Mathématiques, Art, et Emotions¹

C.P. Bruter

bruter@u-pec.fr

« Comme dans ces disciplines que les Grecs appellent mathématique, il n'y a pas moins d'utilité que de plaisir ... À vrai dire, les disciplines mathématiques ne peuvent rien offrir de plus sublime, rare et utile. »

Luca Pacioli (1509)

«ce serait méconnaître d'abord la valeur philosophique et artistique des Mathématiques »

Emile Picard (1905)

« Elles doivent fournir un instrument pour l'étude de la nature. Mais ce n'est pas tout: elles ont un but philosophique, et, j'ose le dire, un but esthétique. »

Poincaré (1905)

« Les mathématiques, à les bien comprendre, possèdent non seulement la vérité, mais la suprême beauté. »

Bertrand Russell

« Dans le discours que j'ai prononcé le premier février 1977 à l'occasion de la réception de la Médaille d'Or du CNRS, j'ai tenté de défendre la thèse selon laquelle les mathématiques relèveraient plutôt de l'art que de la philosophie. »

Henri Cartan

Résumé

Un très bref rappel sur les liens entre art et mathématiques sera suivi d'exemples des différents types d'émotions que certains mathématiciens ont exprimé au regard de la pratique de leur discipline. On rappelle au passage ce qu'est, selon l'auteur, un art, la propriété fondamentale d'une émotion, la beauté. Viennent ensuite quelques considérations sur le mécanisme de création et d'expression des affects. Ce court article conclue sur un appel à une étude approfondie des effets du système hormonal.

¹ Exposé au Colloque sur les Emotions en Neuro-gériatrie, Poitiers, 25 mai 2018. Il faut considérer ce premier texte comme une ébauche.

1. Un bref rappel sur les liens entre art et mathématiques

Au fil des siècles, à mesure qu'augmentait la population des mathématiciens, que se répandait la connaissance des mathématiques, le lien entre artistes et mathématiciens a de plus en plus pris corps.

Dès la création des premières poteries par exemple, leur décoration spontanée faisait appel, sans doute en général inconsciemment, aux premiers rudiments de théorie des nombres (arithmétique) et de géométrie. Mais il est probable que certains de ces créateurs, davantage tournés vers la réflexion, s'interrogeant sur leurs procédés intellectuels et techniques qu'ils mettaient en œuvre, ont contribué à asseoir et à développer les mathématiques embryonnaires qu'ils rencontraient dans la pratique de leur art.

L'époque de la Renaissance est emblématique à cet égard. La création par les architectes et les peintres de la théorie de la perspective préfigure celle, un bon siècle



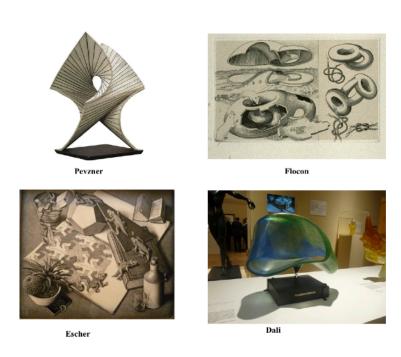
plus tard, de la géométrie projective par Desargues (1593-1661), tailleur de pierres, architecte et mathématicien.

A l'époque de Desargues, un nouveau courant des mathématiques a commencé à se développer avec une intensité croissante, s'attachant à la description et à la compréhension des objets en mouvement. De nouveaux chapitres des mathématiques sont nés de ce courant, sans influence sur le mouvement artistique encore tourné sur la représentation plane d'un environnement plutôt figé. Le milieu artistique est resté étranger à ce vaste corpus de connaissances nouvelles en mathématiques qui étendait son emprise sur la définition et la représentation des formes, non plus seulement dans le plan, mais dans l'espace habituel ou même dans des espaces de dimension de plus en plus élevée. Ce n'est qu'au début du vingtième siècle que le mouvement artistique renoua des liens avec les mathématiques, de manière timide d'ailleurs. Cézanne, à



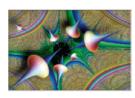
l'origine du mouvement cubiste, recommandait le simple emploi des formes élémentaires, celles du cube, du cylindre et du cône pour représenter toutes les autres formes. Paolo Ucello, cinq siècles plus avant, en avait déjà fait usage.

