Les formes du continu

Claude Paul Bruter

Hommage à Jean Largeault

Après un premier échange de lettres, nous fîmes connaissance par une belle journée du printemps 1978. La réserve de l'épistémologue n'était qu'une expression de la sensibilité de l'homme. Anne Fagot-Largeault et Jean Largeault me firent l'honneur d'être l'un des témoins de leur mariage. Le grand équilibre de Anne a sans doute beaucoup aidé Jean à poursuivre et à étendre une œuvre en philosophie des sciences, aussi riche qu'exemplaire. L'*establishment* scientifique commençait, je crois, à en apprécier la valeur. Est-ce par caprice que Le Destin choisit ce moment pour retirer Jean de ce bas-monde, dans la souffrance de surcroît ? Que pouvons-nous comprendre ?

Jean Largeault s'intéressait surtout aux fondements des sciences, à l'épistémologie. On ne pouvait qu'être frappé par son style, et par son intelligence aiguë des textes. D'un caractère fort, il avait choisi de s'effacer derrière les auteurs qu'il présentait. Il nous en révélait la pensée exacte, en quelques phrases vives, limpides, courtes, qui avaient, parfois, l'éclat étincelant du poignard. On comprend qu'il ait éprouvé une forte attirance pour Brouwer et pour Weyl, tournés vers ce qu'il y a de plus profond chez l'homme, l'intuition, sa chaleur, sa vérité, son mystère.

C'est à l'hôpital Henri Mondor que Largeault me remit un exemplaire de son dernier ouvrage, consacré à certains travaux d'Hermann Weyl. Jean avait rencontré un grand mathématicien : il en admirait la profondeur et la noblesse d'esprit. L'introduction à cet ouvrage est un chef-d'oeuvre : respect, connivence, délicatesse, pénétration, art de la plume.

A travers cet ultime ouvrage, Largeault a peut-être transmis une sorte de flambeau, porteur d'une flamme à protéger, symbole d'une tradition à maintenir, emblème d'une lignée qui avait sa préférence, et dont il avait noté trois noms illustres : Platon, Spinoza, Husserl.

Chacun de ces trois philosophes a, inévitablement, traité du continu. Brouwer, Weyl ont beaucoup réfléchi et travaillé à la représentation mathématique de ce continu, thème de ce dernier ouvrage de Jean Largeault. En choisissant d'aborder la question du continu de manière si publique, je suis parfaitement conscient d'une déraisonnable immodestie. Mais ce choix m'a paru naturel, comme étant la conséquence d'un devoir, celui d'entretenir la vitalité d'une problématique sur laquelle s'est penché un ami, de le soutenir dans son acte final de transmission d'une flamme chaleureuse et rayonnante de bienfaits.

Chacun sait qu'il existe deux formes distinctes du continu : la première est celle du continu substantiel ou physique; la seconde est celle du continu abstrait ou continu mathématique. Il faut rappeler, une fois pour toutes, qu'aucun de ces continus ne peut être entièrement assimilé à l'autre. Comme l'affirmait H.Weyl ([14] p.113), "Certainement le continu intuitif et le continu mathématique ne coïncident pas, un profond abîme les sépare."

L'examen des propriétés des continus physiques fait l'objet d'une première partie. Il permet de suggérer une classification, encore très rudimentaire, de ces continus, et facilite une prise de position sur la validité du réductionnisme parfait dans le monde sensible. Brièvement, on examine ensuite, plus tardivement élaboré, au caractère artificiel, le continu temporel et son inclusion moderne au sein des continus naturels.

La seconde partie traite des continus mathématiques classiques; je ne parlerai pas en effet du continu de Brouwer dont les constructions ne sont pas sans rappeler par moment celles, postérieures, de l'analyse non-standard. Le continu atomistique numérique est opposé au continu topologique moderne, de caractère plus holistique. L'impression prévaut que l'axiomatique actuelle des mathématiques, quoique tout à fait satisfaisante pour les besoins de la profession, n'est pas l'axiomatique définitive.

