

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — Morphologie des ensembles de bifurcation associés à des polynômes à une variable réelle. Applications. Note (*) de M. Claude-Paul Bruter, présentée par M. André Lichnerowicz.

Cette étude morphologique facilite l'examen des propriétés d'une classe de systèmes dynamiques plans, amène à poser le problème de la localisation et de la morphologie des « montagnes » tangentes à une variété, conduit à un résultat sur les racines réelles d'un polynôme sur \mathbb{R} .

I. Les symboles $i, n \geq 2, p, q, r, s, t = n-s$ représentent des entiers naturels. On pose

$$P_n(x) = (1/n)u_0 x^n + 1/n-2 u_2 x^{n-2} + \dots + 1/n-p u_p x^{n-p} + \dots + u_{n-1} x$$

et on note par

$$P_n^{(n-q)}(x) = (n-1)!/q! u_0 x^q + (n-3)!/(q-2)! u_2 x^{q-2} + \dots \\ + (n-p-1)!/(q-p)! u_p x^{q-p} + \dots + (n-q-1)!/0! u_q = 0$$

[$q = n-1, n-2, \dots, 3, 2$ et $2 \leq p \leq q$; $u_i (i = 0, 2, 3, \dots, n-1)$ et x sont réels], l'équation obtenue en annulant la $(n-q)$ -ième dérivée de $P_n(x)$. On supposera en général u_0 fixé, égal à 1.

Soit t vérifiant $1 \leq t \leq n-2$. B_n^t désigne, dans l'espace des paramètres $(u_2, u_3, \dots, u_{n-1})$ le lieu des valeurs des paramètres u_i pour lesquelles le graphe de $P_n(x)$ possède des points singuliers dont la multiplicité est au moins égale à t . En particulier B_n^2 est l'ensemble de bifurcation de $P_n(x)$.

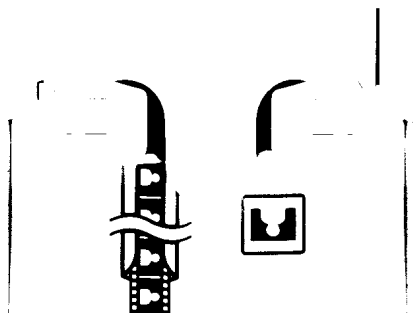
LEMME 1. — Soit $s = 2, 3, \dots, n-1$. B_n^{n-s} est une variété algébrique de dimension $s-1$ définie par les équations paramétriques :

$$(-1)^{p_s} u_p = \varphi_p(x_0, x_1, \dots, x_{s-1}) x_1^{p-s+1},$$

où :

- (i) $p_s = p$ si s est impair, $p_s = p-1$ si s est pair;
- (ii) $x_0 = u_0, x_1 = x, x_2 = u_2, \dots, x_i = u_i, \dots, x_{s-1} = u_{s-1}$;
- (iii) $p = s, s+1, \dots, n-1$;
- (iv) $r = 3, 4, \dots, s$;
- (v) $\varphi_p(x_0, x_1, \dots, x_{s-1})$

$$= \binom{p-1}{p-s} (n-1)!/p!(n-p-1)! x_0 x_1^{s-1} + \binom{p}{s-3} (n-3)!/(p-2)!(n-p-1)! \\ x_2 x_1^{s-3} + \dots + \binom{p}{s-r} (n-r)!/(p-r+1)!(n-p-1)! x_r x_1^{s-r} + \dots \\ + \binom{p}{0} (n-s)!/(p-s+1)!(n-p-1)! x_{s-1} x_1^0.$$



Exemple. — Si $s = 2$, la courbe B_n^{n-2} est définie par les $n-2$ équations :

$$(-1)^{p_2} u_p = \binom{p-1}{p-2} (n-1)! / p! (n-p-1)! x^p,$$

où $p_2 = p-1$, et $p = 2, 3, \dots, n-1$.