La formation en mathématiques du monde artistique a été en général trop élémentaire jusqu'à ce jour pour que, dans leur ensemble, les artistes fassent appel à des connaissances en ce domaine. En dehors de quelques exceptions, comme en particulier les remarquables frères Pevzner, sculpteurs, le graveur Flocon, le peintre Dali, et le plus avancé Escher, la mathématique est restée peu présente dans les œuvres du siècle dernier. Aujourd'hui, en dehors des architectes, ce sont davantage

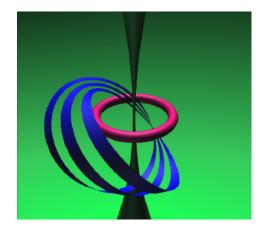




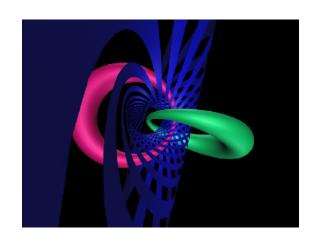




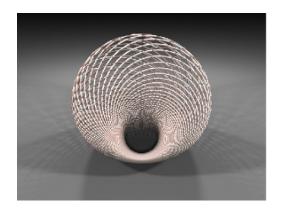




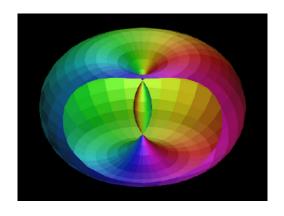
Thomas Banchoff Hopf links



Thomas Banchoff Pendulum tori

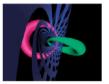


Francesco De Comite. Cyclide de Dupin



Thomas Banchoff Spindle torus

des mathématiciens et des informaticiens, dotés de la fibre artistique, qui témoignent de la présence des mathématiques dans l'art. Ils participent très activement au développement et à la diffusion de nouveaux outils et de nouvelles techniques de création et d'expression artistique, appelés à supplanter rapidement les plus anciens.







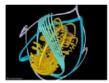




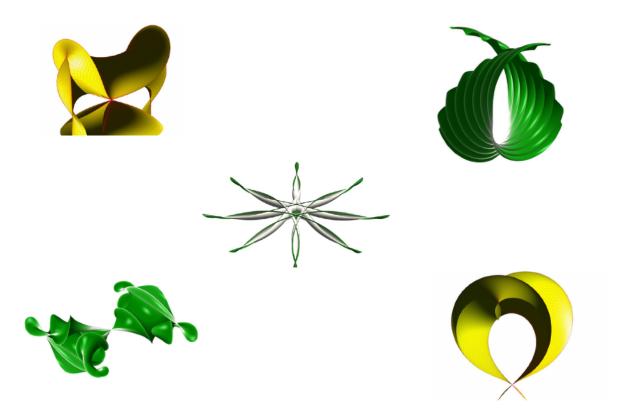




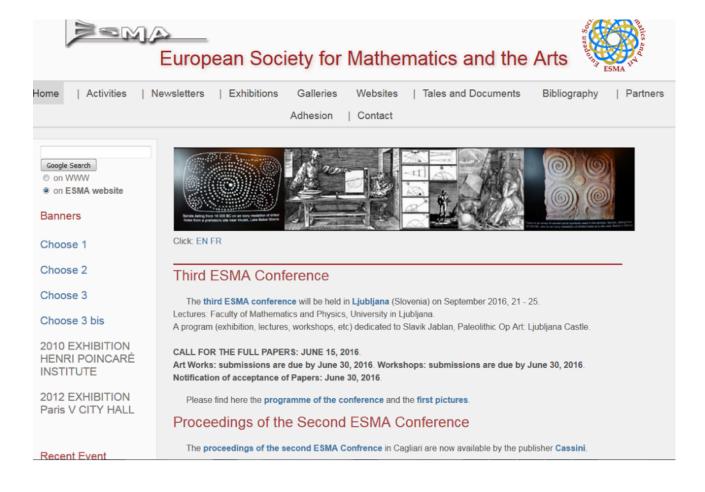








Par leur intermédiaire, les conférences et les rendez-vous internationaux organisés par The Bridge Organization (http://bridgesmathart.org/about/) et par la Société Européenne pour les Mathématiques et les Arts (ESMA, www.math-art.eu) révèlent l'importance de l'imprégnation actuelle des mathématiques dans le monde artistique.