A. Les continus physiques

Celui qui en est capable discerne nettement une forme unique
déployée partout à travers beaucoup de formes
dont chacune existe isolément,
puis une multitude de formes différentes les unes des autres
et enveloppées extérieurement par une forme unique,
puis encore une forme unique, déployée à travers de nombreux
touts et liée à une unité;
enfin beaucoup de formes entièrement isolées et séparées

Platon, *Sophiste*, 253,d

1. Le continu naturel du premier ordre

Le continu naturel est mal défini. Celui que j'envisage d'abord et que je nomme le *continu naturel du premier ordre*, était autrefois appelé l'éther, ou maintenant, plus souvent, mais aussi plus maladroitement, le "vide". En voici une conception moderne, donnée par F.Lurçat [13]: "le vide est caractérisé par l'absence de photons et d'électrons *réels*, mais en un certain sens il contient des photons et des électrons *virtuels*, ou plus exactement : des photons virtuels et des paires virtuelles électrons-positrons, couplés mutuellement par l'interaction électromagnétique." Comme l'indique F.Lurçat, ce statut du vide est en fait "incertain".

Une continuité d'intuition relie la conception moderne à celle des Anciens. Le continu est toujours conçu sous la forme d'un "homéomère" primordial - Anaxagore semble être l'inventeur du terme homéomère. Anaximandre le présente sous la forme d'un "principe" : "Or il dit que le principe n'est ni l'eau, ni aucun autre de ce qu'on appelle les éléments, mais une certaine nature infinie différente, d'où naissent tous les ciels et les mondes qu'ils contiennent." (Théophraste, *Opinions des physiciens*). Par sa richesse de contenu, la conception de la χωρα platonicienne est peut-être celle qui serait la plus proche d'une conception moderne.

La notion de continu naturel, nommé aussi parfois "substance", "substrat", ressort de nos sens et de l'intuition, parfois trompeuse. Ce continu n'est peut-être alors qu'un mirage, lié à nos capacités sensorielles, à celles de notre pensée. Aussi les propriétés que nous pouvons attribuer à ce continu de premier ordre sont-elles conjecturales. Par suite, qu'il possède les propriétés d'être simplement connexe, sans trou, et même d'être *insécable*, à la manière d'un fluide qui n'est nullement percé lorsqu'on y plonge le doigt, ne sont que des hypothèses parmi d'autres. Mais chacun de nous se sent irrésistiblement amené à les poser.

Ce continu est ainsi doté de propriétés physiques internes, que nous connaissons fort mal, et qui sont totalement absentes du continu mathématique. Ce continu étrange est le siège de mouvements et de modifications constantes. Par l'accord d'un récepteur sur une fréquence particulière, on constate qu'un point quelconque de ce continu naturel semble "vibrer" d'une infinité de manières. Bien que nous soyons apparemment totalement insensibles à leur présence, on sait que ce continu est constamment parcouru en tous sens par des "particules" très bizarres. Il sert de support à divers champs physiques, qui semblent parfois ne pas interréagir : on n'a encore décelé aucune influence du champ électromagnétique sur le champ de gravitation. L'inventaire et la définition même des propriétés physiques de ce continu naturel restent à faire. Certains disent par exemple de lui qu'il est "homogène": les propriétés de simple connexité et d'insécabilité évoquent, en partie sans doute, cette homogénéité. On le devine insensible aux déformations habituelles. Peut-on imaginer qu'il se rebelle à l'imposition d'une action intérieure entreprise sur lui ? Il y a du magique dans ce continu : Spinoza ne voyait-il pas en lui l'expression pure du divin ? Nous est-il alors accessible ?

