}, \mathscr{K}^*)$ est un un système de blocage.

Démonstration. Montrons en premier lieu que

$$\max \min \leqslant \min \max . \tag{1}$$

Posons

$$\max_{K \in \mathscr{K}} \min_{e \in K} v(e) = \min_{\hat{K}} v(e) = v(\hat{e}') , \quad \text{et} \quad \min_{K^* \in \mathscr{K}^*} \max_{e \in K^*} v(e) = \max_{\hat{K}^*} v(e) = v(\hat{e}'') .$$

Puisque $\hat{K} = \hat{S} - e'$, $\hat{K}^* = \hat{S}^* - e'$, $|\hat{S} \cap \hat{S}^*| \neq 1$ entraîne $\hat{K} \cap \hat{K}^* \neq \varnothing$. Par suite il existe un élément $e \in \hat{K} \cap \hat{K}^*$ pour lequel on a l'inégalité équivalente à (1) :

$$v(\hat{e}') \leqslant v(e) \leqslant v(\hat{e}'') .$$

Désignons maintenant par $\bar{e}$ le plus petit élément du tohu K défini par l'énoncé du théorème. Faisons une partition de E en $(E - K) \cup \bar{e}$, $K - \bar{e}$; $K - \bar{e}$ ne contient pas de tohu, et par conséquent il existe $K^* \subseteq (E - K) \cup \bar{e}$. On en déduit que

$$\max_{e \in K^*} v(e) \leqslant v(\bar{e}) = \max_{K \in \mathscr{K}} \min_{e \in K} v(e)$$

et par suite

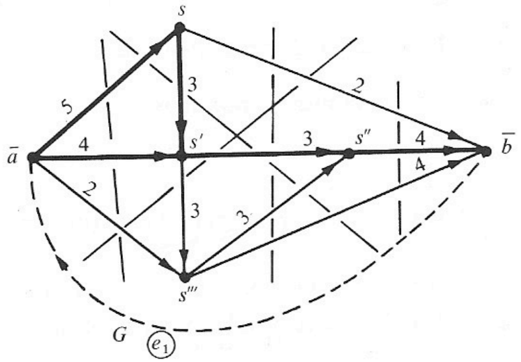
$$\min \max \leqslant \max \min .$$

Cette inégalité jointe à l'inégalité générale (1) entraîne la proposition directe.

Montrons la réciproque. On fait une partition de E en E_1 et E_2. On pose $v(e) = 1$ si $e \in E_1$, $v(e) = 0$ si $e \in E_2$. Supposons qu'il n'existe pas de tohus K contenus dans E_2 ; alors max min $= 0 =$ min max. S'il n'y avait alors pas de bohu $K^* \subseteq E_2$, on aurait min max $= 1$, ce qui contredit l'égalité précédente. Par suite, il existe $K^* \subseteq E_2$. D'un autre côté, s'il y avait $K \subseteq E_1$ et $K^* \subseteq E_2$, on aurait l'égalité max min $= 1 =$ min max $= 0$, ce qui est impossible. Par suite $(E, \mathscr{K}, \mathscr{K}^*)$ répond aux définitions d'un système de blocage.

C.Q.F.D.

Exemple 28. On se donne un réseau de transport entre $\bar{a}$ et $\bar{b}$ représenté par le graphe suivant :



Le problème est de trouver les chemins de $\bar{a}$ à $\bar{b}$ qui ont la capacité de transport maximale ; on a indiqué sur chaque arc du graphe la valeur de la capacité maximale de l'arête.

Si l'on convient d'ajouter un arc de retour $\overline{ba} = e_1$, d'après la définition des systèmes de blocage $(E, \mathscr{K}, \mathscr{K}^*)$ est un système de blocage, où $\mathscr{K}$ désigne l'ensemble des chemins de $\bar{a}$ à $\bar{b}$, $\mathscr{K}^*$ l'ensemble des coupes en e, auxquelles on ôte l'élément e_1.