2. Exemples des différents types d'émotions que certains mathématiciens ont exprimé au regard de la pratique de leur discipline

La conception du mathématicien en tant qu'artiste s'est très lentement forgée au cours de l'histoire. Elle est même toute récente. On doit à François Le Lionnais d'avoir introduit, dans ce panorama de référence sur l'état des mathématiques à la fin de la seconde guerre mondiale intitulé **Les Grands Courants de la Pensée Mathématique** [8], une section consacrée à « La Beauté en Mathématiques ». Ces quelques lignes révèlent la raison de la présence de cette section:

Si quelques grands mathématiciens ont su exprimer lyriquement leur enthousiasme pour la beauté de leur science, personne ne s'est proposé de se pencher sur elle comme sur l'objet d'un art — l'art mathématique — et par conséquent le sujet d'une esthétique, l'esthétique des mathématiques. L'étude qui suit n'a pas la prétention de fonder cette

Les trois citations en exergue de cet article, celle de Russell est empruntée l'ouvrage de Le Lionnais, montrent à quel point un grand nombre de mathématiciens sont sensibles aux qualités propres de leur matériau d'étude. C'est Henri Cartan - confert la citation en exergue - qui a exprimé avec la plus grande clarté et conviction l'idée que leur pratique professionnelle relève d'une forme d'art apparentée à toutes les autres formes artistiques. On peut facilement montrer en effet que l'activité mathématique partage avec elles, sous les noms de Représentation, Perfection, Inventivité, Singularité, Universalité, Phénomènes ondulatoires, six points communs caractéristiques de toute activité artistique (cf par exemple [1]).

Ils sont constitutifs de ce qu'est un « *art* », quel qu'il soit, à savoir une activité humaine d'excellence et exemplaire en un domaine particulier. L'artiste est alors celui qui pratique une telle activité, et l'œuvre d'art le résultat de cette activité ([1]). Une telle excellence suscite l'admiration, une émotion qui prédispose à l'affirmation éventuelle du beau.

Qu'elle soit de nature positive ou négative, le point fondamental est qu'une émotion, quelle qu'elle soit, est l'expression de la réaction de la personne face à une situation perçue, ressentie comme un apport, ou au contraire comme un retrait, à ce qui fonde la stabilité spatio-temporelle de la personne.

Un des points essentiels de ma philosophie est le fait que « *Tout objet s'efforce de persévérer dans son « Moi » à travers l'espace et à travers le temps* ». D'où par exemple cette définition quelque peu abrupte du beau, de la beauté: ce qui, par effet de résonance et au contraire du laid, contribue à fortifier notre propre stabilité spatiotemporelle. C'est finalement la même idée qu'exprime Nicola Weill [12] dans sa recension la semaine dernière de l'ouvrage du hongrois Laszlo Krasznahorkai « Seiobo est descendu sur terre », parlant de la « confiance profonde dans les pouvoirs du beau qui imprègne tout ce livre et qui nous rend plus fort. »

Outre celle de Luca Pacioli, l'auteur du célèbre ouvrage de la Renaissance **De Divina Proportione** [9], et celle de Russell citées en exergue, ces deux autres citations, toujours empruntées à l'ouvrage de Le Lionnais, soulignent à nouveau l'effet que laisse sur le professionnel la pratique de l'art mathématique. Russell à nouveau:

« Le véritable esprit de joie, d'exaltation, le sentiment d'être plus qu'un homme, qui sont la pierre de touche de l'excellence la plus haute, se trouvent dans les mathématiques comme dans la poésie. »

Paul Painlevé évoquant Charles Hermite:

« Ceux qui ont eu l'heureuse fortune d'être les eleves du grana geometre ne sauraient oublier l'accent presque religieux de son enseignement, le frisson de beauté ou de mystère qu'il faisait passer à travers son auditoire devant quelque admirable découverte ou devant l'inconnu. »

Toutes les citations précédentes laissent entrevoir différentes manières d'impact affectif que l'exercice des mathématiques peut induire sur ceux qui le pratiquent. D'autres témoignages apportent de nouveaux éclairages, enrichissent la panoplie de réactions engendrées par la pratique profonde des mathématiques.