A la manière du feu héraclitéen, le continu naturel apparaît aussi comme un milieu qui puise sans cesse en lui-même une force de renouvellement. Sous une forme déjà dégradée, il apparaît comme un milieu vivant, éternellement vivant, comme une sorte de plante immortelle qui régénère à chaque instant ses cellules; sous une forme encore davantage dégradée, il apparaît comme un ver que l'on coupe, et qui donne naissance à deux nouveaux êtres vivants : mais ici la dégradation est trop forte, la comparaison est trop lâche car le continu naturel est indissociable. Il n'admet pas de partie que je puisse isoler; une telle partie, je ne peux que l'envisager, la considérer de l'extérieur, et donc idéalement. La notion de partie ponctuelle de ce continu n'a aucun sens *physique*. Si nous pouvons proposer et accepter l'hypothèse qu'il subisse des transformations internes sans que nous puissions savoir lesquelles en totalité, il

nous est également impossible par ailleurs de concevoir sa destructibilité. Nous sommes alors obligés de souscrire à la parole de Platon et des physiciens qui l'ont précédé, Parménide et Mélissos, Anaxagore et Anaximène : "le monde est éternel."

1.2 Continus physiques du second ordre

Le passage du rayon lumineux, la flèche traversant l'espace, l'excavation réalisée sur la pierre par la pointe, la marque du crayon sur la feuille, introduisent des perturbations au sein du continu naturel, dont la trace forme à nos yeux un continu : je l'appellerai un *continu du second ordre*. Il est sans doute, par rapport au continu fondamental précédent, un continu d'illusion, un continu d'apparence. Mais face au continu naturel, d'une transparence totale, le continu du second ordre est un continu sensible. Contrairement au continu naturel, il nous paraît accessible, au moins superficiellement.

La trace de ce continu sur le papier est localement tridimensionnelle. Mais si on évalue le rapport de la valeur de la longueur totale à celle des autres dimensions, largeur, épaisseur, ce rapport est en général un infiniment petit fini. On conviendra de dire que ce continu est de dimension voisine de 1. De la même façon, la surface d'un objet quelconque, comme celle d'un sol désertique ou localement craquelé vu d'avion, apparaît comme un continu du second ordre de dimension voisine de 2.

S'ils conservent la propriété de connexité, les continus du second ordre, contrairement au continu fondamental, peuvent posséder des trous. Mais surtout ils sont sécables, et paraissent divisibles jusqu'à un ordre élevé mais fini. Les noms d'Anaxagore, de Leucippe, de Démocrite et d'Epicure viendront immédiatement à l'esprit de qui cherche à donner une paternité antique à ce continu du second ordre. Chez Démocrite, l'ordre de divisibilité est fini. Chez Anaxagore, il est au contraire infini ("dans ce qui est petit, il n'y a pas de dernier degré de petitesse, mais il y a toujours un plus petit"). Nous savons aujourd'hui qu'existent des stratifications dans la constitution des corps, des seuils dans la divisibilité au delà desquels les homéomères constitutifs changent de nature. Il y aurait alors une stratification induite dans la famille des continus du second ordre, une sorte de quantification caractérisée par le degré de divisibilité nécessaire pour atteindre un niveau d'homéomérie donné.

La manière dont on procède à la divisibilité n'a jamais fait l'objet d'une étude particulière et encore moins exhaustive. Anaxagore mentionne que "les séparations (...) s'opèrent par suite de la force et de la vitesse", ce qui laisse bien des possibilités d'opérer. Pour utiliser un langage moderne, Anaxagore met principalement en avant la séparation par centrifugation. Mais par la suite, on n'a simplement envisagé que la coupure, une taille à "la hache" selon l'expression d'Anaxagore. Cette séparation n'est pas le fait du corps lui-même qui se fragmente pour une raison intérieure, et qu'on pourrait appeler une fragmentation de type biologique. Elle est causée par un agent extérieur au corps, et possède, par sa brutalité, un caractère primaire. Le rôle des agents extérieurs dans les processus de dissociation est souvent essentiel. L'extérieur est d'ailleurs toujours présent, ne serait-ce que sous la forme des contraintes environnementales qui pèsent à la frontière des objets.

