Merveilles Siciliennes

Regards sur le mode de construction de frises géométriques

Claude P. Bruter
bruter@u-pec.fr

Abstract

De très nombreuses et très belles frises à motifs géométriques ornent à Palerme la Chapelle Palatine et la Cathédrale de Monreale, entre autres. La présence de ces motifs conduit à approfondir quelque peu les propriétés des polygones, créés ici par un procédé élémentaire d'extension. Un nouvel invariant topologique, l'indice de convexité, entre dans leur classification, et plus généralement, dans celle des formes. De l'examen de ces frises émergent les processus de création suivants:

1. Création effective d'un motif
2. Répétition du motif selon divers modes possibles
3. Déformation du motif selon divers modes possibles
4. Epaississement des bords selon divers modes possibles
5. Assemblage des motifs selon divers modes possibles

1 Introduction

Les décorations et dessins exécutés dans les temps anciens par les artistes, sur les murs, au sol, sur bien des objets familiers, n'ont pu être créés sans l'emploi d'outils arithmétiques et géométriques, aussi élémentaires peuvent-ils nous paraître aujourd'hui. Ces artistes ont sans doute largement contribué à diffuser ces premiers outils mathématiques, si ce n'est parfois à les développer. Plus récemment, depuis la fin du 19ième siècle en tout cas, frises, pavages et noeuds, ont fait l'objet de l'attention des mathématiciens: leur étude a débouché sur un enrichissement du corpus mathématique.

Les pavages de l'Alhambra par exemple ont fait l'objet de nombreuses et fort belles publications, tant sur le plan esthétique que scientifique. Visitant Palerme en Mai 2015, ses constructions célèbres et magnifiques, j'ai découvert, à ma stupéfaction, une très riche famille de frises géométriques à base de pavages, assez élémentaires mais d'une exquise beauté. Quelques-unes de ces frises apparaissent dans des ouvrages en vente dans les bibliothèques attenant aux édifices [4],[10][11].

Mais il n'est aucun ouvrage qui leur soit entièrement consacré. Il y a là une forme d'injustice que je suis heureux de commencer à réparer. Peut-être un éditeur d'œuvres d'art et un photographe de talent accepteront-ils de faire connaître à un public large la totalité de ces merveilles siciliennes.

Je voudrais ici m'excuser auprès des lecteurs pour la piètre qualité des quelques images présentées ici. Pressé par le flot des visiteurs, toutes mes photographies ont été faites dans la hâte, et bien sûr, je n'étais nullement maître de

l'éclairage. Mais ces défauts susciteront-ils à plus d'un le souhait d'y remédier ?

De manière certes abusive, j'utiliserai ici de terme de pavage pour désigner soit un pavage au sens mathématique et classique du terme, soit un décor, comme par exemple une frise, que l'on peut construire à partir des éléments d'un pavage classique, et que l'on enrichit éventuellement. On les rencontre tant sur les murs, que sur des colonnes, qu'au sol. Cet article est principalement consacré aux frises murales.

J'ai photographié 130 frises, distinctes par la nature, la disposition et la couleur des éléments de décoration. Je suis sans doute loin d'avoir été exhaustif. Des relevés plus attentifs amélioreront cet inventaire, et son analyse.

Voici trois exemples de ces frises:



FigA

On peut s'interroger : leurs créateurs ont-ils fait appel à des procédures systématiques d'élaboration, et lesquelles ? Aucun document transmis, des traditions orales perdues.

L'observation des frises m'a suggéré qu'une démarche naturelle de l'esprit a sans doute permis, au cours du temps, la création et la mise en œuvre de procédés très élémentaires de fabrication. Cette démarche est de nature constructive et expansive en ce sens que l'esprit procède par répétition d'emploi d'un mécanisme qui facilite l'enrichissement tout en présentant des qualités de stabilité. Elle apparaît en mathématiques sous le vocable d'extension, mais on pourrait tout aussi bien employer le terme d'expansion.

Elle est présente ici sous trois formes:

- la première consiste en un envahissement de l'espace par la répétition d'un motif donné, soit qu'on repère le motif en son intérieur, soit qu'on le répète en son extérieur. Dans le premier cas, on crée des situations de fractalisation. Dans le second cas, on fabrique des univers de type pavage.

- la seconde est liée à la construction même des motifs, caractérisés par leur bord, et en premier lieu par les singularités de ces bords. Comme ce sont ici des motifs polygonaux, j'en examine le déploiement par ajouts successifs de sommets.

- la dernière démarche élargit la précédente puisqu'on ne s'intéresse plus seulement aux sommets mais aux arcs, aux arêtes qui joignent ces sommets. On

prend en compte leurs déformations, et notamment leur épaississement.

L'examen de certaines propriétés des motifs et de leur assemblage est utile pour résoudre certains problèmes de pavage.

Comme on le voit sur les exemples de la Figure A, les frises sont constituées de l'assemblage de motif polygonaux divers, ici et fréquemment, mais pas toujours, entourés de noeuds voire d'entrelacs blancs. Pour ce qui est des entrelacs, ≪Celtic Knotwork: Mathematical Art≫ de Peter Cromwell [5] en donne une très bonne étude basée sur les groupes de symétrie. Rien ne pourra ajouté ici à cette étude tant le travail réalisé par les artistes siciliens est élémentaire du point de vue mathématique, aussi admirable soit-il sur le plan esthétique. Pour ce qui est des motifs et de leurs assemblages, l'ouvrage remarquable de Grünbaum et Sheppard ≪Tilings and Patterns≫ [6], en abrégé T&P, fait autorité. En quatrième de couverture, on lit cette appréciation de Martin Gardner : ≪Will be the definitive reference on tiling theory for many decades≫.

J'ai procédé sans aucunement consulter ce classique de référence. Je n'ai donc fait qu'apporter des éléments de première apparence mineurs par rapport aux considérations développées dans ce livre, où d'ailleurs, à mon étonnement, je n'ai trouvé aucune reproduction ou allusion aux mosaïques siciliennes. Ces éléments concernent entre autres l'étude de la convexité-concavité des polygones, absente de l'ouvrage, et par extension celle des polytopes et des 1-complexes dans des espaces multidimensionnels. La notion introduite d'indice de convexité joue un rôle important et jusqu'ici ignoré dans la classification des formes, des objets topologiques. Il faudra désormais en tenir compte. Mes considérations concernent également l'évolution de certains groupes de symétrie de ces polygones et polytopes au sens large, selon la disposition de leurs sommets et la croissance de leur nombre.

Par ailleurs, la méthode si élémentaire que j'emploie pour construire des variétés connexes, par ajouts pas à pas de sommets, me paraît être plus fine que celle habituellement utilisée par les chirurgiens topologues.

La présentation des procédures suit une voie peut-être proche de la marche des idées suivie au fil des temps par les artistes ayant conçu ces types de décor. Naturellement, seuls seront présentés dans ce texte des pavages significatifs et les plus simples d'entre eux possibles, suggérant néanmoins l'énoncé de règles de construction assez générales.

En résumé, de l'examen de ces frises émergent les processus de création suivants:

1. Création effective d'un motif
2. Répétition du motif selon divers modes possibles
3. Déformation du motif selon divers modes possibles
4. Epaississement des bords selon divers modes possibles
5. Assemblage des motifs selon divers modes possibles

La section 2 de cet article est consacrée à la présentation de quelques données historiques, la section 3 à quelques généralités sur le contenu des frises et pavages siciliens, la section 4 à l'énoncé de quelques définitions générales appropriées à

cette étude, la section 5 à l'énoncé de quelques propriétés générales des polygones et des pavages, la section 6 à la construction des polygones par extension simple, la section 7 à la présentation des principales configurations présentes dans les frises siciliennes. La section 8 traite de l'enrichissement des motifs, la section 9 de leur assemblage. La dernière section prend en compte leur enrubannage.

2 Brèves données historiques

Après être grecque, puis romaine, la Sicile devint byzantine de 535 à 902, arabe de 827 à 1091, puis normande jusqu'à la fin du douzième siècle. Roger Ier d'Hauteville, conquérant définitif en 1091 de la Sicile, est le fondateur de la dynastie normande, remarquablement tolérante. Se sont succédé notamment Roger Ier le Grand de 1085 à 1101, Roger II l'Avisé de 1130 à 1154, Guillaume Ier Le Mauvais de 1154 à 1166, Guillaume II Le Bon de 1166 à 1189, Tancrède de 1189 à 1194, le dernier de cette dynastie. Ces rois se sont efforcés de pratiquer une synthèse entre Rome et Byzance tant sur les plans religieux, politiques qu'artistiques.

Les pavages retenus ici proviennent principalement de la Chapelle Palatine à Palerme, et de la Cathédrale de Monreale située à une dizaine de kilomètres de la Chapelle. La Chapelle a été érigée par Roger II, principalement de 1132 à 1140, la Cathédrale par Guillaume II et Tancrède, principalement de 1180 à 1194. Certains de ces pavages ornent également les églises de Palerme, le Palais Royal ou encore le Palais de la Zisa.

Les artistes qui nous ont laissé ces chef-d'œuvres provenaient de toutes les nationalités et écoles de l'époque. Citons ici Guiseppe Schirö, l'auteur du livre [11] consacré à la Cathédrale de Monreale: "Les travaux furent exécutés très rapidement; c'est-à-dire, en ce qui concerne les structures, de 1172 à 1176, grâce à l'emploi d'une main d'œuvre nombreuse et spécialisée d'origines différentes, comme le montrent les multiples composantes stylistiques caractérisant l'ensemble. Mais cette pluralité a dû être habilement guidée par une pensée unique, extraordinairement vigilante, douée de capacités de synthèse exceptionnelles et possédant de vastes connaissances artistiques. Le nom de cet architecte reste inconnu, mais il s'agissait certainement d'un latin capable d'interpréter à la fois les directives ambitieuses d'un Souverain qui voyait loin et les principes de la théologie, et sachant tirer harmonieusement profit de ses ouvriers grecs, arabes, romains, vénitiens, provençaux, pisans ou des Pouilles. Le résultat est une œuvre unitaire en dépit de la diversité des éléments et des styles."

Ce commentaire élogieux mérite peut-être d'être enrichi par cette remarque. Vers 300, le romain Maximilien Herculéen se fit construire à Armerina, en Sicile donc, une très grande et magnifique Villa. Ravagée par un incendie qui la détruisit en 1160, du temps de Guillaume II donc, "elle disparut sous un glissement de terrain". On y a retrouvé un grand ensemble de tableaux remarquables, réalisés en mosaïques. Pour la suite de notre propos, on retiendra ces "médaillons" [Fig.1 à Fig.4]: ils sont exemplaires de l'art des mosaïques, en particulier romain, qui ornent tant de villas du pourtour méditerranéen. On y rencontre les motifs carrés, octogonaux, circulaires, les cadres torsadés en-

tourant ces médaillons, moins fréquemment des jeux d'entrelacs. Notons que les premiers entrelacs que nous connaissons, gravés dans la grotte espagnole d'Altamira, datent d'environ 30.000 ans.



Fig.1: Armenira 1, circa 300



Fig.2: Armenira 2, circa 300



Fig.3: Armenira 3, circa 300



Fig.4: Armenira 4, circa 300

Il se pourrait alors que se soient perpétuées également en Sicile une tradition et une confrérie d'artistes habiles dans l'art de la mosaïque. Ils auraient pu contribuer à la création et à la réalisation des chefs d'œuvres de Palerme.