Grothendieck [6]:

« Le ravissement de la découverte que j'ai si souvent senti rayonner de sa personne, s'associe immédiatement en moi à un semblable ravissement, dont il m'est arrivé d'être témoin chez un tout jeune enfant. »

« Celui en qui l'émerveillement était le plus visible était Dieudonné. Que ce soit lui qui fasse un exposé, ou qu'il soit simplement auditeur, quand arrivait le moment crucial où une échappée soudain s'ouvrait, on voyait Dieudonné aux anges, radieux. C'était l'émerveillement à l'état pur, communicatif, irrésistible - où toute trace du "moi" avait disparu.

Le plaisir et le ravissement de Dieudonné était surtout, il me semble, de voir la beauté des choses se manifester en pleine lumière la perception de la beauté, qui se manifestait chez Dieudonné par l'émerveillement, »

Autre propos de Grothendieck, dont la fin est curieuse:

« La première à se manifester dans ma vie a été ma passion pour les mathématiques. Et je vois aussi, maintenant, que l'aspect doux, recueilli, silencieux de cette chose multiple qu'est la créativité en nous, s'exprime spontanément par l'émerveillement. Sûrement, l'émerveillement n'a jamais imprégné ma passion mathématique à un point comparable comme dans la passion d'amour. Chose étrange, si j'essaye de me souvenir d'un moment particulier de ravissement ou d'émerveillement, dans mon travail mathématique, je n'en trouve aucun! ...

Dernière citation de celui maintenant considéré comme le plus grand mathématicien du siècle dernier:

Mon principal guide dans mon travail a été la recherche constante d'une cohérence parfaite, d'une harmonie complète que je devinais derrière la surface turbulente des choses, et que je m'efforçais de dégager patiemment, sans jamais m'en lasser. C'était un sens aigu de la "beauté", sûrement, qui était mon flair et ma seule boussole. Ma plus grande joie a été, moins de la contempler quand elle était apparue en pleine lumière, que de la voir se dégager peu à peu du manteau d'ombre et de brumes où il lui plaisait de se dérober sans cesse. »

Je terminerai ce florilège de citations avec celle-ci d'Arnaud Denjoy [5], soulignant comme d'ailleurs l'avait déjà fait Poincaré, le lien subtil entre intuition et esthétique. Il écrit en italique: « Le sens esthétique est le guide de l'intuition, comme le sens logique est le guide du raisonnement conscient. ».

Toutes les citations ici réunies se rapportent à des émotions positives à l'égard des mathématiques, émises par des mathématiciens célèbres. Je m'en tiendrai ici à la considération d'elles seules. Il est naturellement arrivé à tous d'éprouver des émotions négatives, par exemple en présence d'une démonstration, jugée ou simplement ressentie pour des raisons variées, d'une qualité trop faible, également par les insuffisances ou échecs, à des degrés divers et sur de plus ou moins longues durées, dans la compréhension de questions mathématiques et dans la recherche de leurs solutions. Je n'évoquerai donc pas les aspects émotionnels créés par ces situations.

L'émotion positive que rencontre le mathématicien dans l'exercice de son art dépend aussi et bien sûr de facteurs sociologiques et psychologiques qui viennent moduler les influences des facteurs objectifs.