Récemment, d'autres procédures de séparation externes ont pu être mises en évidence. Les représentations mathématiques permettent parfois d'opérer des expériences de pensée qu'après coup on reporte dans la réalité physique. A partir de l'observation des courbes associées au comportement d'un oscillateur électrique, Shub et Smale ont fabriqué un objet mathématique appelé le "fer à cheval". L'analogue physique du processus de sa création est la transformation dite "du boulanger" : on plie la matière, l'aplatit, l'étire, la replie, l'étire à nouveau dans une autre direction, et, poursuivant sans fin ce processus de pâtissier expert dans l'art de fabriquer les millefeuilles, brisant le jeu des tensions internes, on aboutit à un ensemble totalement discontinu. J'utilise, pour ma part, un procédé légèrement différent pour créer du discontinu à partir d'un continu. Il s'inspire de l'observation physique. Prenons un élastique de composition uniforme que l'on tend; on le tord tout en maintenant sa longueur constante; on produit ainsi de fortes tensions internes également réparties à l'intérieur du fil; ces tensions finissent par déchirer le fil en particules de même nature dont le nombre est très élevé. Mathématiquement, cela revient à faire tendre la torsion d'un fil hélicoïdal vers l'infini, alors que la longueur du fil reste constante. Il y a contradiction entre cette finitude a priori de la longueur et l'augmentation sans fin de celle-ci engendrée par l'enroulement autour de l'axe de l'hélice. Le fil se dissocie en une infinité de points. Ce procédé rappelle quelque peu la méthode d'Anaxagore dans la mesure où celui-ci, pouvant faire

tourbillonner localement le tout à des vitesses infinies, introduit implicitement des torsions également infinies le long des trajectoires.

1.3 L'impossibilité du réductionnisme concret absolu

Chaque ordre de continu physique possède sa valeur de vérité intrinsèque. Leur distinction a l'avantage de permettre une certaine clarification des diverses positions métaphysiques et philosophiques adoptées par le passé - sur ce sujet, on pourra se reporter aux références [8], [9], [12]. Les conceptions strictement atomistes correspondent à des extrapolations vers l'infini d'observations faites sur des objets physiques ordinaires: ce sont des conjectures, des paris, des idéalisations. L'introduction d'une stratification sur la famille des continus physiques du second ordre suggère l'éventualité d'un passage contrôlé entre ceux-ci et le continu fondamental du premier ordre.

Dans l'analyse des propriétés des continus physiques, celle de sécabilité a joué un rôle important. Elle a conduit à définir le point de vue réductionniste. Puisque du tout on peut atteindre la partie, le réductionniste pur prétend pouvoir reconstruire le tout à partir des éléments.

C'est oublier que le passage du tout à la partie s'accompagne de la destruction des tensions internes, de tous les liants qui assurent la cohérence de l'édifice dont le réducteur ne retient que certaines parties homogènes. Le réductionniste concret pur affirmerait que le façonnage de pierres parfaitement ajustées suffit pour permettre la construction de pyramides magnifiques, démontables et remontables à volonté; il oublierait seulement de faire mention de la donnée, en premier lieu de la position respective des pierres dans la pyramide, et en second lieu de la pesanteur qui permet l'adhérence mutuelle des éléments du puzzle. On imagine également l'effort qui serait nécessaire pour reconstituer la pyramide à partir des blocs qui auraient été concassés et broyés jusqu'à devenir sable. Le rassemblement des parties entre elles ne permet la reconstitution d'un tout concret qu'à la condition de respecter des règles structurelles propres à la nature de ce concret, qu'à la condition de pouvoir faire ressurgir le jeu des forces d'interaction qui assurent la stabilité du tout.

Le réductionnisme absolu est donc une impossibilité dans le monde concret. On ne peut espérer qu'en la validité d'un réductionnisme pratique approximatif, relatif et prudent. Il ne peut avoir de valeur qu'à l'intérieur de certaines limites spatio-temporelles fixées par la nature de l'objet; il ne peut être qu'approximatif car la destruction s'accompagne toujours d'une sorte d'usure, de pertes, infinitésimales peut-être mais irrémédiables, qui préviennent la reconstitution parfaite. Celle-ci ne parvient à reconstituer au mieux la forme de l'objet initial qu'à une déformation près. Les réalisations artificielles des hommes, les puzzles, les constructions mécaniques, électriques et électroniques semblent offrir des exemples parmi les meilleurs de réalisations où l'assemblage des parties permet l'obtention d'un tout fonctionnel. Mais ces exemples sont très illusoires car il ne s'agit nullement de parties quelconques, tout au contraire chaque partie possède une morphologie, une composition et une structure particulières qui fixent sa place originale au sein de l'objet. La reconstitution d'un tout à partir de parties quelconques suppose une homogénéité parfaite du milieu, une parenté profonde entre chaque partie et le tout. On peut, par la pensée, à l'intérieur de certaines limites de température et de pression, reformer un volume d'eau donné à partir de gouttes microscopiques. On n'y parviendra jamais en mettant simplement en présence, dans les conditions physiques précédentes, les quantités d'oxygène et d'hydrogène correspondant. Nous voici ramenés au jugement de Socrate (*Théétète* 204-e) : "Le tout n'est donc pas constitué de parties; autrement, il serait une somme, étant toutes les parties."