3 Généralités sur le contenu des pavages siciliens

Les mosaïques siciliennes en général n'ont bien sûr pas manqué d'attirer l'attention des spécialistes. De leurs études et travaux, je retiendrai l'ouvrage d'Ernst Kitzinger *I mosaici di Monreale* [7] auquel malheureusement je n'ai pas pu avoir accès. Guiseppe Schirö [11] le résume ainsi: l'auteur "propose un examen fort attentif et approfondi des mosaïques de la Cathédrale de Monreale, dont il étudie la chronologie, l'iconographie, la technique et le style."

Cela dit, je souligne avec regret l'absence totale, tous auteurs confondus,

de relevés métriques, d'information sur les techniques mathématiques utilisées (outils géométriques et de calcul).

Les décors que nous examinerons se présentent sous la forme de pavages composites, limités en étendue. Par **pavage composite**, au contraire d'un pavage régulier, on entend que les tesselles qui le constituent peuvent avoir des formes et des dispositions diverses. L'emploi du terme pavage désignera ici un pavage a priori composite.

Nos pavages siciliens sont, pour certains, des pavages au sol, pour d'autres situés sur des parois verticales. Ils forment, pour la très grande majorité d'entre eux des frises, alors encadrant des portes, ou placées sur des colonnes, ou entourant une composition, elle-même en forme de pavage, ou non. Il faut noter que pratiquement toutes les compositions qui ornent les murs et les plafonds de ces édifices sont délimitées par des frises.

Les mosaïques romaines n'ont pas en général de couleurs bien vives, elles sont plutôt pastel, voire ternes. Les techniques employées ici leur donnent un éclat, une vivacité qui fascine le regard.

On admirera par exemple les frises élémentaires qui ornent un grand nombre des 228 colonnettes situées dans le cloître de 47 mètres de côté, attenant à la Cathédrale de Monreale. Je n'ai fait, de ces colonnettes, qu'une trentaine de photos aussi fascinantes les unes que les autres. Bien que ce ne sont que les frises intérieures, plus élaborées pour nombre d'entre elles, qui font l'objet de l'article, je ne résiste pas au plaisir de montrer hélas seulement six images de ces admirables colonnettes:







Fig.B

Mais les plus artistiques peut-être des mosaïques, par la décoration interne des motifs polygonaux (quelques octogones, avant tout des 16-gones), sont celles qui ornent les sols des édifices. De la quarantaine de photographies faites, j'en extraie les six qui vont suivre alors que bien d'autres choix sont possibles:

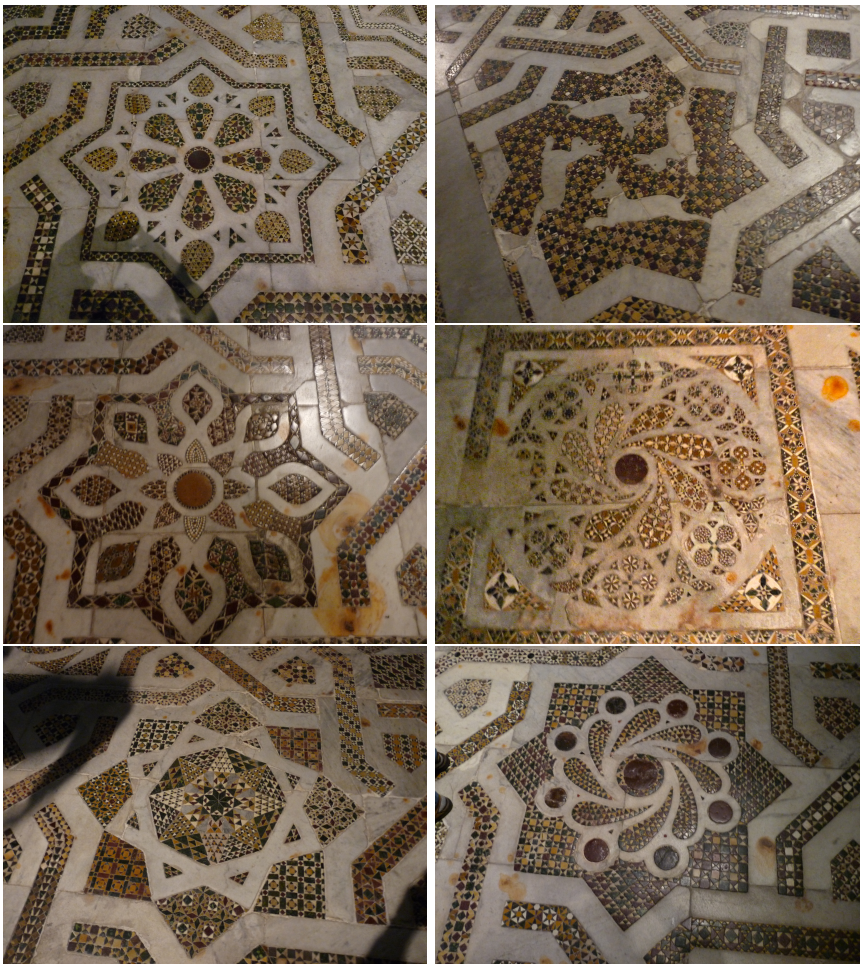


Fig.C

3.1 Les formes utilisées, leurs symétries

Sont présentes les symétries fondamentales d'ordre 2 et d'ordre 3, leurs multiples et combinaisons. On ne rencontre pas de symétrie impair d'ordre supérieur à 3, donc pas d'éléments pentagonaux - le pavage régulier pentagonal est impossible, ce que, par expérience, devaient parfaitement savoir les artistes de l'époque.

On peut penser que, dans leur esprit, les raisons mathématique et matérielle se conjuguaient heureusement avec la raison théologique pour justifier l'absence de telles symétries d'ordre impair : d'une part (raison matérielle) fabriquer en série des petits pavés carrés est beaucoup plus facile que fabriquer des pavés pentagonaux, et d'autre part (raison théologique) quatre archanges figurent dans les fondements de la vulgate chrétienne - laquelle, par ailleurs, a peut-être quelque lien de parenté avec la "théologie" pythagoricienne plus ancienne, fondée sur la trétraktys (les nombres 1, 2, 3, 4 et 10 leur somme), voire même, de façon plus lointaine encore, être associée à l'observation des quatre pattes du monde animalier, à l'élaboration de concepts, celui de point cardinal, celui d'éléments constitutifs du monde (les quatre éléments).

On ne s'étonnera donc pas de la forte présence initiale de tesselles carrées dans ces pavages, de leur disposition relative, peut-être liée à une signification symbolique telle que celle que dévoilent les calendriers des bergers, apparus à la fin du XIIe siècle - la gravure suivante, explicite, figure dans le calendrier édité à Troyes en 1529 :

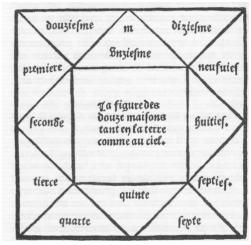


Fig.5

Les frises géométriques siciliennes sont des assemblages de tesselles d'abord de forme carrée. Puis, la déformation du carré respectant ses axes de symétrie conduit à la présence de tesselles ayant la forme de rectangles et de losanges. Leur insertion et fabrication conduit à mettre en évidence des tesselles triangulaires symétriques qui sont soit des demi-carrés, soit des demi-losanges. Couronnes et disques sont également présents dans certains pavages au sol ou sur certaines parois verticales, mais non point dans les frises.

Apparaissent ensuite des trapèzes allongés, des triangles non symétriques, et, de manière imposante, des octogones, des dodécagones, des 16-gones.

La distinction entre frises, établie sur la forme principale qui apparaît dans chacune d'elles, permet d'établir une première classification. Cette classification est assez approximative dans la mesure où la plupart des frises renferment

plusieurs motifs. Je distingue les frises aux motifs sans bord de celles aux motifs avec bord, et, dans chacun de ces cas, figurent les fichiers des motifs bâtis sur des polygones à p sommets, p = 3, 4, leurs multiples par opération de doublement successif: 6, 8, 12, 16, 24, et les disques et couronnes où p égale l'infini.

Des exemples de ces diverses configurations sont données dans la section 7.

4 Quelques définitions générales et notations

1. **Convexité-concavité globale.** Soit U un domaine d'un espace métrique de dimension topologique m. Sa *clôture* U^c est la réunion de toutes les portions de géodésiques joignant tous les couples de points de U. On dira que U est *convexe* si U = U^c. Dans le cas contraire où il est contenu dans U^c, il est dit *concave* ; par conséquent dans ce cas m-vol(U)< m-vol(U^c).

2. **(m,n)-polygone général.** (On remplace ici le mot "savant" de "complexe" par celui plus familier de "polygone"; on étend ainsi la vieille notion de polygone, terme qui va également se susbstituer à celui de polytope puisque sera donnée la dimension de l'espace dans lequel il se situe). On appellera (m,n)-polygone la donnée :
- d'un ensemble n de points, appelés des *sommets*, situés dans un espace métrique de dimension topologique m,
- de portions connexes de courbes joignant ces points et appelées *arcs*, *arêtes* si ces courbes sont des géodésiques. Un (m,n)-polygone a donc la dimension topologique 1.

Bien qu'a priori plusieurs portions de courbes puissent joindre deux sommets quelconques, on s'en tiendra à ce premier cas où ces deux sommets ne sont joints que par un seul arc.

Le dessin rapide suivant est peut-être une manière, au moins sur le plan psychologique, d'auto-portrait:



Fig.6

Il s'agit en fait d'un polygone dans le sens général qui vient d'être défini, permettant d'associer trivialement à tout dessin, à toute forme, un objet géométrique:

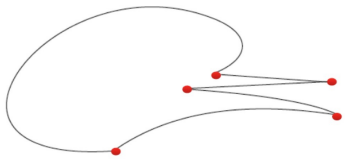


Fig.7

Un (*2,n*)-polygone sera dit *plan*. Dans ce texte, de tels (*2,n*)-polygones seront dénommés, par un léger abus de langage, *n-polygones* ou encore plus simplement *polygones*.

3. **(*m,n*)-polygone particulier.** Un (*m,n*)-polygone sera dit *homogène* (et a contrario *hétérogène*) lorsque tous les arcs sont définis à partir d'un seul type d'équation. Par exemple le (*m,n*)-polygone sera dit *linéaire* (respectivement *parabolique*, *sinuosïdal*, ...) s'il est homogène et si tous ses arcs sont des portions de droites (respectivement de paraboles, de sinusoïdes, ...). Il est de plus *régulier* si tous ses arcs ont même longueur.

4. ***m*-motif M.** Par *m-pavé* ou *m-motif* M, on entend un domaine fermé connexe d'un espace métrique de dimension topologique *m*. Lorsque $m = 2$, on utilisera simplement le terme "pavé" ou "motif". Son *bord* δ M a la dimension topologique 1.

Le *m*-motif M sera dit *polygonal* lorsque son bord contient un (*m,n*)-polygone. Tout *m*-motif admet un approximé polygonal (approximation PL).

Désormais, le terme polygone désignera le bord d'un motif.

Certains polygones portent des noms spécifiques comme un triangle, un carré. Pour désigner un pavé M dont le bord est un tel polygone, on utilisera le nom spécifique du polynome suivi du qualificatif *plein*. On distinguera ainsi un carré d'un carré plein.

Soit M un motif plan de bord *n*-polygonal dont les sommets sont successivement notés 1, 2, ..., n. On notera alors par *1'* l'arête joignant les sommets 1 et 2, par *k'* l'arête joignant les sommets k et (k + 1)(mod n). On dira que k est *positivement adjacent* à l'arête *(k-1)'* et *négativement adjacent à l'arête k'*, que les sommets k-1 et k+1 sont *adjacents* au sommet k.

Etant donnés deux sommets quelconques a et b du bord de M, l'arc de géodésique (ou arête) (a,b) est *intérieur* s'il est contenu dans l'intérieur du motif M. Dire *simplement* que (a,b) est une arête signifie qu'elle appartient au bord de M.