Le maximum (3) est obtenu pour les chemins

$$(\bar{a}, s, s', s'', \bar{b}) , \quad (\bar{a}, s', s'', \bar{b}) , \quad (\bar{a}, s, s', s''', \bar{b}) , \quad (\bar{a}, s, s', s''', s'', \bar{b}) ,$$

$$(\bar{a}, s', s''', \bar{b}) \quad \text{et} \quad (\bar{a}, s', s''', s'', \bar{b}) .$$

Le minimax (3) est obtenu pour la coupe en e_1, (2, 2, 3, 2).

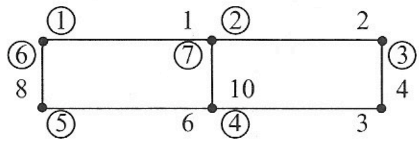
IV.9.4 *BASES OPTIMALES D'UN STIGMIER*

Soit E un ensemble fini. On peut en faire un ensemble totalement ordonné par l'intermédiaire d'une fonction injective $W : E \to A$ où A est lui-même un ensemble totalement ordonné : on a alors

$$e_1 > e_2 \Leftrightarrow w(e_1) > w(e_2) .$$

Soit alors un stigmier M défini sur l'ensemble totalement ordonné E. Soit $B \in \mathscr{F}$ une base de M (ou ensemblin maximal de M). $\hat{B}$ est une *base maximale* de M si, quelle que soit la base $B \in \mathscr{F}$, il existe une fonction injective $h : \hat{B} \to B$ telle que, pour tout $e \in \hat{B}$, $h(e) \geqq e$.

Exemple 29. Soit G le graphe suivant :



L'ensemble des arêtes du graphe est l'ensemble

$$E = \{ ①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥, ⑦ \} .$$

Par l'intermédiaire de la fonction $w : E \to \mathbf{Z}$, on fait de E un ensemble totalement ordonné. Voici par exemple ses éléments rangés dans l'ordre croissant induit par w :

$$E = \{ ①,\ ②,\ ③,\ ④,\ ⑤,\ ⑥,\ ⑦ \} .$$

Le stigmier $M(G)$ possède une base maximale (arbre du graphe)

$$\hat{B} = \{ ④, ③, ⑤, ⑧, ⑦ \} .$$

Théorème IV.14. *Si M est un stigmier défini sur un ensemble totalement ordonné E, M possède une base maximale.*

Démonstration. Classons les bases de M selon l'ordre lexicographique décroissant. $B > B'$ implique alors :

(i) les éléments de B et de B' sont écrits selon leurs valeurs décroissantes :

$$B = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \quad \text{entraîne} \quad b_1 \geqq b_2 \ldots \geqq b_n ,$$

(ii) soit j l'indice i de plus faible valeur tel que $b_j \neq b'_j$, alors

$$b_j > b'_j .$$

Désignons par $\hat{B}$ la base de M lexicographiquement maximale. $\hat{B}$ est la base maximale cherchée. En effet, soit B une autre base de M. Ou bien $\hat{b}_i \geqq b_i$ pour tout i et $\hat{B}$ est bien la base cherchée ; ou bien il existe un indice i tel que $b_i > \hat{b}_i$. Mais on peut montrer que $B' = \hat{B} \cup b_i - \hat{b}_i$ est encore une base ; elle est lexicographiquement supérieure à $\hat{B}$, ce qui contredit la définition de $\hat{B}$. D'où le théorème.

C.Q.F.D.

A NOTE ON KUHN AND TUCKER 'S CONDITIONS

C.P. Bruter

I. The operations that we are commonly using in classical mathematics are all linear operations over the integral ring of integers Z, or over its field of quotients Q. Each time we want to make any computation of a mathematical object (P) (an integral,...), a good method commonly used consists in finding a linear approximation to this object. Consequently, the result is obtained with an error which is measured in absolute value by the positive real ε ; ε is but exceptionnally null.