Peut-être l'infini est-il en acte au sein du continu physique du premier ordre, mais celui-ci ne nous est pas accessible. Mais en général, dans la nature, l'infini n'est qu'en puissance; le monde apparent est un monde fini, même si les nombres nous paraissent immenses. Cette limitation interdit, elle aussi, la possibilité du réductionnisme absolu concret.

1.4 Les continus temporel et spatio-temporel

La perception du temps est seconde devant celle de l'espace. L'être premier, homogène, est conçu comme impérissable vis-à-vis du temps : ses malheurs ne proviennent que des chocs avec des objets situés dans son environnement. Survivre implique alors, en premier lieu, l'élaboration d'outils pour reconnaître l'espace et son

contenu. L'élaboration de la notion temporelle viendra après celle de la notion spatiale. Mais le retard pris par la première sur la seconde est infime.

L'évolution des idées en métaphysique et en physique a suivi un cours parallèle. Par l'emploi de la procédure analytique, qui tranche mais qui aussi mutile, les philosophes ont commencé par séparer les notions de matière, de lieu, et de mouvement. Dans l'élaboration du paradoxe de la flèche, la prise en considération du temps est encore absente, et Zénon ne peut trouver d'issue. La réflexion sur la nature du temps apparaît dans l'oeuvre de Platon, mais avec une timidité exemplaire et révélatrice. Dans son *Parménide*, la notion de temps n'est encore qu'évoquée par l'intermédiaire d'une analogie d'évolution où l'on passe du jeune au vieux. Ce n'est que dans le *Timée* (37-38) qu'il relie le nombre au temps, "né avec le ciel, afin que, nés ensemble, ils soient aussi dissous ensemble". La lecture de l'*Epinomis* montre que le temps est pris en compte par l'intermédiaire de la cosmogonie; il s'agit avant tout du temps sidéral. Aristote a véritablement approfondi la notion de temps : "toute grandeur est continue : le temps et la grandeur se soumettent à des divisions égales et identiques " écrit-il dans sa *Physique* (VI, 2,232 b & IV, 2, 219 b). Ainsi, chez Aristote, le temps, défini comme "le nombre du mouvement selon l'antérieur et le postérieur"(*Phys.* IV, 219 b), s'interprète en termes modernes comme un continu unidimensionnel numérique. Aristote évoque également "l'unicité de l'instant ... (perçu comme) la limite de l'antérieur et du postérieur". Apparaît dans ce continu "le point ...(qui) marque le commencement et la fin". Le temps se démarque ici du continu naturel où la notion d'élément ponctuel ne semble pas avoir de sens, alors que cette même notion s'impose de manière spontanée au sein du continu temporel.

Le temps n'est pas saisi comme une donnée sensible au même titre que le continu naturel, car nos sens paraissent incapables de le doter de propriétés physiques internes, comme le sont les continus naturels. Le temps est plutôt conçu comme une donnée intellectuelle associée à une *affection* des objets de la nature. C'est peut-être la raison pour laquelle les présocratiques, dans leur compréhension globale et intuitive, n'ont pas fait du temps une catégorie en soi.