5. **Convexité-concavité locale.** Un n-polygone plein M sera dit *convexe au sommet* k (respectivement *concave* en k), si l'arc de géodésique joignant le sommet (k-1) au sommet (k+1)mod n est contenu (resp. n'est pas contenu) dans M: cet arc appartient donc (resp. n'appartient pas) au bord de M.

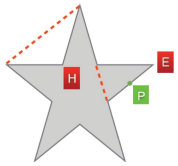


Fig.8

Le n-polgygone est *globalement convexe* ou tout simplement *convexe* s'il est convexe en tous ses sommets. Un sommet k sera dit *plat* s'il est situé sur la géodésique (l'arc) joignant le sommet k-1 au sommet (k+1)modn.

On peut caractériser la convexité et la concavité locales de manière différente, se prêtant davantage au calcul. Considérons les normales $N_{(k-1)'}$ et $N_{k'}$ aux arêtes (k-1)' et k' adjacentes au sommet non plat k. On note par :

- $N_{(k-1)'k'}$ l'intersection de ces deux normales,
- par η-(t,k) la portion de géodésique joignant k à $N_{(k-1)'k'}$ orientée dans le sens de k vers $N_{(k-1)'k'}$. Une part de cette géodésique est à l'intérieur de M. On notera par η+(t,k) une portion de cette géodésique partant de k et orientée vers l'intérieur de M.

Alors c(k), produit scalaire des vecteurs unitaires tangents en k à η-(t,k) et η+(t,k), est négatif (resp. positif) si le polygone est concave (resp. convexe) en k.

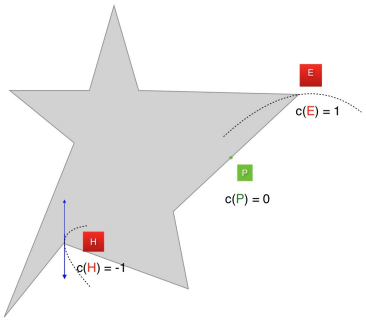


Fig.9

Une solution alternative plus simple et générale pour obtenir un point tel que $N_{(k-1)'k'}$ consiste tout simplement à prendre un barycentre des sommets k -1 et k+1.

On affectera donc au sommet k l'*indice (de convexité-concavité)* c(k) = 1 (respectivement - 1, 0) si le polygone est convexe en k (resp. concave, plat en k). On dira alors que le sommet k est de *type elliptique* (resp. *hyperbolique*, *plat*). c(M), la somme des c(k) lorsque k parcourt l'ensemble des sommets du polygone M, sera appelé l' *indice de (convexité)* de M.

On peut généraliser cette approche de la convexité-concavité. Prenons par exemple un (m,n)-polygone linéaire avec m = 3 (un polytope dans l'espace usuel). Trois arêtes distinctes, notées *a'*, *b'* et *c'*, sont adjacentes au sommet k. Chacun des 3 couples de ces arêtes engendre un *2*-plan. On en prend un orthogonal. Les trois plans orthogonaux $N_{a'b'}$, $N_{b'c'}$ se rencontrent selon une droite, que $N_{c'a'}$rencontre en un point $N_{a'b'c'}$ commun aux trois plans. À partir de ce point, on définit comme précédemment l'indice c(k) du sommet k.

Plus généralement, en dimension m, soit *a'*, *b'*, ... les m arêtes distinctes adjacentes à un sommet non plat k. m-1 d'entre elles définissent un (*m-1*)-plan. Ces (*m-1*) plans deux à deux transverses ont un point commun, le sommet k.

On définit pour chacun des plans précédents un (*m-1*)-plan qui lui est orthogonal. Ces plans orthogonaux également deux à deux transverses ont un point commun $N_{a',b',\ldots}$ à partir duquel on trace la géodésique passant par k.

Mais la solution la plus simple pour obtenir un point analogue à ce comparse de k consiste bien sûr à prendre le barycentre des sommets qui lui sont adjacents.

Si par ailleurs k est un point singulier ou régulier d'une courbe, d'une surface, du bord d'un domaine fermé, on en réalise une approximation locale simpliciale (i.e. par un (*m*,*n*)-polygone adapté) et on réitère la démarche précédente.

On pourra caractériser également numériquement le degré de concavité-convexité de la façon suivante. On inscrit les sommets elliptiques d'un polygone quelconque sur un cercle unité. Chaque sommet hyperbolique k est situé à la distance l_k du centre C de ce cercle, positive si C est intérieur au motif dont le bord est le polygone donné, négative dans le cas contraire. Le produit des l_k est une mesure du *degré de convexité-concavité.*

6. **Codage.** Le *n*-polygone δM de sommets 1, 2, ... n sera dit *codé* si quel que soit les sommets k et (k+1)modn, la portion de géodésique joignant ces deux sommets est une arête du polygone.

On dira que ce polygone est *c-codé* s'il est codé et si, à l'indication du sommet k, figure également la valeur de c(k).

On notera que l'indice de convexité d'un polygone, par nature global, est insuffisant pour caractériser convenablement la forme du polygone. Celle-ci est par contre bien définie par la liste de indices de chacun des sommets.

Il est *complètement c-codé* si, en plus, figure également la valeur au sommet k de l'angle intérieur au motif. (Dans le cas *m*-dimensionnel, il s'agit d'un angle *m-1*-dimensionnel - évalué par le (*m-1*)-volume de l'intersection de la sphère unité S^{m-1} centrée en k avec le m-motif).

Il est *totalement codé* au sommet k s'il est complètement codé et si en plus figure la longueur des arêtes adjacentes à ce sommet.

7. **Configuration.** Deux n-polygones codés sont dit *équivalents* s'il existe une bijection κ entre leurs sommets de sorte $c(k) = c(\kappa(k))$.

L'ensemble des polygones équivalents à un polygone sera appelé une *configuration.*

Par exemple, les deux 6-polygones suivants appartiennent à la même configuration:

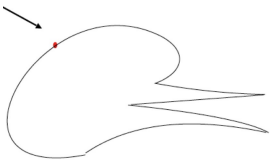


Fig.10: (2,6)-polygone

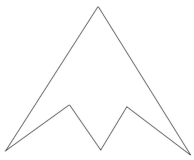


Fig.11: Hexagone d'indice 1

Dans cette définition, on ne tient pas compte de l'orientation possible du cycle formé par les arêtes du polygone, ce qui conduit à considérer comme équivalentes deux figures symétriques (à une déformation métrique près) comme par exemple celles-ci:

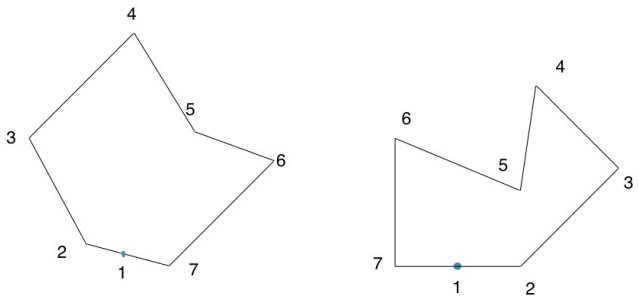


Fig.12. Deux polygones appartenant à la même configuration

8. **Déformation.** Deux n-polygones M ou motifs équivalents sont donnés à un difféomorphisme près. On appellera un tel difféomorphisme une *déformation*. Une telle déformation respecte donc les convexités et concavités locales.

9. **Épaississement.** On considèrera a priori tout fibré B de base A comme un *épaississement* de A. Les épaississements que l'on traite ici sont élémentaires: la dimension topologique de la base A est 1, celle de la fibre 1 ou 2, la fibre pouvant être un segment, un cercle, un disque plan. Par exemple, un segment A étant donné, un rectangle B de côté A, un disque de diamètre A sont des épaississement de A. Un cercle A étant donné, une couronne, un disque bordé par ce cercle, en sont des épaississememements. Le bord de δ B de B peut être défini par une application β_A: A $\rightarrow R^2$.

Un épaississement B de A est *symétrique* si presque toute section de B transversale à A rencontre le bord de B en deux parties Δ_1 et Δ_2 en bijection avec l'intersection de cette section avec A (autrement dit, cette intersection et chaque Δ_i ont même nombre d'éléments).

Si, de plus, considérant deux éléments x_1 et x_2, respectivement deΔ1 et de Δ2, ayant même image y dans A par les bijections, les distances d(x_1x,y) et d(x_2,y) sont égales, l'épaississement M sera dit *métriquement symétrique*.

A étant un noeud situé dans un plan, I un intervalle, A x I = N sera appelé un *ruban*(sous entendu noué).

10. **Symétries potentielles.** Soient deux parties W et W' d'un domaine D ayant en commun la partie S. On dira que W et W' sont *potentiellement symétriques,* en abrégé *p-symétriques*, s'il existe une bijection β entre W-S et W'-S.
Ces deux parties sont *métriquement symétriques*, en abrégé *m-symétriques* ou tout simplement *symétriques*, si la bijection est une isométrie (la distance entre deux points de W et celle entre leurs deux points images par β sont égales).

M étant un motif convexe, nous allons prendre ici en considération des symétries relatives seulement aux sommets du polygone qui le borde:

- si n = 2q, δM étant sans sommet plat, on appellera *k-ième axe de p-symétrie* de ce polygone convexe la géodésique portée par l'arrête intérieure α(k, k+q (mod 2q)) joignant le couple de sommets (k, k+q (mod 2q)) - le sommet k+q (mod 2q) est l'*opposé* du sommet k. Ce polygone possède donc q axes de p-symétrie (cf Fig.14 losange sortant).

- si n = 2q et si δM a un sommet plat k, ce polygone n'a qu'un seul axe de p-symétrie, celui défini par k et son opposé (cf Fig.6 losange plat).

- si n = 2q +1, δM étant sans sommet plat, le *k-ième axe de p-symétrie* du polygone sera la géodésique portée par l'arête intérieure α(k,k') où k' est un point de l'arête (k+q)' mod(2q+1). Cette arête sera appelée l'arête privilégiée de l'axe de symétrie correspondant. Un tel polygone possède 2q + 1 axes de p-symétrie (cf Fig.7 sortant).

- si n = 2q +1 et si δM a un sommet plat k, ce polygone n'a qu'un seul axe de p-symétrie, celui défini par k et son arête opposée k' (cf Fig.14 plat).

La notation M(n,f) désignera un motif convexe M à n arêtes et f sommets plats.

On notera par $\mathbf{A}$(M) l'ensemble des axes de symétrie potentielle du motif M, qu'il soit convexe ou non.

Notons les propriétés suivantes :
Si g est un difféomorphisme du motif convexe M qui conserve toutes les valeurs de c(j) pour tout sommet j différent de k, et si M admet un axe de symétrie en k, alors il en est de même pour M' = g(M) en g(k).
Par suite:
Proposition 1: *Toute déformation M' du motif convexe M* (difféomorphisme métrique conservant les convexités locales) *possède au moins un axe de p-symétrie.*

Soit P_0 un pavage plan initial, fini (i.e. situé sur un domaine borné), de motif générique M. Chaque pavé peut être repéré par la position dans le plan d'un seul de ses point, donc par un couple (p, q) de deux entiers. Un pavé du pavage est donc noté $M_{p,q}$. Considérant ce pavé particulier, pour simplifier, nous le notons encore M.
On notera également par P_f un pavage final tel que pourra l'observer un visiteur. Il a été obtenu par une série de transformations réalisées à partir du pavage initial P_0. On indice par la suite d'entiers I = {1, 2, ..., i, ... , f_P} la succession des transformations opérées sur ce pavage initial.
Ces transformations pourront être faites à l'aide de motifs secondaires. On note par A_k un tel motif, k étant un indice de la suite K = {1, 2, ..., k, ...,f_A}.
Une transformation de type j du motif A_k, indicée par k qui renvoie à ce motif, exécutée alors qu'on a atteint l'étape i de la fabrication du pavage, est notée $h_{j;k,i}$. L'entier j appartient à la suite d'indices J = {1, 2, ..., j, ..., f_J}.
Le résultat de cette transformation est $h_{j;k,i}(A_k) = A_{j;k;i+1}$.