Que ranger dans les facteurs objectifs propres aux mathématiciens ? Ils dépendent d'abord de la nature de l'exercice intellectuel pratiqué: ou bien le mathématicien travaille sur un sujet précis, seul ou avec des collègues, soit il s'instruit, soit encore en solitaire, ou bien en groupe, et cela de deux façons possibles selon la taille réduite ou importante du groupe. Toutes les nuances d'émotions ressenties sont possibles, selon la tournure et la sensibilité de l'esprit, tourné vers l'abstrait, ou vers la signification physique implicite, vers le géométrique ou vers le calcul, selon le degré d'attention et d'intérêt porté au sujet d'étude, la familiarité qu'on en a, la rapidité de compréhension, les caractéristiques de ce thème d'étude (sa profondeur mathématique, la richesse mathématique de son contenu tant relative au passé qu'à la nouveauté, sa portée pratique tant pour le devenir des mathématiques que pour ses applications, l'élégance, la variété et la subtilité des arguments).

La réaction de Dieudonné rapportée par Grothendieck est un exemple montrant chez certains mathématiciens que le plaisir de l'étude, l'émotion qu'elle suscite, soutenus par la qualité pédagogique de l'auteur, voire par le charisme du

conférencier, et par le contenu du message, peuvent être portés à leur plus haut point. Chez Dieudonné, il semble qu'on atteint presque le moment d'illumination, un phénomène bien connu.

Ce moment, rare, de la compréhension subite, de la découverte soudaine après un long labeur, s'accompagne d'une joie intense: Archimède s'écrit « Eureka! ». Plus d'un mathématicien est ainsi passé par une telle phase d'exaltation, parfois évidemment suivie d'une phase moins gaie, voire de dépression quand le résultat escompté, la démonstration avancée révèlent des failles. Un exemple célèbre qu'on aime citer est celui de Poincaré [10]:

« Dégoûté de mon insuccès, j'allais passer quelques jours au bord de la mer, et je pensai à tout autre chose. Un jour, en me promenant sur une falaise, l'idée me vint, toujours avec les mêmes caractères de brièveté, de soudaineté, et de certitude immédiate, que les transformations arithmétiques des formes quadratiques ternaires infinies étaient identiques à celles de la géométrie non-euclidienne. »

Hadamard dans son **Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique** [7] donne d'autres exemples de telles illuminations, comme celle de Gauss :« Comme en un éclair subit, l'énigme se trouva résolue. »

Les mathématiciens ont très peu détaillé les émotions qu'ils ressentaient, leurs causes. Ils ont au mieux employé «esthétique » et « beauté » sans préciser ce qu'ils entendaient par ces termes. On voudra bien me pardonner ici de citer ce texte [2] de 1973 où j'emploie le terme « architecture », désignant l'impression que me donnait, et me donne toujours, la théorie de la géométrie, partant d'axiomes se déployant de manière harmonieuse et solide en poutrelles successives:

Dans le secondaire, j'avais été rapidement seduit par la beauté radieuse de l'architecture de la géométrie euclidienne. Imaginez une tour Eiffel, en modèle réduit, dont l'armature se compose de fils de verre qui laissent passer une lumière blanche, intense et diffuse, qui enveloppe la construction. Voilà la sensation, l'image curieuse que me laisse la géométrie; je l'avais retrouvée à la lecture des travaux de Tutte sur les matroïdes; me souvenant de ces mots d'Alain « le beau, source du vrai », je décidais définitivement de travailler sur cette théorie.

On voit l'intérêt de présenter dès le secondaire des théories bien construites, et de les approfondir suffisamment : on y développe le sens de l'esthétique mathématique. La sensation du jeu joyeux, je ne l'ai éprouvée qu'avec le peu d'arithmétique que j'ai eu l'occasion de faire, où, pour la première fois, je me réconciliai avec les nombres. Comment se développe ce sens de l'esthétique, du beau, c'est encore un mystère. Peut-être l'architecture géométrique suit-elle dans son déroulement un processus de catastrophe généralisé qui entre en résonance avec l'ordonnance profonde de notre système cérébral. Toujours est-il que la mathématique possède un pouvoir émotif, sensitif, utile au bon équilibre de l'individu, comme le sont les autres disciplines artistiques, musique, peinture, sculpture, chant, poésie, danse. Souvenonsnous que les Anciens rangeaient parmi les muses Uranie qui présidait à l'astronomie.