Le temps est l'idéalisation ponctuelle de la *durée*. Affection des continus naturels, les analyses d'Einstein ont re-introduit la durée comme propriété essentielle de ces continus. Mais même au sein de la conception unifiée de l'espace-temps, le temps conserve un caractère spécifique de neutralité; il n'a pas de propriété physique particulière. Pour l'instant, la durée moderne peut tout au plus subir des dilatations. Ces dilatations sont imposées seulement afin que soit respectée la cohérence des observations au sein d'un milieu dont les propriétés physiques relatives à l'espace peuvent varier, mais où la vitesse de la lumière reste constante.

J'ai déjà rapporté, dans un petit ouvrage sur les controverses entre mathématiciens [3], les introductions : premièrement par le savant médiéviste Nicolas Bonet, d'une pluralité possible de temps physiques qu'il distingue soigneusement du temps mathématique, selon lui unique; deuxièmement, en ce siècle, par le mathématicien Liénard, le biologiste Grandjean, ou moi-même de deux types de temps, l'un court, l'autre long. Si Platon avait déjà reconnu la pluralité de dimensions du lieu, la multiplicité des dimensions des *déploiements* de l'espace et du temps n'est encore qu'une conjecture: qu'elle incite à la rêverie et à la production par l'imagination de constructions inédites est sans doute, à l'heure actuelle, l'un des meilleurs arguments en sa faveur.

B. Les continus mathématiques

J'estime donc opportun d'adresser au mathématicien d'aujourd'hui l'exhortation suivante : lorsque vous pouvez résoudre un problème par une construction explicite, ne vous contentez pas d'arguments d'existence pure !

Hermann Weyl, *Le Continu et autres écrits*, 262

1. Les continus numériques classiques

Les mathématiques appartiennent au domaine de la représentation sous la forme de représentations figuratives et linguistiques, de figurations symboliques, d'objets de raison ou idéités.

Par nature, une représentation d'un objet en abolit un certain nombre de propriétés. Ces ablations réductrices permettent

d'effectuer sur les représentations des manipulations, interdites sur l'objet initial par la présence des propriétés considérées.

Parmi les objets mathématiques, le nombre entier est sans doute celui qui a été créé le premier. Modèle le plus élémentaire de représentation des objets, il est un simple indicateur de présence. Quand vous affirmez qu'il y a deux objets dans l'armoire, vous ne révélez absolument rien de la nature de ces objets, de leur couleur ou de leur date de fabrication. La puissance du modèle de l'arithmétique, révélateur existentiel, tient à sa pauvreté sémantique. Le temps n'a pas de contenu physique : le modèle de l'arithmétique suffit à son marquage, à sa représentation.

Dès Aristote, le continu temporel, même si la notion de continuité n'est pas encore définie, est identifié à la grandeur mathématique. Il faudra attendre le 19-ième siècle pour parvenir à l'élaboration d'une définition acceptable de la continuité, et de la grandeur, i.e. du nombre réel. C'est de manière intuitive qu'on a procédé à l'identification globale du temps, puis de la ligne, avec l'ensemble des nombres décimaux. Avec la création des suites de Cauchy, puis des intervalles emboîtés et des coupures de Dedekind, la pensée, allant du global vers le local, a suivi une démarche analytique de plus en plus affinée. A partir de Cantor, à l'heure de l'atomisme triomphant, c'est par une démarche inverse, du style réductionniste le plus pur, qu'on s'est efforcé de reconstituer les continus numériques, que ce soit le continu numérique classique ou celui de Brouwer : on est en effet toujours parti des nombres entiers pour essayer de construire ces continus, qu'on utilise ces nombres de manière explicite ou non, comme on le fait par exemple en leur substituant des parenthèses ou des symboles quelconques. On trouvera dans l'ouvrage de J.Dhombres [7] une première étude historique sur l'élaboration de la continuité numérique, et dans les trois derniers ouvrages de Jean Largeault ([10], [14], en particulier le chapitre VI de [11]), le détail de ces constructions, et des analyses de leurs avantages, de leurs faiblesses, de leurs déficiences. De nos jours, une des meilleures définitions du continu numérique classique est celui défini, de manière effective, à partir de ces éléments ponctuels que sont les nombres décimaux, formant le corps ordonné archimédien typique, et satisfaisant à l'axiome des intervalles emboîtés. Comme les précédentes, cette construction possède un caractère hybride : elle emprunte au réductionnisme la présence du local ponctuel, et au holisme l'axiome des intervalles emboîtés.