We shall be interested in " ε-linear approximation" in mathematical programming: Given any problem in mathematical programming (i.e. a domain D in the Euclidian space R^n with a numerical function f of the elements of D to optimize), we are going to introduce a linear problem (LP) (i.e. the domain is a polyhedron π , f is a linear function) so that the optimal value of (P) differs by ε from the optimal value of (LP); in this note, ε will be null in general. Thus, by this simple method of linearization, it will be possible to introduce Khun and Tucker's conditions for any problem (P). The first results were literary given in [1], and formally written by C. Raffin, see [2].

II. They can be extended in the following way: knowing how to solve linear problems, let us now suppose that D is a bounded domain (this hypothesis will be hold through this note) which is defined by the constraints

$$a_i(x,b_i) \leqslant 0, \text{ where } i \in M,\ b_i \text{ is a constant.}$$

We suppose, in a first step, that for any $i \in M$, $a_i(x,b_i)$ and $f(x)$ are continuous functions with infinitly many continuous (or null) derivatives; they will be also be supposed bounded: if not, a change of basis in R^n will give the result. It will also be supposed, for simplicity of writing the results, that these functions are not multiform: such a condition must not be considered as important; it is at last assumed that that these functions are not constant over any neighbourhood of x. The set of x such that $a(x) = 0$ will be called the border of D.

Let $\hat{x}$ be a point of the border of D. From the definition of D, there is a neighbourhood of $\hat{x}$, $W(\hat{x})$, such that $W(\hat{x}) \cap D = V(\hat{x})$ is convex. All neighbourhoods will now supposed being convex. We shall be interseted in local optima (l-optima) since, if D is convex and f concave, an l-optimum is also a global optimum. As it is well-known in that case, necessary conditions are also sufficient conditions for l-optimality. We shall suppose also that f is locally concave, for, if f was convex, it is possible to find an $\underline{x}$, where $\underline{x}$ is a vector deduced from x by changing the sign of some components of x, such that $f(\hat{x}) + f(\underline{x}) = \underline{f}(x)$ is a concave function. For simplicity, we shall always suppose that optimizations are maximizations.

Although $f(x)$ is a function of several variables (at most n), we shall keep on writing in a symbolic way:

$$f(x) = f(\hat{x}) + f^{(1)}(\hat{x})(x - \hat{x}) + \dots + 1/n!\ f^{(n)}(\hat{x})\ (x - \hat{x})^n + \dots$$

<u>Lemma</u>: Let $\hat{x}$ be an l-optimum for (P). Then there exists a neighbourhood $V_f(\hat{x})$ of $\hat{x}$ and a positive integer p for which: $\forall\ x \in V(\hat{x}) \Longrightarrow f^{(p)}(\hat{x})(x - \hat{x})^p \leq 0.$

Proof: Since $\forall x \in V(\hat{x})$, $f(x) - f(\hat{x}) \leq 0$; since $f(x) - f(\hat{x}) = f^{(1)}(\hat{x})(x - \hat{x}) + k(x - \hat{x})^2$, x can be choosen so that $|k(x - \hat{x})^2| < |f^{(1)}(\hat{x})(x - \hat{x})|$ when $f^{(1)}(\hat{x}) \neq 0$. The set of such x belonging to D determines the suitable $V_f(\hat{x})$. In that case $p = 1$. When $f^{(1)}(\hat{x})$ is null, we try to do the same process with $p = 2$; and so on. End of the proof.

Let us now consider $f_p(x) = f(\hat{x}) + f^{(p)}(\hat{x})(x - \hat{x})^p$: $\hat{x}$ is an l-optimum of $f_p(x)$ when x runs over $V_f(\hat{x})$. We can apply the previous lemma to $f_p(x)$, which consists in a constant and an homogeneous polynomial of degree p, by inverting the roles of x and $\hat{x}$; if $\mathring{x}$ is an x belonging to a convenient neighbourhood of $\hat{x}$, $V_p(\hat{x})$,

$$f(\hat{x}) = f_p(\hat{x}) = f_p(\mathring{x}) + f_p^{(1)}(\mathring{x})(\hat{x} - \mathring{x}) + \dots$$ .Let us denote by $f_p^{(q)}(x)$ the first non null derivative of $f_p(x)$. Note that $q < p$ and $f_p^{(q)}(\mathring{x})(\hat{x} - \mathring{x})^q$ is positive.