Si y_i est tel que $(y_i)^i = x_i$, $\varphi_p(y_0, y_1, \dots, y_{s-1})$ est un polynôme homogène de degré $s-1$. Nous dirons alors que B_{n-s}^{n-s} est un cône cuspidal de sommet 0 et de type $(1, \lambda_2^2, \dots, \lambda_{s-1}^{s-1})$ ($\lambda_i \in \mathbb{R}^+$).

LEMME 2. — Le lieu V_n des valeurs des paramètres pour lesquelles $P_n(x)$ possède $n-1$ extremums est une variété algébrique réelle et cuspidale de dimension $n-2$. Le bord de V_n possède $n-2$ branches, notées $(i, i+1)$, $i = 1, \dots, n-2$. Les branches $(i-1, i)$ et $(i, i+1)$ ($i-1 \neq 1, i+1 \neq n-1$) se rencontrent suivant la strate $(i-1, i, i+1)$.

Remarques. — 1° Les symétries et antisymétries de B_n^{n-s} sont faciles à étudier.

2° Si $x_2 = x_3 = \dots = x_{s-1} = 0$, les équations

$$(-1)^{p_s} u_p = \binom{p-1}{p-s} (n-1)! / p! (n-p-1)! x^p = 0,$$

où $p = s, s+1, \dots, n-1$, admettent la racine $x = 0$ avec la multiplicité p . Ces équations définissent la courbe de conflit d'ordre s , située à l'intersection des branches contenant le lieu des points pour lesquels $s-1$ racines de φ_s sont confondues.

B_s^{n-s} est un exemple d'ensemble stratifié parmi les plus simples.

PROPOSITION 1. — L'application $\pi : (x_0, x_2, \dots, x_{s-1}) \mapsto (x'_0, x'_2, \dots, x'_{s-1})$, où $x'_i = n-i/n-p x_i$ ($i \neq 1$) $p = s, s+1, \dots, n-1$ permet de définir un plongement de B_m^{n-s} dans B_{m+1}^{n-s-1} ($n-s \geq 2; n-s-2 \leq m \leq n$). L'image de B_m^2 dans B_n^2 est le lieu des valeurs pour lesquelles le graphe de $P_n(x)$ possède des points singuliers dont la multiplicité est au moins égale à $2+n-m$.

PROPOSITION 2. — B_{n-1}^2 est l'intersection de B_n^2 avec le sous-espace $u_{n-1} = 0$.

Démonstration. — Écrivons les équations qui définissent B_n^2 et B_{n-1}^2 :

$$B_n^2 \begin{cases} (1) & x^{n-1} + u_2 x^{n-3} + \dots + u_{n-2} x + u_{n-1} = 0, \\ (2) & (n-1)x^{n-2} + u_2(n-3)x^{n-4} + \dots + 2u_{n-3}x + u_{n-2} = 0; \end{cases}$$

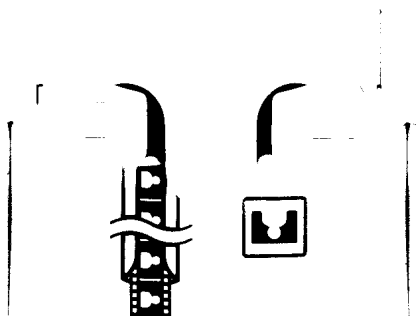
$$B_{n-1}^2 \begin{cases} (3) & x^{n-2} + u_2 x^{n-4} + \dots + u_{n-2} = 0, \\ (4) & (n-2)x^{n-3} + \dots + u_{n-3} = 0. \end{cases}$$

On suppose $u_{n-1} = 0$: dans ces conditions, ou bien $x = 0$, ou bien l'équation (3) est vérifiée. De cette équation on déduit la valeur de u_{n-2} que l'on porte dans (2). Il en résulte l'équation (4).

C. Q. F. D.

En remontant à B_4^2 , ce résultat montre que la demi-droite $u_2 \leq 0$ joue un rôle privilégié. En particulier :

COROLLAIRE 1. — $u_2 \leq 0$ est une condition nécessaire pour que $P_n^{(1)}(x)$ ait $n-1$ racines réelles.