Le nombre entier a pu être conçu par imitation du processus naturel d'empilement : lentement, l'une après l'autre, les feuilles d'automne aux teintes défraîchies s'amassent en un épais tapis brun. Ce processus de construction lié à l'écoulement du temps est *exogène*; il s'accomplit par l'action invisible d'un *deus ex machina*. Il s'agit donc d'une fausse générativité dans la mesure où celle-ci n'est pas une donnée réellement interne à l'objet mathématique. Cette générativité revient en fait à postuler l'existence de tous les entiers, et à décrire le mode de passage de l'un d'entre eux au suivant.

J'ai décrit [4] un mode de construction des entiers où fonctionne un moteur interne représenté par une loi de composition. En voici le principe. On part de l'ensemble $\{0,1\}$ muni d'une loi d'addition vérifiant $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1$. Cette loi de composition ne fonctionne ici que partiellement puisque $1 + 1$ n'est pas défini. Une sorte de nécessité intérieure, une âme au sens grec du terme, va obliger cet être mathématique à évoluer de manière tout d'abord que l'opération $a + 1$ soit définie. Pour cela, il faut créer le nouvel élément $a + 1$, ici 2. Dans une étape suivante, on imposera que soient possibles des relations du genre $a + b = 0$, ou $nx + m = 0$, ce qui imposera la création des entiers négatifs et des rationnels. Ce mode de construction est simplement la conséquence de la généralisation triviale de la méthode de construction de certains nombres par extension, couramment utilisée en algèbre; c'est ainsi, par exemple, que l'on construit les nombres quadratiques. L'un des intérêts de cette méthode est de fournir une procédure de construction des principaux corps de nombres. Un second intérêt paraît plus essentiel, celui du caractère quasi biologique de la méthode : le corps des nombres réels est créé de façon endogène, progressive, discrète au départ, de plus en plus globale ensuite. On assiste à une création progressive d'espaces numériques *localement* discrets ou continus, création qui différe, dans son esprit en particulier, de la construction purement atomistique, au caractère statique.

Rappelons pour mémoire qu'existe une infinité de continus numériques, comme les nombres réels et complexes, les nombres p-adiques, les réels non standard. Les caractérisations algébriques et structurelles permettent de classer ces ensembles, dont celui des réels joue le rôle fondamental. La continuité de l'ensemble des réels a atteint un état d'achèvement contrôlé qui, jusqu'à présent, n'a pu être dépassé.

2. Le continu topologique

Mais qu'entend-on par continuité en mathématique? Il conviendrait à ce moment de reprendre et de développer largement les éléments d'études historiques déjà existants portant sur cette continuité (cf les ouvrages précités [3], [7]). En bref, cette notion a été précisée petit à petit au cours de l'étude des fonctions d'une variable. Voici par exemple la définition de la continuité d'une fonction par Cauchy, en 1823 [6], i désigne un infiniment petit : "Lorsque, la fonction $f(x)$ admettant une valeur unique et finie pour toutes les valeurs de x comprises entre deux limites données, la différence $f(x + i) - f(x)$ est toujours entre ces limites une quantité infiniment petite, on dit que $f(x)$ est *fonction continue* de la variable x entre les limites dont il s'agit." Dans le même temps, l'emploi du terme voisinage se répandait avec la connotation spatiale qui lui est attachée. La nécessité d'étendre la définition de la continuité à des applications entre espaces pluridimensionnels, jointe à une meilleure interprétation géométrique, c'est-à-dire spatiale, des conditions qui permettent de définir cette continuité, a finalement abouti à l'énoncé moderne de la continuité des applications : une application f de l'espace topologique E dans l'espace topologique E' est continue en l'élément x de E, si quel que soit le voisinage V' de f(x) dans E', il existe un voisinage V de x dans E, tel que
$f(V) \subset V'$. La continuité des applications, selon cette dernière définition, n'est ainsi que *relative*, car elle dépend de manière essentielle de la topologie des espaces considérés, topologie entièrement définie par le "flirte", selon H.Cartan et P.Samuel, des voisinages de chaque point. L'existence d'une fonction continue entre deux espaces discrets n'a, par suite, rien d'une curiosité : elle résulte d'une définition linguistique. *Le caractère continu de l'espace topologique est énoncé par l'infinité des éléments des filtres*. Au contraire, nous conviendrons de poser qu'un espace est discret en un point si le filtre des voisinages contenu dans un voisinage donné du point considéré est fini. Cette définition d'un espace continu élimine de ce monde les espaces numériques qui donnent *l'apparence du continu*, et dont pourraient se satisfaire les analystes numériciens et les physiciens, comme par exemple l'ensemble des nombres représentés par des décimaux tronqués à la 35-ième décimale.

