COMBINATOIRE. — *Nombre de morphologies d'une courbe du plan réel sans point d'inflexion.* Note (*) de **Claude-Paul Bruter**, présentée par M. André Lichnerowicz.

On évalue le nombre de types morphologiques d'une telle courbe. On établit les relations de récurrence qui permettent de calculer le nombre de courbes planes typologiquement équivalentes. Une conjecture reste ouverte à la démonstration.

The number of morphological types of such curves is evaluated. The recurrent relations that allow one to calculate the number of typologically equivalent plane curves are established. A conjecture remains opened.

0. Introduction — Il est au préalable nécessaire, pour classer et dénombrer les différents réseaux de trajectoires associés aux différents systèmes différentiels définis dans ([2]), de connaître le nombre de morphologies d'une courbe réelle plane.

Nous traitons le cas où la courbe n'a pas de point d'inflexion. Dans l'hypothèse contraire, la courbe possède $p+q$ singularités distinctes, dont q points d'inflexion. Supposons donnée une disposition quelconque des p extrémums de cette courbe : le nombre de façons de placer les points d'inflexion est égal à $q\,(p+1)$. Si le nombre de dispositions des extrémums est W_p, il existe $W_p\, q\,(p+1)$ morphologies de courbe à p extrémums et q points d'inflexion.

Nous avons cherché à calculer W_p à partir de ses antécédents; dans les cas simples, on peut déduire des relations de récurrence établies les fonctions génératrices d'où l'on tire les valeurs de W_p. Bien que G. Kreweras ([4]) nous ait fait observer que notre problème a en fait été abordé par de nombreux auteurs — avec souvent des motivations très diverses — il nous a paru intéressant de faire connaître la conjecture C.

1. Nombre de types morphologiques d'une courbe plane. — La notation $\mathscr{C}_{n+1}$ désigne une courbe sans point d'inflexion définie dans $\mathbf{R}^2$ par la relation $y=f(x)$; on suppose que f, de classe au moins C^1, admet un nombre fini n de singularités s_i distinctes ou confondues.

Définition. — On dira que deux courbes $\mathscr{C}_{n+1}$ et $\mathscr{C}_{m+1}$ sont de *même type morphologique* μ si elles ont le même nombre μ de singularités distinctes — μ est quelquefois appelé le nombre de Milnor.

On suppose désormais que l'ordre entre les abcisses des singularités d'une courbe $\mathscr{C}$ est celui des indices i de ses singularités s_i.

S_n^μ désigne une partition de l'ensemble ordonné $S_n^n=\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ en μ sous-ensembles disjoints μ_i. En s_j, la courbe $\mathscr{C}_{n+1}$ possède une singularité dont l'ordre est égal au cardinal du sous-ensemble μ_i contenant l'élément s_j.

Il revient au même d'évaluer le nombre de types morphologiques que l'on peut associer à $\mathscr{C}_{n+1}$, que de compter le nombre de manières de faire des partitions de l'ensemble ordonné $\{1, 2, \ldots, n\}$. On a donc ce résultat :

Proposition 1. — (i) *le nombre total de types morphologiques d'une courbe* $\mathscr{C}_{n+1}$ *est égal à* 2^{n-1}. (ii) *Le nombre de types morphologiques de valeur* μ *d'une courbe* $\mathscr{C}_{n+1}$ *est égal à* $\binom{n-1}{\mu-1}$.

2. Nombre de courbes typologiquement équivalentes dont les singularités distinctes ont des ordonnées toutes différentes.

Définitions. — On dira que deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont *morphologiquement* équivalentes si elles ont même type morphologique, et si, de plus, l'ordre entre les différentes ordonnées singularités de $\mathscr{C}$ est le même que l'ordre entre les différentes ordonnées des singularités de $\mathscr{C}'$.

On dira de deux courbes qui ne sont pas morphologiquement équivalentes, mais qui ont même type morphologique, qu'elles sont *typologiquement équivalentes*. On supposera dans la suite que la singularité s_1 est un maximum; par symétrie par rapport à l'axe des abcisses, on traite également le cas où s_1 serait un minimum.

Les courbes que l'on considère maintenant sont typologiquement équivalentes. On supposera qu'elles ont leurs singularités toutes distinctes. On notera par $\mathscr{T}_{n+1}$ une telle courbe.

$f(i)$ représente la valeur de l'ordonnée de la singularité s_i. On remarquera, puisque s_1 est un maximum, que pour tout p' tel que $0 \leqq p < n$.

$$f(2p+1) > f(2p+2) \qquad \text{et} \qquad f(2p+3) > f(2p+2).$$

v_n (resp. u_n) désignera le nombre de courbes $\mathscr{T}_{n+1}$ dont les singularités ont des ordonnées toutes différentes (resp. quelconques).

On trouvera des résultats sur v_n dans ([1]), ([3]) et ([4]). A titre indicatif, la valeur de v_n pour $n = 50$ s'écrit avec 54 chiffres.

Pour étudier la croissance de v_n, nous avons comparé v_n/v_{n-1} à v_{n-1}/v_{n-2}. Faute de pouvoir démontrer la conjecture suivante, nous avons demandé à *Maurice Astier*, de vérifier notre hypothèse par un calcul sur ordinateur.