En matière d'art plastique, nos goûts ont une grande part de leurs fondements dans nos activités physiologiques de perception visuelle (voir à ce sujet les chapitres III.13-III.16 de [3]). Par ses singularités, ce que j'ai nommé le squeltte

du percept occupe une place importante dans l'observation d'une œuvre, et donc dans son élaboration. Deux types de singularités vont ici retenir l'attention.

11. **Le centre de gravité ou singularité centrale d'un motif, d'une œuvre**. Une donnée première, dont la présence est quasiment universelle, joue un rôle central dans la construction et l'appréciation des œuvres : celle de la présence d'un "centre de gravité". Etant donné un motif, il existe, en son intérieur, un domaine qui attire le premier regard. Réduit symboliquement ou par nature à un point, nous l'appelons le *centre de gravité* du motif. Les propriétés physiques et mesurées du motif permettent de calculer la position de ce centre. Ces propriétés physiques sont essentiellement les données métriques du motif et les propriétés de la lumière (intensité, longueur d'onde, direction) réfléchie en chaque point du motif.

Par ailleurs des données géométriques ou subjectives particulières peuvent conduire à fixer le centre de gravité autrement que par les données physiques évoquées plus haut. Par exemple si le motif est un cône (au sens de [2]), on peut décider a priori que le sommet du cône en sera la singularité principale. Sous cette condition, une des extrémités d'une portion connexe de courbe γ par exemple pourra être considérée comme la singularité centrale de γ, laquelle est un cône dont la base est l'autre extrémité de γ. Plus généralement, un sommet d'un polygone plein étant le sommet d'un cône au sens précédent pourra être considéré comme la singularité essentielle du polygone, que ce soit en particulier un triangle, un carré, un losange, un trapèze.

Une forme géométrique F étant donnée, le même "poids" a priori affecte chacun de ses points, de sorte que son centre de symétrie, si celui-ci existe, est spontanément assimilé à un centre de gravité de la figure F. Un tel centre de symétrie est défini comme le point de concours de tous ses axes potentiels de symétrie. Il se peut qu'un tel centre n'existe pas, mais de toute façon deux axes de p-symétrie quelconques ont un point commun. Soit s le nombre maximal d'axes de p-symétrie de la figure ayant C_s pour point commun, on dira que ce point est un *centre partiel de symétrie de F d'ordre s.* La présence d'un tel centre de symétrie permet en général de décomposer F en cônes de sommet C_s .

12. L'application $h_{j;k,i}$: $A_k \to M_i$ définit entre autres la position de l'image du centre de gravité C_k du motif. Elle peut conserver ou non la position du centre de gravité.

Lorsque j décrit J, les centres C_j décrivent une courbe discrète, la *trajectoire des centres.* Elle est le plus souvent un cercle discret, éventuellement réduit à un seul point.

On notera par ailleurs que l'indice i indique simplement que l'opération se fait sur le pavage P_i, il ne reflète en rien la nature de la transformation; seul j et k sont ici significatifs, autrement dit $h_{j;k,i} = h_{j;k,i\,+\,r}$ quel que soit l'entier r.

13. Un motif M étant donné, son bord δM est un autre ensemble singulier du domaine qu'il occupe. (Si par exemple le motif est un carré plein, son bord

est constitué des quatre arêtes qui en forment le contour). Ce bord peut avoir lui-même des singularités (par exemple les sommets d'un carré).

14. Enfin les sous-variétés de symétrie d'un motif (pour un motif plan, son centre et ses axes de symétrie) en sont également des domaines singuliers qui, avec le bord du motif, en constituent l'*ensemble des domaines singuliers structuraux.*

5 Quelques propriétés générales des polygones et des pavages mathématiques

Rappelons d'abord ce résultat remarquable de Gauss:

Théorème: *Un polygone régulier plan n'est constructible à la règle et au compas que si le nombre de côtés du polygone type est égal à $2^k F$ où F est un produit de nombres de Fermat distincts et premiers.*

Un nombre de Fermat F_r est de la forme $2^{2^r} + 1$ (r entier). Les quatre premiers de la liste des nombres de Fermat ($F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65\ 537$) sont des nombres premiers.

En fait:

Proposition 2: *Tout hexagone plan ayant un centre de symétrie peut servir de motif à un pavage du plan.*
En conséquence:

Corollaire 1: *Tout quadrilatère plan, convexe ou non, est le motif d'un pavage du plan.*
En conséquence:

Corollaire 2: *Tout triangle plan est le motif d'un pavage plan.*
En conséquence:

Corollaire 3: Soit un motif M bordé par un quadrilatère plan. Divisons-le en deux parties par une ligne brisée de a arêtes joignant deux points distincts de sommets et situés sur des arêtes opposées du quadrilatère. On réalise ainsi deux motifs bordés chacun par un (3 + a)-polygone: cf la Figure 13. *Le plan peut être pavé par ce couple de motifs complémentaires au sein du motif donné.*

Cette procédure s'étend trivialement à tout pavage d'un espace m-dimensionnel standard réalisé à partir d'un motif M. Si M est linéaire - son bord est alors un m- polytope - des chaînes de longueur a de *(m-1)*-plans permettent de construire des pavages à motifs complémentaires, certains d'entre eux ayant même nombre de faces.

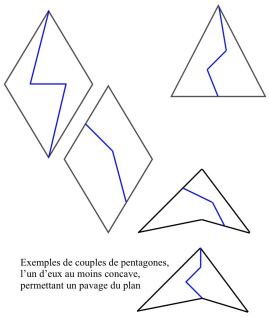


Fig.13

Par ailleurs:

Lemme : *La somme des angles d'un polygone à n côtés est égale à (n - 2)π.*

Corollaire 4: De là provient le fait qu'*un polygone à n côtés a au plus (n-3) sommets hyperboliques,* puisqu'en un tel sommet k l'angle intérieur est au moins égal à π. Dans une telle configuration, en supposant égaux tous les angles intérieurs attachés aux sommets hyperboliques, leur valeur commune est strictement inférieure à (n-2)π/(n-3).

Egalement:

Proposition 3: *Tout difféomorphisme h d'un pavage régulier d'un domaine D est un pavage en général non régulier de h(D).*

Remarquons enfin que :

Corollaire 5: *Si un pavage du plan est réalisé avec pour motifs des n-polygones, alors il contient un pavage réalisé avec pour motifs des 2(n-1)-polygones, de sorte que l'intersection de deux tels 2(n-1)-polygones est soit vide soit un n-polygone.*

Corollaire 6: De cette observation élémentaire résulte par exemple le fait qu'*un pavage du plan par des 5-polygones provient d'un pavage du plan par des octogones. Si tous les 5-polygones sont isométriques, d'une part il en est de même des octogones, et d'autre part ces octogones possèdent chacun un axe de symétrie ou de rotation situé sur l'arête commune aux deux 5-polygones qu'il contient.*

Ces dernières observations se généralisent facilement (par exemple on considèrera des triplets de n-polygones, deux d'entre eux ayant au plus une arête commune). Un mode de construction de ces polygones, comme celui décrit plus loin par adjonction, permet alors de résoudre de manière algorithmique certains problèmes de pavage.

6 Construction des polygones par extension simple

Nous allons développer ici une procédure élémentaire d'enrichissement des polygones par ajout de sommets à un polygone rectiligne.

Définitions: Etant donnée une arête ab du polygone δM, la déformation significative la plus simple consiste à introduire un sommet supplémentaire c entre a et b, puis, éventuellement, en étirant ac et cb, à le déplacer de manière convenable d'un côté ou de l'autre de l'arc initial ab jusqu'en la position c. Si δM est le polygone initial possédant l'arc ab, δM(c, ab) sera le nouveau polygone obtenu par *adjonction* du sommet c à l'arc ab.

Le sommet et l'adjonction seront dits *rentrants* ou *hyperboliques* (respectivement *potentiels* ou *plats*) (antibubbling singularities dans la terminologie de [1]) si c est à l'intérieur de M (respectivement sur le polygone δM): l'aire du polygone plein de bord δM(c, ab) est alors inférieure (respectivement, égale) à celle de l'aire du motif M.

Le sommet et l'adjonction seront dits *sortants* ou *elliptiques* (bubbling singularities) si la géodésique joignant c à c ne rencontre pas M. L'aire du polygone plein de bord δM(c, ab) est alors supérieure à celle de l'aire du motif M.

Dans ce texte, l'adjonction simultanée de plusieurs sommets à un même arc n'apparaîtra que de manière exceptionnelle.

Exemples: Dans la Figure 14, le polygone initial δM est ici un triangle. Lui adjoignant un sommet sur une de ses arêtes, on crée un polygone à 4 arêtes que l'on nomme ici un ≪losange plat≫. Etiré sur sa droite, il devient un ≪losange rentrant≫, sur sa gauche un ≪losange sortant≫. Ce dernier, convexe, est omniprésent dans les frises.

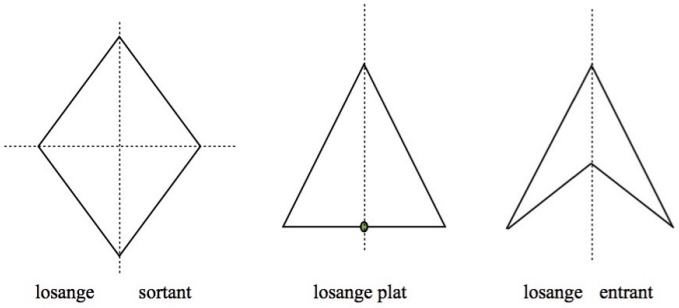


Fig.14

Ces trois losanges possèdent chacun au moins un axe de symétrie, joignant un couple (s, s') de sommets opposés bien choisis.

Quelques remarques élémentaires mais d'ordre général:

Un polygone convexe avec ou sans sommet plat étant donné, l'adjonction d'un sommet à ce polygone engendre seulement trois configurations selon que le sommet ajouté est plat, sortant ou entrant: dans ce dernier cas, le polygone perd sa convextié.

Le processus d'extension appliqué au losange sortant engendre ces trois pentagones, ayant au moins chacun un axe de symétrie:

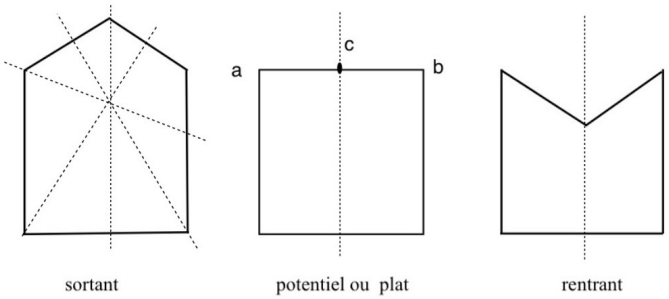


Fig.15

Un arc étant donné, le nombre de manières de le modifier par adjonction de sommets supplémentaires est infini. Chaque façon dépend du nombre s de sommets que l'on va adjoindre et de la disposition relative des nouveaux arcs créés. Pour une valeur de s donnée, le nombre d de dispositions acceptées ne dépend que de s.