Mais on lira aussi les belles pages que, dans son autobiographie, Un mathématicien aux prises avec le siècle [11], Laurent Schwartz consacre à la « Séduction pour la géométrie » qu'il a éprouvée, concluant: « Le contraste entre mon amour pour la géométrie et mon absence presque complète de vision géométrique tient vraiment du mystère. »

On peut estimer que la passion pour les mathématiques est une expression du niveau le plus élevé de l'émotion qu'elles peuvent susciter. La passion est exclusive, elle traduit une sorte de fascination naïve de l'esprit pour une forme d'activité mentale, pour l'examen ici d'une construction mentale dont la structure est régie par une causalité apparente sans faille. La qualité de stabilité de cette construction, ajoutée à l'appréciation de l'intérêt que présente cette construction (éventuel apport de concepts nouveaux, de connaissances nouvelles plus ou moins profondes et de portée variable) crée un affect positif en sa faveur.

Celui-ci contribue à asseoir l'équilibre psychique en même temps qu'il maintient voire conforte l'envie de poursuivre peut-être encore davantage l'activité de l'esprit dans l'exploration du domaine des mathématiques dans lequel il s'était engagé.

3. Considérations sur le mécanisme de création et d'expression des affects

Pour parvenir à comprendre le mécanisme de création et d'expression des affects, il convient naturellement de se pencher d'abord sur les situations les plus simples susceptibles d'engendrer de tels affects. Une telle situation est dans bien des cas celle de la présence d'une forme F. Elle est caractérisée par un ensemble de propriétés P(F) dont on suppose qu'elles font sens. Ceci implique qu'est présent dans les registres enfouis et diffus de ce que nous appelons notre mémoire un codage antérieur de chacune des propriétés pi, codage acquis par voie génétique et/ou épigénétique. Il est vraisemblable que ce codage est physiquement réalisé chaque fois par un complexe moléculaire extrêmement riche, des neurones peuvent en faire partie, dont chaque composante, comme par exemple des bras moléculaires, des électrons parcourant des trajectoires fermées autour des noyaux, travaille en

vibration: en d'autres termes le codage se ferait également en fréquences. Il n'est par ailleurs nullement localisé en un seul lieu, bien au contraire.

Une partie alors du codage de F par le système sensori-moteur entrerait en résonance avec le codage déjà présent de la propriété p_i.

Supposons par exemple que cette propriété soit celle de symétrie. Il se trouve qu'un très grand nombre de nos éléments corporels possèdent cette propriété, de sorte que toutes les fonctions associées à ces éléments sont alimentées et régulées par des complexes neuronaux et biochimiques qui intègrent dans leur fonctionnement cette symétrie. Ils en portent en quelque sorte la mémoire. Lorsque la résonance se produit avec une intensité assez forte, la plupart des complexes précédents sont activés et se crée alors un état momentané de plus grande stabilité.

Il s'accompagne d'une activité biochimique augmentant la température interne du corps, et créant donc une sensation particulière momentanée de bien-être. Elle est transférée dans les aires du langage et de l'audition où elle s'exprime sous les vocables possibles de joli, de beau, de beauté, de joie, le phénomène de conscience claire étant atteint au moment où un seuil subliminal est franchi qui met en œuvre simultanément les aires du langage de l'audition et phonatoire. De manière générale, le phénomène de conscience n'est que l'écoute interne d'une émission phonatoire n'ayant pas atteint un seuil d'intensité suffisante pour permettre l'émission verbale proprement dite (cf à ce sujet [4], page 180).

Si donc l'on représente, à un premier niveau, la réalisation de cette construction mentale comme le résultat d'un accouplement de systèmes dynamiques locaux S_j, associés à l'activité de complexes biochimiques cérébraux, formant parfois localement une petite tour de systèmes fibrés les uns au dessus des autres, cet ensemble, une fois stabilisé, se réduit en dimension:

- d'une part en passant, par l'intermédiaire des aires associatives, vers les aires phonatoires et auditives, où il éclate et se matérialise sous la forme d'énoncés linguistiques,
- et d'autre part, par une sorte de projection, devenant un attracteur de la dynamique décisionnelle S dont l'activité est, entre autres, pondérée par l'intensité des affects qui participent à son évolution.