Let us set: $f_{p,q}(x) = f(\hat{x}) - f_p^{(q)}(\hat{x} - x)$. We can repeat the process just described until we find a function $f_{p,q,\ \ldots,\ s,1}(x) = f(\hat{x}) + (-1)^h f^{(1)}_{p,q,\ \ldots,s}(x)((-1)^h(x - \hat{x}))$

$$= f_S(\hat{x}) + f_S^{(1)}(x)(x - \hat{x}),$$

where h is equal to +1 if the sequence $S = p,q,\ \ldots,s$ has an even number of terms, -1 in the opposite case, and when x belongs to a suitable neighbourhood of $\hat{x}$, $V_{f,S}(\hat{x})$.

Let us consider the following linear problem (LP), writing "utc" instead of "under the conditions":

$$\text{Optimize} \quad f_S(\hat{x}) + f_S^{(1)}(\overset{\circ}{x})(x - \hat{x})$$

$$\text{utc} \quad (i) \quad a_i(\hat{x}) + a_i^{(1)}(\hat{x})(x - \hat{x}) \leqslant 0$$

(ii) $\hat{x}$ is a vertex of the polyhedron Π defined by (i).

From our hypothesis and from the construction of the linear function to optimize, it is immediate that:

Proposition 1: $\hat{x}$ is an 1-optimum for (P) iff it is an optimum for (LP).

Proof: First $\hat{x} \in D \cap \Pi$. $\hat{x}$ is an 1-optimum for D, thus by the construction of $f_S(\hat{x}) + f_S^{(1)}(\overset{\circ}{x})(x - \hat{x})$, $\hat{x}$ is an optimum for Π. By construction of this function, the converse is true.

Note that we may always suppose that $f_S(x) = f(x)$: it is sufficient to make a change of basisi if it were not so.

First generalized Kuhn and Tucker's conditions

(The term "orthogonal" is used instead of"dual"; this use has been justified in [3] when domains D are bounded integral sets; in the last paragraph, it will be justified when D are connected sets in R^n).

We consider the orthogonal of (LP). Its optimal solution $\hat{u}$ is such that:

$$(C) \quad \begin{cases} \hat{u} \geqslant 0 \\ \hat{u}\, a(\hat{x}) = 0 \\ \hat{u}\, a^{(1)}(\hat{x}) = f_S^{(1)}(\overset{\circ}{x}) \end{cases}$$

(for a maximization of the linear functio

Conditions (C) are necessary and sufficient conditions for local optimality.

Let $I \subseteq M$ be the set of active constraints of (LP). It can be proved, see [2] , that:

<u>Proposition 2:</u> $df = \sum_{i \in I} \hat{u}_i \, db_i$, where db_i is a small "variation of the constant" b_i of the constraint $a_i(x,b_i)$.

After a small " variation of these constants", the new optimal point $\hat{x}'$ is in a neighbourhood $W(\hat{x})$ of $\hat{x}$. From the properties of continuity, $W(\hat{x})$ can be choosen as a sphere of radius η such that for any $x \in W(\hat{x})$, $|f(x) - f(\hat{x})| \leq \eta$.
If $f^{(1)}(x)$ is not constant over $W(\hat{x})$, we may choose $\hat{x}'$ such that $f^{(1)}(\hat{x}') \neq f^{(1)}(\hat{x})$. In that case, the linear function to optimize in $\hat{x}'$ is $f(\hat{x}') + f^{(1)}(\hat{x}')(x - \hat{x}')$. If $\hat{u}'$ is the new vector of orthogonal variables, $df' = \sum_{i \in I'} \hat{u}'_i \, db_i$: if $I = I'$, neglecting the terms of second order by writing $df' = df$, then $\hat{u} = \hat{u}' + d\hat{u}$ from the properties of continuity of $f^{(1)}(x)$. This relation does not hold in general.