L'adjonction de sommets entrants ou sortants, répétée ou non, respectant ou non des symétries, est évidemment une procédure d'élargissement du champ créatif des frises géométriques. On fera ensuite ici que les polygones obtenus conservent le plus grand nombre de symétries.

De manière générale,

Proposition 4: *L'adjonction de k sommets par arc à tous les arcs d'un polygone à n sommets engendre un polygone à (k+1)n sommets.*

En particulier, lorsque k = 1, on double le nombre d'arêtes du polygone, de sorte qu'à partir d'un quadrilatère on obtient un "octolatère", d'un octogone un 16-gone, etc.

Cette procédure se généralise trivialement à tout (m,n)-polygone, conjointement ou non à ses arêtes, ses 2-faces, etc, ses (m-1)-faces.

Nous allons examiner les façons dont se présentent les polygones à faible nombre de sommets, en liaison avec leur présence dans les motifs siciliens.

Tout sommet rentrant introduit un défaut supplémentaire de concavité. C'est donc à partir de la liste des n-polygones convexes et de l'usage des sommets sortants que l'on pourra établir la liste des (n+1)-polygones convexes.

On notera qu'un sommet sortant introduit une concavité nouvelle chaque fois qu'il apparaît entre un sommet plat et un sommet voisin. On éliminera donc les situations de ce type pour la recherche des polygones convexes. Autrement dit:

Proposition 5: *tout (n+1)-polygone convexe s'obtient par adjonction, soit d'un sommet plat à un n-polygone convexe, soit d'un sommet sortant à toute arête d'un-polygone convexe à condition qu'elle soit sans sommet plat. tout (n+1)-polygone convexe sans sommet plat s'obtient par adjonction d'un sommet sortant à un n-polygone convexe sans sommet plat.*

Corollaire 7: Comme il n'y a qu'un seule configuration de 3-polygone convexe sans sommet plat, il en résulte que *n'existe qu'une seule configuration de n-polygone convexe sans sommet plat.*

Pentagones. Aucun pentagone n'étant apparemment présent dans les frises siciliennes, ce cas n'est envisagé ici que par complétude.

On dispose a priori de trois façons pour obtenir un pentagone :

- par adjonction d'un sommet à chacun de deux arcs distincts d'un triangle
- par adjonction d'un sommet à un arc d'un losange
- par adjonction de deux sommets à l'un des arcs d'un triangle.

Le procédé pour être assuré d'obtenir tous les pentagones est celui d'adjonction d'un sommet aux différents arcs des différentes configurations de losanges, ou, par abus de langage, aux différents arcs de losanges.

Compte tenu de la symétrie présente dans chaque losange, il suffira d'opérer l'adjonction sur seulement la moitié des arcs. Les autres configurations s'obtiendront par symétrie. Selon la terminologie classique, on dira qu'une configuration et sa symétrique sont énantiomorphes.

Les losanges respectivement sortant et plat engendrent les 4 types de configurations suivants:

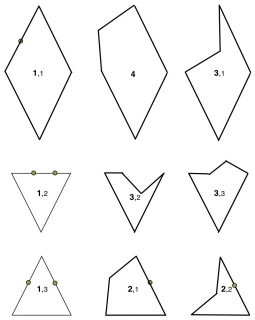


Fig.16

Le losange rentrant engendre les configurations suivantes :

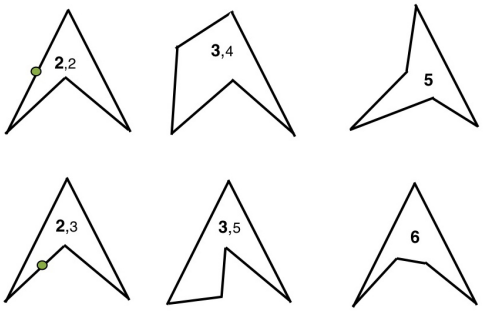


Fig.17

Les 3 configurations notées **1** sont différentes. 3 des 4 configurations notées **2** sont différentes. Aux symétries miroirs près, les configurations notées **3** sont les mêmes et donc se ramènent à une seule. Aux symétries près, on a donc un total de 9 configurations différentes de pentagones.

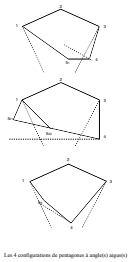
Toutes ces configurations admettent un axe de symétrie potentiel (cf les définitions 10 de la section 4).

Il est remarquable que n'existe qu'une seule configuration convexe sans sommet plat, la **4**.

À ce jour, on dispose de 8 façons différentes l'emploi de la configuration 4 pour réaliser un pavage du plan au sens de la définition 5.1. Si on ne tient pas compte de la contrainte imposée dans cette définition, il existe 7 façons supplémentaires de paver le plan avec cette configuration.

Il ne semble pas qu'on ait chercher à paver le plan par des pentagones convexes appartenant aux configurations 1 (triangulaires à 2 sommets plats) et 2 (quadrilatère à un sommet plat).

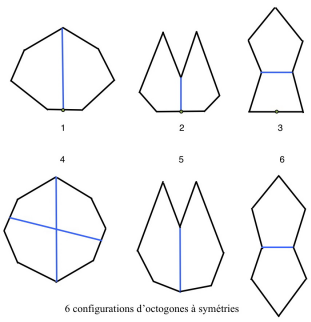
Conséquence de considérations élémentaires sur les angles, outre celle dont tous les angles sont obtus, la configuration convexe 4 ne peut prendre que quatre autres formes selon qu'elle possède un, deux (adjacents ou non) ou trois angles aigus ou droits (elle ne saurait en posséder quatre).



Les 4 configurations de pentagones à angle(s) aigu(s)

Fig.18

L'accouplement selon une arête commune de deux telles configurations conduit à une configuration d'octogone, ayant parfois l'arête commune pour axe de symétrie, non convexe en général (configurations de la figure 19 ci-dessous).



6 configurations d'octogones à symétries

Fig.19

Hexagones. L'adjonction d'un sommet (rentrant, plat ou sortant) à chacun des trois arcs du triangle engendre un hexagone, de même que l'adjonction de deux sommets à l'un des arcs du triangle accompagnée de l'adjonction d'un sommet à un autre arc. On obtiendra également des hexagones en ajoutant un sommet (rentrant, plat ou sortant) aux divers pentagones de la liste précédente.

Un pentagone étant donné, il engendre a priori 5x3 = 15 configurations d'hexagones, d'où toujours a priori l'existence d'au plus 135 types d'hexagones

distincts si l'on ne se donne aucune contrainte d'équivalence possible entre deux configurations, notamment par symétrie miroir.

Pour un pentagone donné, l'adjonction d'un sommet plat ne change en rien le bord du polygone plein correspondant; si l'apparence des configurations correspondantes reste invariante, l'adjonction a pour effet de rendre éventuellement possible le pavage par ces hexagones.

En fait on peut considérer les 6 configurations de pentagones comme dotées chacune d'un axe de symétrie traversant une arête privilégiée, invariante par la symétrie. De sorte que modulo la symétrie, seules trois arêtes au plus sont concernées par l'opération d'adjonction, qui n'engendre alors a priori que 54 types de configurations, dont certaines sont équivalentes. Les adjonctions de sommets entrants ou sortants modifient ces bords et, à la symétrie près, engendrent 3x2 configurations par pentagone: deux d'entre elles étant engendrées par la présence de l'arête privilégiée. L'alternance des arêtes entrantes et sortantes réduisent à deux les quatre autres configurations.

La liste complète contient les cas particuliers d'hexagones possédant un centre de symétrie métrique, obtenus par exemple en adjoignant un sommet à chacun des arcs d'un couple d'arcs symétriques d'un losange, et un sommet rentrant au pentagone 1. En éliminant les configurations où se présente un sommet plat, on obtient les configurations élémentaires suivantes:

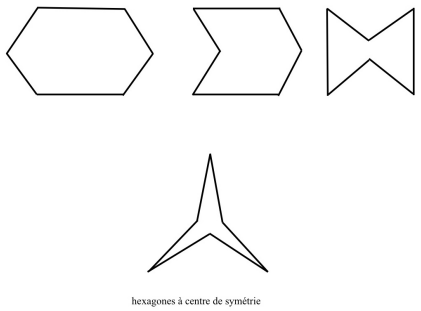


Fig.20

Heptagones. On obtient les heptagones en ajoutant deux sommets aux pentagones ou un sommet aux hexagones. On commence par ajouter des sommets plats, on les transforme ensuite ensommets entrants ou sortants. Ci-après les configurations d'heptagones sans sommet plat présentant un axe de symétrie métrique:

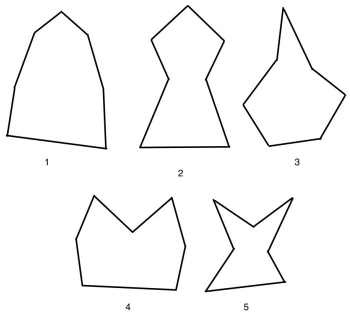


Fig.21

Octogones. La liste suivante des octogones à symétrie métrique complète la liste donnée Figure 17.

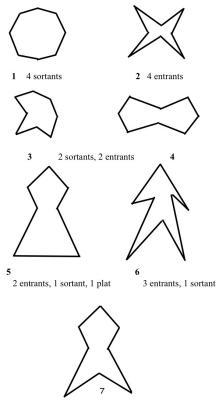


Fig.22

Décagones. L'adjonction d'un sommet plat à chacune des quatre arêtes d'un hexagone engendre un décagone. Différentes configurations de décagones peuvent alors être obtenues selon que le sommet situé entre deux sommets plats devient rentrant ou sortant. On observera par exemple sur la Figure 64 la présence de ces deux types de décagone:

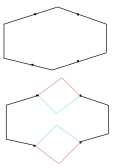


Fig.23

7 Les principales configurations observées des pavés siciliens

7.1 4 sommets

Les configurations les plus fréquentes sont également les plus simples, les plus classiques: triangles, losanges sortants d'abord sous la forme de carrés, hexagones convexes, octogones et dodécagones convexes, couronnes. En d'autres termes, les motifs siciliens ont les symétries d'ordre 2 ou 3, et leur multiple par doublement selon la tradition égyptienne. On rencontre donc d'une part les 4-gones, 8-gones, 16-gones et les 6-, 12- et 24-gones d'autre part. Voici quatre exemples de décors siciliens élémentaires où apparaissent simplement des carrés pleins situés sur des frises murales :



Fig.24: carré 1



Fig.25: carré 2

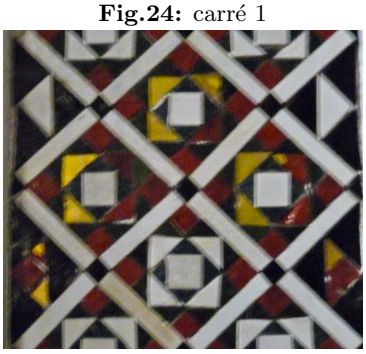


Fig.26



Fig.27

7.2 8 (2x4) sommets

A partir de carrés, sont fabriqués des octogones entrants ou sortants, ces derniers souvent construits à l'aide de losanges. La Figure 28 montre un octogone sortant (octogone de type 1) contenant des losanges de couleur noire et porphyre - le matériau lui-même pouvant être effectivement du porphyre, ou bien du jaspe - , et un octogone entrant gris (octogone de type 2) inséré dans l'octogne précédent. L'octogone de la Figure suivante est également de type 2.



Fig.28: octogones de type 1 et 2



Fig.29: octogone de type 2

7.3 16 (2x8) sommets

La Figure 28 fait apparaître un premier 16-gone entrant or dont 8 sommets coincident avec les sommets de l'octogone porphyre, et un second 16-gone entrant

réalisé avec deux carrés tournés de 45° l'un par rapport à l'autre, dont 8 des sommets coincident avec les milieux de l'octogone source, les huit autres sommets étant masqués par les parties sortantes en forme de losange du 16-gone précédent. Ces losanges matérialisent la décomposition des 16-gones en cônes ayant pour sommet commun les centres de symétrie de ces polygones (cf la sous-section 4.11).