Conjecture C. — *Quand n tend vers l'infini $(v_n/v_{n-1}) - (v_{n-1}/v_{n-2})$ tend vers* $2/\pi' = 0{,}636\,619\,77...$

En pratique, la convergence est assez rapide. Cette conjecture est à rapprocher des résultats connus des prédécesseurs de D. André ([1]) :

$$v_{2n} = \frac{2}{(2n)!}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n+1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^{2n+1}},$$

$$v_{2n-1} = \frac{2}{(2n-1)!}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^{2n}}.$$

Nous allons supposer, qu'à partir du rang n, on a rigoureusement

$$\frac{\hat{v}_{n+p}}{\hat{v}_{n+p-1}} = z_{n+p} = z_n + 2p/\pi'.$$

On sait, d'après ([1]), que

$$\sum_{p=0}^{\infty} v_p \frac{x^p}{p!} = \operatorname{tang}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Introduisons

$$Y_n(x) = \int_0^x \left(\sum_{p=0}^{\infty} \hat{v}_{n+p} \frac{x^p}{p!} \right) dx = \sum_{p=0}^{\infty} \hat{v}_{n+p} \frac{x^{p+1}}{(p+1)!}.$$

PROPOSITION 2. — *Sous les hypothèses qui précèdent, $\hat{v}_{n+p}$ est égal au coefficient de $x^p/p!$ dans le développement en série entière de*

$$Y_n(x) = v_{n-1}\left(\left[1-\frac{2x}{\pi'}\right]^{-z_n\pi'/2}-1\right).$$

3. NOMBRE DE COURBES TYPOLOGIQUEMENT ÉQUIVALENTES DONT LES SINGULARITÉS SONT DISTINCTES. — Par symbole, nous entendons le symbole d'inégalité stricte $\succ$. Nous notons par $u^n_{i,j}$ le nombre de courbes $\mathscr{T}_{n+1}$ pour lesquelles l'ordonnée $h(n)$, en position i dans F_n, est suivie de j symboles.

Proposition 3. — (A) *Si* $n = 2p$:

(i) $$u^{2p+1}_{i,j} = 0, \quad si \quad 2p-j < i-1;$$

(ii) $$u^{2p+1}_{1,2p} = \sum_{k=1}^{2p} u^{2p}_{k,2p-k};$$

(iii) $$u^{2p+1}_{i,j} = \sum_{k=i}^{i+j-1} u^{2p}_{k,i+j-1-k} + \sum_{k=i+1}^{i+j} u^{2p}_{k,i+j-k};$$

où $i+j \leqq 2p$, $(i,j) \in \{1, 2, \ldots, 2p+1\} \times \{0, 1, \ldots, 2p\} - \{(1, 2p)\}$.

(B) *Si* $n = 2p+1$;

(i) $$u^{2p+2}_{1,j} = 0 \quad et, si \quad 2p+1-j < i-1, \quad u^{2p+2}_{i,j} = 0;$$

(ii) $$u^{2p+2}_{i,j} = \sum_{k=1}^{i-1} = u^{2p+1}_{k,i-k+j-1} + \sum_{k=1}^{i-1} u^{2p+1}_{k,i-k+j}, \quad \textit{dans les autres cas.}$$

Démonstration [par exemple de A (iii)]. — La singularité s_{n+1} étant un maximum, $h(n+1)$ doit précéder $h(n)$ dans F_{n+1}. Supposons que $h(n)$ soit en position k dans F_n, et que $h(n+1)$ soit placé en position i dans F_{n+1}; d'après la remarque qui précède $k \geqq i$.

Supposons qu'il n'y ait aucune ordonnée $h(j)$ en position i dans F et telle que $h(j) = h(n+1)$. Dans ces conditions $h(n+1)$ et $h(n)$ sont séparés dans F_{n+1} par $k-i+1$ symboles. Si dans F_n, $h(n)$ est suivi de $j-k+i-1$ symboles, $h(n+1)$ dans F_{n+1} sera suivi de j symboles. D'où, compte tenu de la condition $k \geqq i$, l'écriture du premier terme dans l'expression de $u^{2p+1}_{i,j}$.

Supposons au contraire qu'il existe une singularité s_j de F_n en position i, telle que $h(j) = h(n+1)$. Alors $k-i$ symboles séparent $h(n+1)$ et $h(n)$. $h(n+1)$ dans F_{n+1} sera suivi de j symboles, si $h(n)$ dans F_n est suivi de $j+i-k$ symboles. La sommation part de $k = i+1$ car $h(j) = h(n+1) > h(n)$.

C. Q. F. D.

On peut donner une forme plus élégante à ces relations de récurrence, toutefois, elles se prêtent mal au calcul de fonctions génératrices. On trouvera, calculées par d'autres moyens, les premières valeurs de u_n dans (4). Il est probable que le type de construction qui conduit à la conjecture C peut être utilement généralisé.

(*) Séance du 24 janvier 1977.

(1) D. ANDRE, *J. Math. Pures et Appl.*, 1881, p. 167-184.
(2) C.-P. BRUTER, *Comptes rendus*, 283, série A, 1976, p. 651.
(3) R. C. ENTRINGER, *Niew Ark. Wisk.*, 14, 1966, p. 241-244.
(4) G. KREWERAS, *Math. Sc. Hum.*, 14, 53, 1976, p. 5-30.

36, *rue de Gometz*,
91440 *Bures-sur-Yvette*.