III. Let us suppose now that condition (ii) of (LP) is not fulfilled. In that case, for some $i \in I'$, $a_i^{(1)}(\hat{x})(x - \hat{x})$ are linearly dependent. There can be several sets $I'(\subseteq M)$. But we may suppose there is only one such I'; since, if there were say r I', it would be sufficient to repeat for each I' the process we are going to describe for one.

The conditions $i \in I'$, $a_i(\hat{x}) + a_i^{(1)}(\hat{x})(x - \hat{x}) \leq 0$, are computed and replaced by one condition since they are not independent. Let $I'' \subset I'$ be a subset of I' such that cardinal I'' = cardinal $I' - 1$. Writing, for any $i \in I''$:

$$a_i(x) = a_i(\hat{x}) + a_i^{(1)}(\hat{x})(x - \hat{x}) + \ldots + a_i^{(p)}(\hat{x})(x - \hat{x})^p + \ldots$$

an approximation of $a_i(x)$ in a suitable neighbourhood of $\hat{x}$, $V_i(\hat{x})$, will be:

$$a_{i,p(i)}(x) = a_i(\hat{x}) + a_i^{p(i)}(\hat{x})(x - \hat{x})^{p(i)}$$

Let us fix $\hat{x}$ and write $\bigcap_{i \in I''} V_i(\hat{x}) \cap V_{f,S}(\hat{x}) = V(\hat{x})$. We can write, if $\hat{x}$ is well choosen:

$$a'_{i,p(i)}(x) = a_{i,p(i)}(\mathring{x}) + a^{(1)}_{i,p(i)}(\mathring{x})(x - \hat{x})$$

$p(i)$ is choosen in such a way that: $a^{(1)}_{i,p(i)}(x)$ is not null when x runs over $V(\hat{x})$. These quantities are not linearly dependent.

Let us set: $a''_{i,p(i)}(x) = a'_{i,p(i)}(x) + \delta(\mathring{x})$

so that $a_i(\hat{x}) = a''_{i,p(i)}(\hat{x})$; $\overset{\circ}{x}$ can be chosen in $V(\hat{x})$ so that $\delta(\overset{\circ}{x})$ be as small as one wants. By a change of notation, we can write also: $\forall\ i \in M - I'$, $a''_i(x) = a(x)$.

Finally, the problem (P) will be equivalent to the following (LP):

$$\begin{array}{ll} \text{Optimize} & f_S(\hat{x}) + f_S^{(1)}(\hat{x})(x - \hat{x}) \\ \text{utc} & a''_i(\hat{x}) + a''^{(1)}_i(\overset{\circ}{x})(x - \hat{x}) \leqslant 0. \end{array}$$

(LP) gives rise to the following necessary conditions:

<u>Second generalized Kuhn and Tucker's conditions</u>

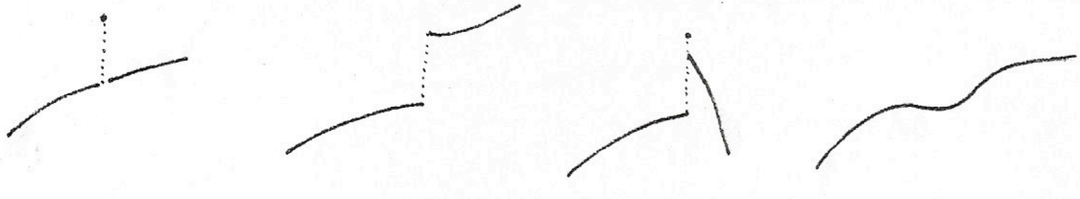
Supposing the linear function has to be maximized, if $\hat{u}$ is the optimal solution to the orthogonal problem:

$$\begin{cases} \hat{u} \geqslant 0 \\ \hat{u}\ a''(\hat{x}) = 0 \\ \hat{u}\ a''^{(1)}(\overset{\circ}{x}) = f_S^{(1)}(\hat{x}) \end{cases}$$

IV. The next step consists in supposing that the $a_i(x)$ are not continuous functions. More precisely we suppose that:

- there exists partially discrete points: y is a partially discrete point if there exists $J \subseteq M$ such that for $\forall\ j \in J$, the function of the single variable x_j, $a_i(x_j)$, has an isolated point in y_j.
- there exists partially continuous points of order p: x is a partially continuous point of order p if there is $I \subseteq M$ such that the first p derivatives of $a_i(x)$, $i \in I$, are continuous functions.