Fig.30: octogones sortants porphyre et or, 16-gones entrants blanc et porphyre



Fig.31: octogone or, 16-gone entrant prophyre

Dans cette nouvelle Figure, l'octogone sortant or donne naissance à un 16-gone entrant porphyre, et à un 16-gone sortant au bord épaissi en marbre:



Fig.32: octogone sortant porphyre, 16-gone entrant or



Fig.33: 16-gone entrant or



Fig.34: octogone sortant porphyre, 16-gone entrant or

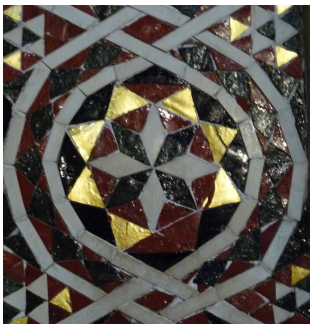


Fig.35: octogones et 16-gones entrant et sortant (or)

7.4 6 (2x3) sommets, 12 (2x 6) sommets

L'adjonction d'un sommet entrant ou sortant à chaque arête d'un hexagone convexe permet de fabriquer des dodécagones sortant ou entrants comme ceux-ci:



Fig.36: hexagone et dodécagone entrant



Fig.37: hexagone et dodécagone entrant

Les quatre Figures suivantes montrent de très beaux jeux d'hexagones et de dodécagones entrants et sortants.



Fig.38



Fig.39



Fig.40



Fig.41

Ce motif au bord épaissi en marbre blanc, un 24-gone, est exceptionnel - la Figure 67 montrera une autre présentation d'un 24-gone:



Fig.42

7.5 Une frise originale

L'un des murs de la Chapelle Palatine (Palerme) est décorée par cette frise dessinée par la main d'un véritable artiste:



Fig.43



Fig.44

Peut-on imaginer qu'il l'ait en partie conçue à partir d'un développement personnel sur les polygones ?

A partir en effet de la configuration octogonale 5 (voir la Figure 22), où les arêtes linéaires sont remplacées par des arêtes courbes, on peut obtenir un motif dont le bord est celui de cet élément du décor:



Fig.45

Par ajout de sommets, on peut, à partir de la même configuration octogonale 5 obtenir cette configuration à 14 sommets:

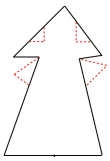


Fig.46

Une déformation convenable de ses arêtes linéaires donne alors naissance au motif dont le bord est celui du personnage stylisé qui orne la frise:

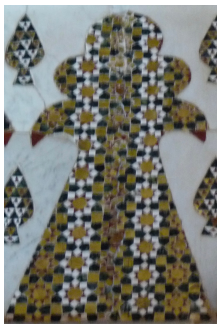


Fig.47

7.6 p = l'infini

Ce seul magnifique décor suffira pour illustrer ce type de configuration:

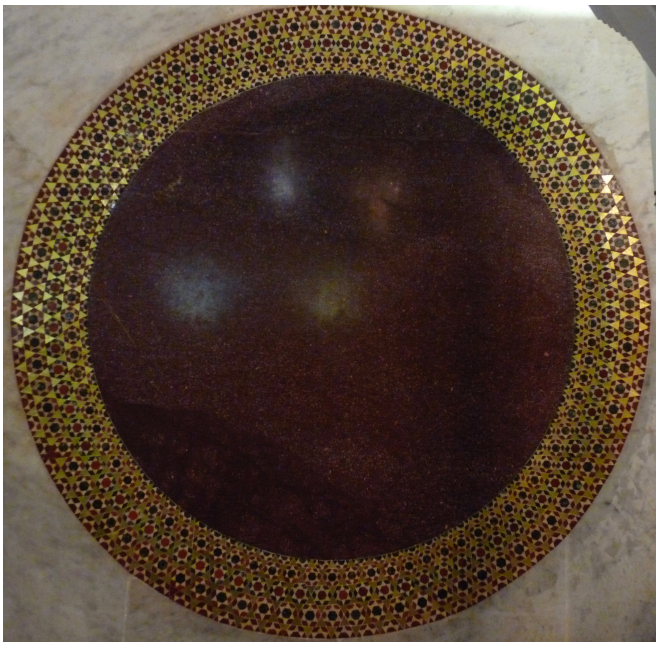


Fig.48

8 Enrichissement des motifs

8.1 Trois observations

L'examen des Figures 24 à 27 fait apparaître trois phénomènes:
1. La présence d'un nouveau carré plein au sein d'un tel premier carré : le carré plein or contient un carré plein granit; les carrés pleins marbre blanc contiennent des carrés pleins porphyre ou des carrés pleins marbre bleu.
2. Le bord des petits carrés pleins marbre blanc a été épaissi : chaque arête I d'un carré plein est devenu un rectangle porphyre I x J, de sorte que le carré plein or et le carré plein marbre blanc à bord épaissi ont la même aire.
3. On note ici la présence de cinq couleurs : or, gris, blanc, pourpre, bleu. Sur le plan esthétique, les couleurs alternent de manière qu'une couleur claire ou vive jouxte une couleur sombre ou terne. Dans le cas du carré 1, la couleur centrale, or, a évidemment une signification symbolique.
De ces observations élémentaires, on peut tirer deux types de règles d'ordre général, mais non moins élémentaires, relatives à la création de décors selon des procédures d'enrichissement. La considération de contraintes supplémentaires permettra de restreindre l'ensemble des décors que l'on peut concevoir.

8.2 Une première procédure et définition:

Soit, à l'étape i de sa réalisation, le pavage P_i possédant le motif noté M_i (le transformé à la i-ème étape du motif initial M).
La première procédure consiste à imposer que $A_{j;k,i+1}$ *soit contenu* dans le motif M_i.
On dira que le pavage P_{i+1}, obtenu à partir du pavage P_i par ajout du motif

$A_{j;k,i+1}$ à l'intérieur du motif M_i, est *l'enrichi* du pavage P_i par le couple (A_k, $h_{j;k,i}$), ou plus simplement par $A_{j;k,i+1}$.

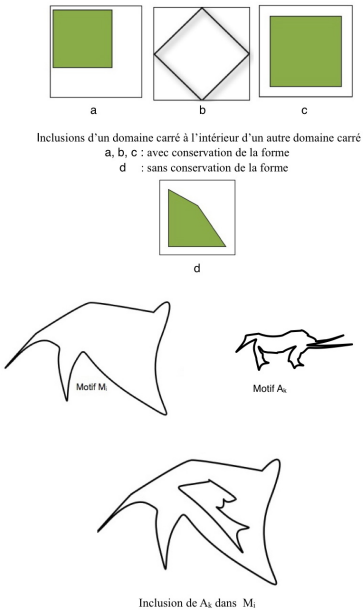


Fig.49: Exemples élémentaires

On peut voir dans la dernière de ces images soit la maman M avant la naissance de son bébé A, soit le joyeux A en train de nager dans le lac M.

On peut donc par ce procédé d'inclusion (on pourrait aussi dire d'ingestion) construire une infinité de décors plus ou moins esthétiques (infinités des motifs, infinité des modes d'inclusion, infinité des entiers, des jeux de couleurs). On ne pourra donc que décrire quelques familles de cas relativement simples, susceptibles de répondre à la plupart des goûts en matière esthétique.

De ce point de vue, il y a consensus pour imposer à l'application d'inclusion des propriétés de compatibilité entre les éléments de symétrie des motifs M et A : M et A *ont au moins un élément de symétrie en commun.*

8.3 Exemples simples d'emploi de cette procédure

Cas 1: quel que soit l'indice k, A_k = A: faire apparaître cet indice k devient inutile.

1.1 Nous allons supposer:
- que les bords de M et de A sont des polygones réguliers (lorsque le nombre de côtés d'un polygone est infini, le polygone est un cercle).
- que l'application d'inclusion $h_{j,i}$, transformant le pavage P_i en un pavage P_{i+1}, est une similitude, c'est-à-dire une homothétie de rapport $r_{j,i}$, accompagnée d'une rotation d'angle $a_{j,i}$, où i et j appartiennent aux ensemble I et J définis plus haut.

Seules donc comptent les suites $r_{j,\cdot}$ et d'angle $a_{j,\cdot}$. On peut alors, selon les circonstances, imposer que la suite des r_j, ainsi que celle des rapports $\frac{rj+1,\cdot}{rj,\cdot}$, obéissent à des "règles musicales".

1.2 Exemples simples où quel que soit j, $h_{j,i}$ (C) = C (la trajectoire des centres est un point).

C'est le cas des frises dans lesquelles un n-polygone régulier de base apparaît un nombre entier e de fois, après rotation d'un angle π/e. Ici n = 3 (Figure 41) ou 4 dans une des photos de l'ensemble B et dans la Figure suivante 50.



Fig.50

La répétition à l'infini de l'insertion d'un motif donné dans le précédent permet trivialement d'obtenir des décors de type fractal comme celui-ci:

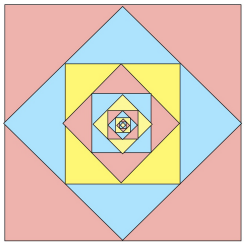


Fig.51: Carré "fractal"

ou bien de créer des illusions, comme les deux classiques suivantes, extraites des illustrations présentes sur wikipédia - voir également [[3](pages 216-217).

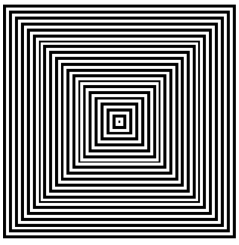


Fig.52: Illusion "carrés"

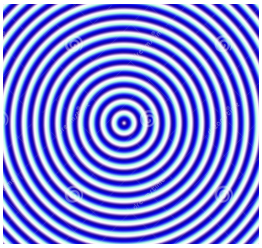


Fig.53: Illusion "cercles"

Remarque: Une des caractéristiques du phénomène fractal est la présence répétée à l'infini d'un motif qui, à chaque étape, diminue de taille: on est en présence d'un phénomène caractérisé par la présence d'un processus *stable*, la répétition d'une structure, d'un motif, également stable. La réunion de ces motifs de tailles diffférentes constitue un décor global dont par exemple on veut évaluer l'importance par la taille, par l'aire qu'il occupe s'il s'agit d'un décor plan. Si, par exemple, je note par f(C) l'aire du décor qui apparaît Figure 28, par T l'aire du plus grand triangle rectangle rose, f(C) = 4 T $(1 + r + r^2 + ... + r^n + ...)$ où r est le coefficient ici constant de réduction de taille entre un motif et son successeur. Dans une situation plus générale, il n'y a pas de raison particulière pour que ce coefficient soit constant: on pourra l'écrire sous la forme a_i $r^n/n!$. Tout ceci pour dire que tout développement taylorien, tout développement en série d'une fonction est une manière de décrire un phénomène de type fractal analogue à celui que l'on vient de rencontrer.

1.3 Exemples où la trajectoire des motifs A se déploie en une trajectoire discrète circulaire, puis spirale. Si les rotations forment évidemment un groupe cyclique, elles n'ont pas a priori toutes la même valeur.

On trouvera de tels exemples parmi les illustrations optiques présentes sur wikipedia, point de trajectoire spirale dans les frises siciliennes.

Cas 2 : Deux motifs A_k, ou davantage, sont insérés dans pavé M.
Revenons à la Figure 31: elle montre simplement des losanges centrés au centre d'un carré.
Cas 3 : Plusieurs motifs, A_1, A_2, etc sont insérés. C'est le cas le plus fréquent, donnant naissance aux motifs les plus attirants.