La « géométrie du discriminant » associé à un germe d'hypersurface analytique complexe, à singularité isolée, est assez bien connue, en particulier le cône tangent en cette singularité est décrit avec précision ⁽¹⁾. Le problème qui est abordé maintenant est celui de l'étude, loin du point singulier, de la position des plans tangents par rapport à leur enveloppe. En outre on se place dans le cas réel.

Soit p un point appartenant au bord de $V_4 - \{0\}$. Il existe une section S de V_4 contenant p , et un point $c(p)$ dépendant de p et situé sur la demi-droite $u_2 \leq 0$, de sorte que le couple (c, S) définit un cône tangent à V_4 , contenant le point p , et situé à l'intérieur de V_4 .

Dans quelle mesure cette dernière propriété est-elle vraie pour V_n , $n \geq 4$? En établir la vérité, en toute rigueur, ne nous a pas été possible pour le cas général. Les calculs deviennent rapidement très complexes si l'on cherche à mettre en œuvre la méthode suivante, la plus simple qui se présente à l'esprit.

Soit L_p une variété linéaire $\sum a_i u_{n-i} = 0$ (L_p), telle que $a_1 \neq 0$, $p \leq n-3$ désignant le nombre de coefficients $a_i \neq 0$. Nous cherchons son intersection avec B_n^2 . La substitution de u_{n-1} dans l'équation (1), par sa valeur déduite de l'équation (L_p), conduit à un système d'équations (1)' et (2)' « voisin » du système d'équations (1) et (2), dans lequel u_{n-1} serait nul. Par la proposition précédente, les morphologies sont, *a priori*, « voisines » de celle de B_{n-1}^2 . En pratique on coupe V_n par des hyperplans $(L_{n-3}) \sum_{i=n-3}^1 a_i u_{n-i} = 0$ passant par l'axe u_2 : les sections obtenues sont des courbes C . On peut examiner en chaque point la position relative de la courbe par rapport à sa tangente. Cette dernière étude n'est pas facile car les u_i qui définissent C sont exprimés sous forme de fractions rationnelles; le degré du numérateur peut atteindre $n-2$, celui du dénominateur est égal à $n-4$.

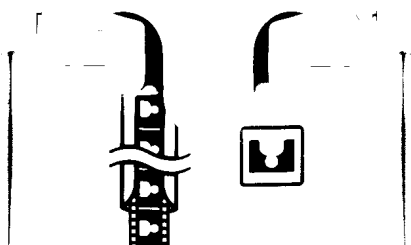
On peut alors tenir un autre raisonnement. Le bord de V_n s'appuie sur la strate des points triples difféomorphe à B_{n-1}^2 (prop. 1); par ailleurs la section de B_n^2 par $u_{n-1} = 0$ est B_{n-1}^2 (prop. 2). On en déduit, par continuité, que la morphologie de V_n entre la strate des points triples et sa section par un plan $u_{n-1} = \varepsilon$, est invariante dans le sens suivant.

Notons par h le difféomorphisme $B_n^3 \rightarrow B_{n-1}^2$, et soit $p \in B_n^3$, $p' = h(p) \in B_{n-1}^2$. Désignons par l un chemin transverse à B_n^3 et à B_{n-1}^2 situé dans le bord de V_n . On peut fibrer la branche de V_n contenant l par des fibres difféomorphes à B_{n-1}^2 . Les espaces tangents en q et $q' \in l$ aux fibres au-dessus des mêmes points q et q' , laissent ces dernières du même côté. En utilisant la récurrence, on en déduit que pour tout point $q \in l$, il existe un point c de $u_2 \leq 0$ et une demi-droite issue de c tangente en q au bord de V_n , toute entière contenue à l'intérieur de V_n .