Un système dynamique global S est défini de manière générale par la composée d'une composante conservatrice et d'une composante non-conservative. De manière naturelle, par une sorte de phénomène d'usure, de vieillissement, d'oubli, de dissolution, la part conservative aurait tendance à évoluer vers un affaiblissement qui peut finir par la rendre non significative. De la sorte, le système donné S, en chacun de ses bassins S_j, deviendrait un système non conservatif, à la limite un système de type gradient.

Le bassin S_m de la dynamique décisionnelle, doté du potentiel le plus élevé, jouerait alors le rôle d'attracteur décisionnel. Lui associer le potentiel en x^4 est

évidemment très simplificateur, mais adapté à certains comportements particulièrement vifs.

C'est ici qu'entrent en jeu le rôle et l'importance du système hormonal. On sait que la métamorphose animale est précédée d'une augmentation très significative de l'activité hormonale. On n'en connaît pas les raisons, ni la chaîne d'effets précis qui motivent et accompagnent cette augmentation. La phylogénie du système hormonal nous est inconnue.

Les métamorphoses des société humaines sont d'abord le fait d'individus qui introduisent des notions nouvelles qui, peu à peu, diffusent et contribuent à modifier le cours et la structure des sociétés. On peut penser, par analogie et prolongement de ce qui se produit dans le monde animal, que le système hormonal joue aussi chez l'homme un rôle particulier qui contribuerait à la création de mécanismes et de phénomènes de métamorphose.

Je plaide alors à nouveau [3] pour une étude approfondie sur la manière dont le contenu et l'activité du système hormonal pèsent sur le fonctionnement de notre machine cérébrale. Dans quelle mesure, où et comment précisément agirait-il, en particulier:

- sur les processus de mémorisation,
- sur la rapidité de fonctionnement de divers processus mentaux ?

Références

- [1] C.P. BRUTER *Mathématiques et Arts, Deux Conférences*, Première Partie, Scripta Philosophiae Naturalis, 11 Janvier 2017, 1-27 (https://scriptaphilosophiaenaturalis.files.wordpress.com/2017/01/claude-p-bruter-mathc3a9matiques-et-arts-deux-confc3a9rences.pdf)
- Seconde Partie, Scripta Philosophiae Naturalis, N°12, Juillet-Décembre 2017, 1-12 (https://scriptaphilosophiaenaturalis.files.wordpress.com/2017/06/claude-p-bruter-mathc3a9matiques-et-arts-deux-confc3a9rences-2c3a8me-partie.pdf).
- [2] C.P. BRUTER Sur la Nature des Mathématiques, Gautier-Villars, Paris, 1973.
- [3] C.P. BRUTER Exposé Séminaire Interdisciplinaire sur Thom, 4 mai 2018, http://arpam.free.fr/ESI.pdf.
- [4] C.P. BRUTER. Topologie et Perception, tome 3, Aspects neurophysiologiques, Maloine, Paris, 1976 Introduction, III.0; III.1 III.6; III.7 -III.12; III.13 III.16, Appendice 1. La notion de paysage épigénétique. Inititation à la théorie des catastrophes, Appendices 2, 3, 4, Bibliographie, Table des matières, Table des figures
- [5] A. DENJOY Hommes, formes et le nombre, Librairie Scientifique A. Blanchard, Paris, 1964.

- [6] A. GROTHENDIECK Semailles et Moissons http://matematicas.unex.es/~navarro/res/yinyang.pdf.
- [7] J. HADAMARD Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique, Librairie Scientifique A. Blanchard, Paris, 1959.
- [8] F. LE LIONNAIS Les Grands Courants de la Pensée Mathématique, Librairie Scientifique A. Blanchard, Paris, 1962.
- [9] L. PACIOLI Divine proportion, Librairie du Compagnonnage, Paris, 1988.
- [10] H. POINCARÉ Science et méthode, Flammarion, Paris, 1908.
- [11] L. SCWHARTZ Un mathématicien aux prises avec le siècle, Odile Jacob, Paris, 1997.
- [12] N. WEILL L'insoutenable beauté de l'art, Le Monde, jeudi10-vendredi 11 mai 2018.