3.1 Oublions d'abord, dans l'exemple suivant (Figure 54), la présence des triangles. Nous observons celle de trois disques (motif A_1) emboîtés de même centre (un disque étant une couronne dont le petit cercle qui la borde est de rayon nul) : un grand disque blanc, un disque noir (celui porteur de triangles), un disque porphyre. L'insertion du disque noir dans le disque blanc entraîne, du point de vue visuel, l'apparition de la couronne blanche. L'insertion du disque porphyre dans le disque noir entraîne l'apparition de la couronne noire, dans laquelle ont été insérés 25 triangles blancs (motifs A_2), de base approximative $2\pi r/25 = 0.2513$ r (cf l'Appendice 1).



Fig.54

3.2 Examinons la Figure 55 : un disque au sein duquel se trouvent des couronnes (motif A_1) de losanges et de triangles (motif A_2) de plus en plus fins, évoquant une situation fractale. Le rapport de largeur entre deux couronnes partageant un même cercle de bord (peu fiable car évalué d'après l'image qui apparaît sur l'écran d'ordinateur!) semble varier entre 0,5 et 0,6. Ce disque comporte 6 couronnes décorées de triangles. Chaque couronne possède selon l'apparence un multiple de 46 triangles (cf l'Appendice 2) La question se pose de connaître les méthodes de division du cercle et de calcul des côtés des triangles les plus grands, mises en œuvre par l'artiste qui a conçu ce décor : ?



Fig.55

3.3 On notera que l'insertion d'un motif A_k au sein d'un motif M_i induit la création du complémentaire B_k de A_k dans M_i, et par conséquent, éventuellement, de nouveaux motifs. Par exemple dans la première des couronne, la dentelle verte (Fig. 54) réalisée à l'aide de losanges est le complémentaire de la frise circulaire de triangles posés en quinconque.

8.4 Une seconde procédure d'enrichissement

Elle consiste à remplacer les arêtes des polygones linéaires homogènes par des courbes, de sorte que chaque arête *k'* soit définie par une application spécifique $h_{k'} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$.

Un exemple d'application de cette procédure est donné dans la section 7.5. Elle a été abondamment utilisée pour la création de rosaces, où, souvent, deux arêtes contiguës d'un losange allongé sont remplacées par des quarts de cercle contigus formant un demi-cercle. Un exemple typique est cette rosace elliptique (autour de 1725) réalisée à partir d'un 16-gone:



Fig.56: Rosace elliptique de l'église Saint-Clément à Metz

On appréciera peut-être la facture moderne de celle-ci, dont la configuration est analogue à celle du motif présenté Figure 29:

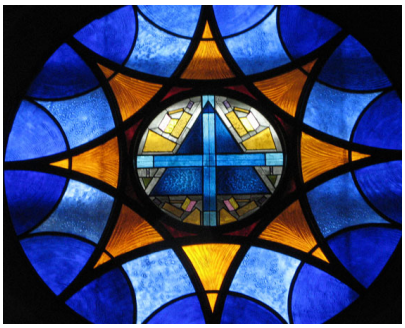


Fig.57: Rosace de l'église Notre-Dame de Saint-Flour

8.5 Une troisième procédure d'enrichissement

Elle consiste à épaissir, de manière unifrome ou non, le bord des polygones, déformés ou non. Dans les cas les plus élémentaires, l'arête k' d'un polygone est remplacée par une arête rectangulaire k'x I, réalisée en marbre blanc dans les frises siciliennes.

Mais naturellement, l'épaississement peut être plus raffiné par modification locale de la longueur de la fibre en chaque point des arêtes.

On peut de plus insérer dans ces arêtes épaissies des frises constituées de motifs appropriés. Les bords épaissis des tapis, par exemple, ou bien les bords épaissis des pavages au sol des Figures B sont entourés de telles frises.

Il est enfin possible de donner l'illusion de frises en 3D par le jeu d'un constraste de couleurs à l'intérieur de l'épaississement comme le montrent ces deux exemples:



Fig.58: Extrait du psautier d'Egbert, vers 980

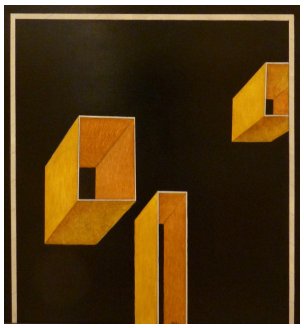


Fig.59: Extrait d'une oeuvre présente au Centro das Artes, Madère

9 Assemblage des motifs

9.1 Définitions

Une grande partie du charme exercé par les frises siciliennes vient du fait qu'elles ne sont nullement des pavages uniformes et ennuyeux, mais d'habiles assemblages de motifs différents.

Dans ce qui suit, le terme bord d'un motif ne prend pas en considération le fait qu'il soit épaissi ou non. En d'autres termes, s'il est épaissi, on ne ne considère que la base de l'épaissemement.

Etant donnés alors deux motifs M et M', on dira qu'ils forment un *consortium* si leur intersection non vide est contenue dans la réunion de leur bord respectif :

$$\emptyset \neq M \cap M' \subseteq \delta M \cup \delta M'$$

ou encore cette intersection commune non vide est aussi celle de leur bord respectif:

$$\emptyset \neq M \cap M' = \delta M \cap \delta M'$$

Si (MM') désigne ce consortium, il aura pour bord $\delta(MM') = \delta M \cup \delta M' - \delta M \cap \delta M' + \delta(\delta M \cap \delta M')$. (Cette expression s'étend plus généralement au cas où M = $(M^1 M^2 \dots M^n)$ désigne un consortium réalisé à l'aide de n motifs).

On dira que ce consortium est un *assemblage* (totalement) *singulier* si les seuls éléments communs aux bords de M et de M' sont des sommets (points singuliers).

Ce consortium est un *assemblage*(*parfait*)(ou idyllique !), si les parties communes aux deux bords, consituées d'arêtes, sont en bijection métrique (elle conserve notamment les courbures locales). Il est *imparfait* si l'une des arêtes de l'un des bords appartenant à l'intersection des deux bords, est l'union de plusieurs arêtes de l'autre bord.

Il est *partiel* si l'une des arêtes de l'un des bords appartenant à l'intersection des deux bords n'est pas intégralement contenue dans cette intersection.

Exemples: Les pavages classiques sont des assemblages parfaits, alors que les pavages composites comme les frises siciliennes sont des assemblages imparfaits.

9.2 Modification des assemblages

9.2.1 Modification élémentaire des pavages classiques

Elle consiste à modifier de façon continue ou discrète la métrique locale de l'espace couvert par le pavage.

Elle peut par exemple osciller dans la direction horizontale (cf trivialement, le second élément de la Figure suivante 53), verticale ou dans les deux directions, tendre uniformément vers zéro à l'infini.

Les pavages hyperboliques, les réalisations fractales sont de cette nature.

9.2.2 Création d'assemblages imparfaits

La Figure A donne trois exemples de frises associées à des pavages imparfaits.

Le créateur de la frise de droite, la plus simple des trois, a peut-être suivi un chemin de pensée décrit par le schéma suivant (n'est dessinée qu'une section de "ligne" d'un pavage plan par des carrés):

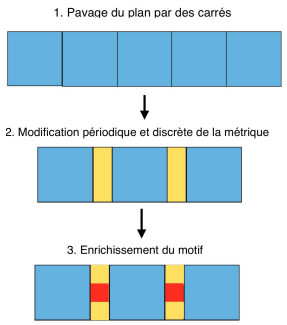


Fig.60

La construction du contenu des Figures 61 et 62 (deux variantes d'un même modèle) a peut-être suivie le cheminement principal suivant: première étape, fabrication de l'assemblage décrit dans le schéma de la Figure précédente, seconde étape: insertion d'un petit carré à l'intérieur des grands carrés et fabrication d'un 16-gone, entrant au milieu des côtés des petits carrés, sortant aux sommets de ces petits carrés.



Fig.61



Fig.62

9.2.3 Création d'assemblages singuliers, combinaison de divers assemblages (assemblages composites)

La frise de gauche de la Figure A est exemple de réalisation d'un assemblage singulier. Nous sommes en présence d'une suite d'hexagones disposés verticalement qui ont un sommet en commun.

Dans la Figure 63, sont présents deux dodécagones en forme de croix inclinée à 45 °, les deux sommets inférieurs du premier sont également les deux sommets supérieurs du second: leur assemblage est singulier. Dans chacun d'eux sont insérés deux octogones, le plus petit inclus dans le plus grand moins visible, et donnant naissance à un 16-gone.



Fig.63

L'image suivante (Figure 64) nous montre une première suite de grands 16-gones disposés verticalement et ayant un sommet commun, puis une suite de "petits" 16-gones insérés dans les précédents, alternant avec des carrés intermédiaires: chacun d'eux a deux sommets opposés, également sommets de deux "petits" 16-gones adjacents.



Fig.64

La Figure 65 montre un assemblage à la fois singulier et partiel réalisé à l'aide de quatre losanges formant un module.



Fig.65

Figure 66 : ces modules alternent avec des 12-gones engendrés par des hexagones prophyre dont chaque côté est assemblé à un rectangle décomposé en triangles.



Fig.66

Comme dans l'exemple précédent, l'octogone or est le motif de base de la Figure 67. Il engendre un 16-gone intérieur porphyre, et un 16-gone vert. Deux 16-gones verts consécutifs forment avec un losange intermédiaire un assemblage partiel. Par ailleurs, ces mêmes 16-gones verts permettent, par la transformation en sommet sortant d'un sommet entrant sur deux, la création de 16-gones contenant les précédents et formant un assemblage singulier, possédant en effet un sommet en commun.

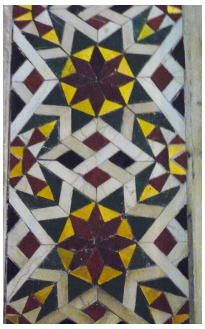


Fig.67

On suit facilement sur les Figure 68 et 69 qui suivent le cheminement qui a conduit à la création de ces frises:



Fig.68

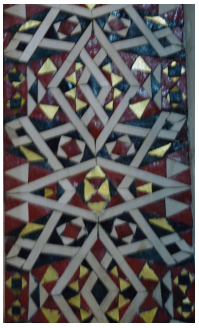


Fig.69

Le motif principal de la Figure 68 est le carré. On voit un assemblage parfait de carrés successifs, eux-mêmes remplis de carrés plus petits. Les carrés fondamentaux sont d'abord étendus en 16-gones, puis en 24-gones: de la sorte ces 24-gones forment un assemblage singulier, un sommet inférieur d'un 24-gone étant également le sommet supérieur du 24-gone suivant. On conçoit l'intérêt des artistes de l'époque pour ces 16- et 24-gones dont la forme rappelle celle de la croix.

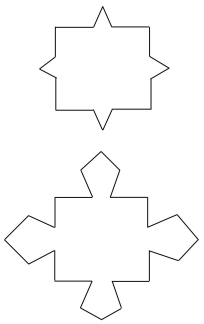


Fig.70

Le motif principal de la Figure plus riche 67 est l'hexagone. Un grand hexagone contient en son intérieur un hexagone plus petit. Les quatre espaces compris entre ces deux hexagones sont deux à deux symétriques et remplis selon au départ le même principe: on emploie des carrés emboîtés. Les couleurs principales (bleu et prophyre) des deux espaces verticaux sont à l'oppposé des couleurs des espaces supérieur et inférieur. Les grands hexagones ont en fait au départ de la procédure un sommet commun, masqué par la suite: ils forment primitivement un assemblage singulier. Ils sont ensuite transformés en décagones (cf la Figure 23) rentrant et sortant pour les hexagones intérieurs. C'est à partir de ces derniers que sont créés les losanges verticalement allongés, puis les losanges horizontalement allongés, tous ces losanges formant un assemblage singulier.