We summarize the different behaviours of $a_i(x)$ by the following pictures:



Given x for which $a(x) = 0$, we define its convex envelope $E_D(x)$ with repects to the domain D, as the smallest (connected) convex of R^n such that:

(i) $x \in E_D(x)$

(ii) $E_D(x) \cap D \neq \emptyset$

(iii) If $y \in D \cap E_D(x)$ and belongs to the border of D, it belongs also to the border of $E_D(x)$.

(iv) If $y \in D$, $\{y\} \cup E_D(x)$ is convex implies that $y \in E_D(x)$.

In the same way, we can define now a convex enveloppe of $\hat{x}$, $E_f(\hat{x})$, with respects to the surface $f(x) = f(\hat{x})$. $E_f(\hat{x})$ and $E_D(\hat{x})$ can be computed. As they are defined by continuous functions, we may return to hte previous cases, and introduce Kuhn and Tucker's condtions for the non totally continuous problems.

V. Finally, let us introduce the notion of orthogonality in continuous mathematical programming. Any problem (P) can be written under the form:

Maximize cx

utc $a(x) \leq 0.$

Let us suppose that its associated linear problem (LP) is:

Maximize cx

utc $a(\hat{x}) + a^{(1)}(\hat{x})(x - \hat{x}) \leq 0.$

If we set: $a(x) = \begin{bmatrix} a(x) & 0 \\ 0 & Ix \end{bmatrix}$ where I is the idendity matrix, we can write the orthogonal $(LP)^*$ of (LP) as:

Minimize $u(a^{(1)}(\hat{x})\hat{x} - a(\hat{x}))$

utc $u\, a^{(1)}(\hat{x}) \geq c$ (C)

We may consider $(LP)^*$ as the linear problem associated with a non linear problem $(P)^*$ we shall call the orthogonal of (P). The general form for $(P)^*$ is:

Minimize ud

utc $g(u) \leq 0.$

Then $(LP)^*$ is:

Minimize ud

utc $g(\hat{u}) + (u - \hat{u})\, g^{(1)}(\hat{u}) \leq 0$ (C)

We identify the terms of the two different inequations denoted by (C):

$$(1)\quad c = -\hat{u}\, g^{(1)}(\hat{u}) + g(\hat{u})$$

$$(2)\quad d = a^{(1)}(\hat{x})\hat{x} - a(\hat{x})$$

$$(0)\quad a^{(1)}(\hat{x}) = -g^{(1)*}(\hat{u}) \qquad (g^{*} \text{ is the transposed of } g).$$

From these relations, and given that $-\hat{u}d + c\hat{x} = 0$, we deduce that:

$$\hat{u}a(\hat{x}) + g(\hat{u})\hat{x} = 0.$$

The relation (0) will be called the relation of orthogonality.

Finally, after introduction of slack variables so that the constraints can be written as $a(x) = 0$, $g(x) = 0$, the problems (P) and (P) can be written in a compact way under the following form:

Find the points $(\hat{u},\hat{x})$ which verify the system S of equations:

$$S \begin{cases} (u,c)\ (-d,x) = 0 \\ g(u)\ a(x) = 0 \end{cases}$$

33, Bld Dubreuil

91-ORSAY France

References

[1] C.P.Bruter: Méthodes de Résolution des Programmes Mathématiques en Nombres Entiers, Mémoire Electricité de France, 1965.

[2] C.Raffin: Programmation Mathématique et Dualité, Séminaire de Statistique et d'Econométrie de l'Université de Poitiers, 12 Mai 1966.

[3] C.P.Bruter: Orthogonality in Matroids and Mathematical Programming, VIth International Symposium on Mathematical Programming, Princeton, 1967.

In