II. APPLICATIONS. — 2.1. Lorsqu'on étudie le système différentiel

$$\begin{cases} dx/dt = -k P_n^{(1)}(x) & (k \text{ est une constante positive de valeur élevée}), \\ du_{n-1}/dt = P_r^{(1)}(x) \end{cases}$$

on constate que la morphologie du système dynamique obtenu dans le plan (x, u_{n-1}) est fonction de manière essentielle de la morphologie des courbes C définies par les équations $P_n^{(1)}(x) = 0$. En particulier, le nombre s de singularités distinctes de $P_n^{(1)}(x)$ joue un rôle primordial, ainsi, en second lieu, que la hauteur relative r_i de ces extremums; quant au nombre $(-1)^{n-1}$, il fixe le comportement à l'infini de $P_n^{(1)}(x)$. On peut donc caractériser la morphologie d'une courbe C par le triplet $((-1)^{n-1}, s, \{r_i\})$. Une étude



plus fine précise le degré de singularité de chaque extrémum. Une étude plus grossière se contente de la connaissance du couple $((-1)^{n-1}, s)$. Or s peut être défini à partir de la position du point (u_2, \dots, u_{n-1}) par rapport à l'ensemble de bifurcation B_n^2 .

2.2 L'étude des cônes tangents à B_n^2 suggère de poser un problème plus général. Introduisons d'abord une définition.

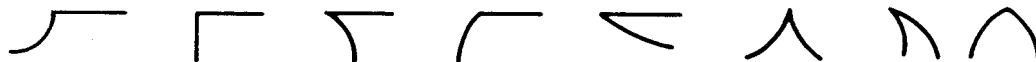
Soit (E, B, F) un espace fibré trivial, de base B et de fibre F . σ désigne une section de E . On note $B_\sigma = \sigma(B)$. On suppose donnée une projection régulière f de B_σ dans $B_n : f(B_\sigma) = \Sigma \subset B_n$. On définit une famille continue à un paramètre $t \in]-\infty, 1]$ d'applications σ_t , de sorte que $\sigma_1(B) = \Sigma$, $\sigma_0(B) = B$, $\sigma_t(B)$ pour t différent de 1 soit difféomorphe à B . L'espace $(M, B, F, \{\sigma_t\})$ sera appelée *montagne de base B et de « ligne » de crête Σ* . Cette montagne est *conique* si Σ est un point. Cette montagne conique est un *cône* si p désignant un point de B , $\sigma_t(p)$ décrit une demi-droite fermée en Σ .

Les problèmes à résoudre sont alors les suivants : soit V_n une variété de dimension n , plongée dans R^n , et B l'intersection de V_n avec, dans les cas les plus simples, un hyperplan H_{n-1} . Existe-t-il une montagne M_n de base B , tangente à V_n le long de $B \cap \delta V_n$? Quelle en est la forme, autrement dit préciser $\{\sigma_t\}$ et Σ ? Comment M_n est-elle située par rapport à V_n ?

Au lieu de travailler dans tout R^n , on étudie le problème en se plaçant à l'intérieur d'une boule D^n centrée à l'origine O . Un hyperplan H_{n-1} passant par O sépare D^n en deux parties D^{n+} et D^{n-} . On pose dans ce cas $V = \overline{D^{n+}}$ (adhérence de D^{n+}). On déforme H_{n-1} dans un voisinage de l'origine pour obtenir δV_n qui présente une singularité en O .

Une section B de V_n dans un voisinage D_n^e de O permet en général de définir une montagne M_n : ou bien $\Sigma \subset D_n^e \cap V_n$, ou bien, par complémentarité, Σ aussi bien que M_n sont contenus dans le complémentaire dans D_n^e de l'intérieur de V_n , ou bien M_n rencontre V_n et son complémentaire dans D_n^e .

En dimension 2, M_2 est soit H_1 soit un cône non trivial. Les deux branches de V_2 en O peuvent présenter un contact soit plat, soit anguleux. Par inspection, on obtient trivialement, dans le cas du contact anguleux, les huit morphologies suivantes :



La théorie des montagnes pourrait trouver une application dans les problèmes de reconnaissance des formes. Une forme plane est la donnée d'un couple $(G, \{F_{ij}\})$: G est un 1-complexe, la *squelette du percept*, dont les 0-simplexes i représentent les singularités de la forme perçue; F_{ij} désigne l'une des morphologies dessinées ci-dessus ($j = 1, 2, \dots, 8$).

(*) Séance du 12 juillet 1976.

(¹) B. TEISSIER, *Astérisque*, 7-8, 1973, p. 285-362.