10 Enrubannage des motifs

Les créateurs des frises siciliennes ont progressivement procédé à un enrubannage de leurs motifs. Si la qualité esthétique de ces rubans est indéniable, s'ils gagnent petit à petit en sophistication, on ne saurait en aucune façon les comparer avec les entrelacs plus tardifs de l'Alhambra ou du palais ottoman Tokapi.

Les premiers rubans sont simplement les bords épaissis de carrés, rubans de couleur dans un premier temps, blancs ensuite (cf les Figures 24 à 27).

Dans un second temps, les motifs plus avancés, losanges, hexagones, octogones, etc. sont à leur tour enrubannés(cf par exemple les Figures 31 à 33, 38 à 42, 61 et suivantes).

Dans un troisième temps, sont créés des entrelacs entre rubans. Comme toutes les frises et motifs importants possèdent la symétrie d'ordre 2, les entrelacs formés à partir de deux rubans vont pouvoir alterner leurs croisements: un croisement par dessus (par dessous) sera suivi d'un croisement par dessous (par dessus).

Enfin, dans un dernier temps, sur les frises les plus élaborées, deux brins symétriques de rubans (si on imagine que ces brins se rejoignent à l'infini), courent le long de chacun des côtés verticaux de ces frises (cf voir par exemple les Figures 61 à 63), s'appuyant parfois et en partie sur les bords des motifs (Figures 68 et 69).

11 Conclusion et Perspectives

Quels principes et méthodes ont pu suivre les créateurs des abondantes frises murales qui, pour la plupart d'entre elles, encadrent les portes monumentales des magnifiques édifices religieux de Palerme et de Monreale ? Les identifier, tel était l'objet premier de cet article. Dans un second temps, il convenait d'essayer de formaliser quelques-uns des fondements mathématiques de ces procédés, afin de mettre à la disposition des artistes d'aujourd'hui des outils conceptuels et techniques de création plus performants que ceux d'autrefois, d'élargir peut-être leur champ de visison.

Les retombées mathématiques de cette première étude sont assurément très modestes, assez élémentaires. Etendre toutefois les procédés dégagés dans cette étude sur la dimension 2 à des constructions dans les espaces de dimension plus élevée pourrait présenter quelque intérêt. Par exemple, ne serait-ce que relever dans l'espace ordinaire ces projections planes qui s'affichent sur les frises, pourrait permettre la création de frises sculptées qui orneraient le fronton de nouveaux édifices prestigieux.

Les problèmes généraux (ne serait-ce qu'en dimension 2) de construction des *(n-m)*polygones par ajout non seulement d'un sommet à chaque étape, mais simultanément de plusieurs sommets n'ont pas été abordés. Existe-t-il des formules "simples" de dénombrement des différentes configurations ? Procéder à l'ajout simultané de deux sommets par exemple serait-il dans certains cas plus efficace que d'obtenir le même résultat par ajouts successifs d'un seul sommet?

La réalisation de telles extensions suppose la maîtrise des données métriques. Leur absence ici est à combler: des relevés *in situ* mériteraient d'être entrepris. Ils permettraient de répondre à la question naturelle, pourquoi telle largeur de frise, pourquoi telles dimensions des motifs ? On connaît le rôle joué la notion

de proportion dans l'esprit (et les créations) des penseurs et artistes du passé. Les proportions musicales par exemple sont-elles discrètement présentes au sein de ces frises siciliennes ?

La question des matériaux employés pour la fabrication de ces frises - ils contribuent à leur luminosité, à leur éclat - n'a pas été soulevée, le choix et la disposition des couleurs simplement évoqués. Les jeux de lumière ainsi créés donnent à chacune de ces frises une vitalité, une personnalité proprement rayonnante. Il reste un énorme et difficile travail à accomplir pour modéliser convenablement ce rayonnement lumineux, et ses effets sur notre perception et sur notre comportement affectif.

Une remarque finale sur l'enrubannage des motifs, très présent dans les frises siciliennes. A quoi correspond-il, a-t-il une signification physique ? Sans doute constitue-t-il, en premier lieu peut-être, une manière de peau résistante, d'écorce qui, protègeant le motif, lui permet d'affirmer sa visibilité.

Considérant le bord épaissi de la sphère prise comme motif, une autre analogie vient à l'esprit en plongeant cette sphère mathématique dans la réalité matérielle: le bord de la sphère terrestre est la croûte terrestre, le sol sur lequel a pu se développer la vie, grâce en grande partie au champ énergétique lumineux qui l'entourait. De manière générale, au-delà de la simple considération des frises sciciliennes, l'entourage des motifs, plus généralement celui des tableaux à travers leurs cadres, met certes ceux-ci en valeur, mais représenterait aussi une sorte de potentiel de développement, au moins du point de vue physique. L'exprime à sa façon l'apparition fréquente de nouveaux motifs à l'intérieur de ces entourages, petits motifs cristallins polygonaux évoquant la réalité physique première, souvent aussi d'élégantes tiges florales bleutées ou aux reflets dorés, spiralant avec assurance et légèreté, rappelant le stade plus avancé du développement végétal. Les dimensions de ces entourages, leur aire, leur courbure locale, seraient alors des indicateurs de ce potentiel.

L'enlacement de plusieurs motifs par un ruban solidifie l'ensemble. On peut lui attribuer une valeur symbolique. Retirons les motifs: reste le ruban qui est une manière d'illusion et une représentation structurelle de l'ensemble. La démarche suggère le problème inverse à celui posé par la recherche d'une bonne construction d'un ruban pour un ensemble de motifs donné: quels ensembles de motifs peuvent-ils admettre ledit ruban comme enrubannage acceptable ?

Une dernière comparaison : une manière de créer l'absence de motifs, une illusion au moins de cette absence, consiste à recouvrir ces motifs de noir. Le ruban blanc qui entoure ce "trou noir" aurait-il quelque parenté avec celui de l'horizon étiré qui borde un véritable trou noir ?

Appendice

1. Dans les autres motifs du même genre où figurent des remplissages de couronnes par des triangles, si ce n'est pas 25, c'est un nombre voisin, souvent 23 qui apparaît.
Pouvons-nous justifier la présence de ces nombres ? Je ferai deux hypothèses, la première étant sans aucun doute la plus vraisemblable - ai-je écrit dans un premier temps, texte que je conserve, mais auquel j'ajoute la remarque c) :
a) Le nombre 12 était bien sûr un nombre quasi magique (provenant des observations astronomiques : les 12 mois de l'année et le zodiaque, l'emploi du

nombre 12 dans les écrits de Platon (les Lois) et dans la Bible), présent par tous ces décagones qui ornent les mosaïques. Il est difficile de paver une couronne de faible épaisseur à l'aide seulement de 12 triangles. C'est beaucoup plus réalisable avec 2 fois 12 triangles. C'est sans doute ce choix qui a été fait, aux erreurs de fabrication près.
b) Cette seconde hypothèse est évidemment moins fondée, elle est basée sur le fait que 2π = 2 x 3,14 = 6,28 est voisin de 6,25. On peut imaginer que les artistes utilisaient cette valeur pour calculer le périmètre du cercle. Or, en cette époque, on croyait possible de réaliser la quadrature du cercle, et l'on savait bien sûr que 625 est le carré de 25, d'où l'idée d'établir un lien (obscur) entre le carré et le cercle par l'intermédiaire de ce nombre 25, nombre d'autant plus intriguant qu'il est lui-même le carré de 5.
c) En fait, la seconde hypothèse pourrait être plus proche de la vérité, si, comme je viens de le (re)lire dans le commentaire consacré par Jeanne Pfeiffer au traité de ≪Géométrie≫ de Dürer [9], on tient compte du fait que les Babyloniens, comme encore plusieurs auteurs du XIe siècle, utilisaient 25/8 comme valeur de π, 25/4 comme valeur de 2π, soit 6,25. La seconde phrase de b), une part de l'hypothèse émise, est exacte. On notera également la présence "magique" du nombre 2, à travers par exemple le fait que $4 = 2^2$, $25 = 5^2$.

2. On retrouve ici un multiple de 23. Dans son introduction à l'édition française de **La Divine Proportion** (réalisée en 1998 par les Compagnons du Devoir [8]), M.T. Sarrade avait relevé que, dans le Livre des Rois, "L'une des colonnes avait 18 coudées de hauteur et un fil de douze coudées en mesurait le tour" et était surmontée d'un chapiteau "de cinq coudées de hauteur" (I. Rois VII, 15 dans l'édition de la Pléiade), ce qui nous donne une hauteur totale de 23 coudées. Sarrade notait que le périmètre d'un carré dont le côté est 18 coudées était voisin du périmètre d'un cercle de 23 coudées de diamètre, avec 3,13 pour valeur approchée de π. C'est cette même technique d'approximation que nous avons rencontrée chez Dürer qui comparait également le périmètre d'un carré (4 x 2 = 8) à celui (3,125 x 8 = 25) d'un cercle de diamètre égal. C'est dans le même Livre des Rois que l'on trouve l'approximation de π égale à 3: "Puis il [Hiram, originaire de Tyr,] fit la Mer en fonte, qui avait dix coudées de bord à bord; parfaitement circulaire ... un cordeau de trente coudées en faisait le tour." Il n'est pas interdit d'imaginer que le choix de la hauteur des colonnes d'airain qui ont également pour fonction de soutenir le toit du sanctuaire n'est pas anodin: il pourrait avoir été volontairement être lié au nombre 3. Rappelons que l"artisan en airain [Hiram, ...] était rempli de sagesse, d'intelligence, de science, pour faire toute œuvre en airain. Il vint donc chez le roi Salomon et fit ses ouvrages".

Je voudrais faire ici une dernière remarque à propos de 46: c'est aussi le nombre de colonnes du Parthénon ! Autrement dit, le problème caché qu'entend soulever et résoudre le dieu, ici Athéna, déesse de la sagesse, de la pensée, patronne des artisans et des techniques, est celui de trouver le carré ou le rectangle dont le périmètre est égal à celui du cercle. Quels savoirs se transmettaient, dans le secret de leurs temples, les artistes-mathématiciens de l'époque ?

References

[1] Bruter C.P. An introduction to the Creation of some Mathematical Objects, in Mathematics and Modern Art (C.P. Bruter Ed.) Springer-Verlag,

Berlin 2012.

[2] Bruter C.P. Mathematics for the working Artist, in Mathematics and Art III (C.P. Bruter Ed.) Cassini, Paris 2015.

[3] Bruter C.P. Topologie et Perception, tome 2, Aspects neurophysiologiques, Maloine, Paris 1976.

[4] Cilento A. Byzantic Mosaics in Norman Sicily, Magnus, Udine, 2009.

[5] Cromwell Celtic Knotwork: Mathematical Art, The Mathematical Intelligencer, 15, 1 (1993), 36-47.

[6] Grünbaum B. and G. Sheppard Tilings and Patterns, Freeman, New York, 1989.

[7] Kitzinger E. I Mosaici di Monreale, Flaccovio, Palermo, 1991.

[8] Divine Proportion, Librairie des Compagnons du Devoir, Paris, 1998.

[9] Dürer A. Géométrie (Présentation, traduction J.Pfeiffer), Seuil, Paris, 1995.

[10] Santoro R. La Cathédrale de Palerme et le Palais Royal, Magnus, Udine, 2009.

[11] Schiro G. La Cathédrale de Monreale, Mistretta, Palermo, 2011.