Notons par ailleurs que la théorie générale des espaces topologiques postule l'existence d'ouverts : lorsqu'ils ne sont pas finis, ce sont, à jamais, des infinis potentiels. Advient alors l'opération magique de fermeture : elle transforme ces ouverts en fermés, c'est-à-dire en infinis en acte, puisqu'on peut atteindre leur bord. On comprend ici que le monde mathématique est celui d'un conte de fée avec sa part de réalisme foncier et de merveilleux. Il ne faut pas perdre de vue que nous sommes au royaume de l'idéalisation, qui rend compte de manière plus ou moins fidèle de situations concrètes où jouent des contraintes physiques ignorées dans le processus de représentation.

Par opposition avec la démarche réductionniste adoptée au siècle dernier, on notera que cette approche géométrique moderne, et aujourd'hui acceptée par tous les mathématiciens, est de nature foncièrement globale, dans la mesure où, par une procédure de descente infinie, on part du tout pour essayer d'atteindre l'élément. Cependant, il existe toujours une sorte de balancement entre le tout et le particulier, parfaitement exprimé par la dualité mathématique telle que, par exemple, on la rencontre, de manière élémentaire, en algèbre linéaire.

C'est par Bolzano puis par Cantor que l'on a acquis une réelle compréhension du continu mathématique. Ces auteurs ont d'abord montré, ce que savait déjà Galilée, qu'il y a autant de nombres pairs que d'entiers, en d'autres termes qu'un ensemble infini admet des parties équipotentes au tout. Cette propriété, qui permettait de définir un ensemble infini, possède l'inconvénient de n'être pas "catégorique" au sens de la théorie des ensembles, car alors il est nécessaire de savoir exhiber de manière précise les parties équipotentes au tout. Ainsi Bourbaki [1] [2], qui a sans doute essayé de mettre en œuvre divers systèmes de définitions possibles, après avoir défini un ensemble infini par opposition à un ensemble fini, ne parvient pas à s'affanchir de la nécessité d'énoncer un axiome d'existence d'ensembles infinis. De même Cantor a énoncé ensuite, sans parvenir à une démonstration, le fait essentiel que toute partie de l'ensemble des réels est soit discrète, soit équipotente au tout. On sait depuis Gödel que cet énoncé, n'étant pas catégorique, n'est pas démontrable avec l'axiomatique usuelle de la théorie des ensembles; il porte le nom d'"hypothèse du continu".

On peut naturellement donner une démonstration géométrique facile de cette propriété, dans le cadre de la géométrie euclidienne,

et dont voici la partie essentielle. Prenons deux droites distinctes d et d', concourantes en un point C. Soit AA'C et BB'C deux triangles dont les sommets A et A' (resp. B et B') sont situés sur la droite d (resp. d') - on peut remplacer les segments AA' et BB' par des éléments de courbes convenables. Par l'intermédiaire de la projection centrale de centre C définie à partir du faisceau des droites δ passant par C et coupant AA' en P, BB' en Q, on établit l'équipotence de AA' et de BB', ainsi que l'homéomorphie entre ces segments. Une projection parallèle permet de vérifier que l'un des segments est aussi une partie de l'autre. Ainsi deux parties connexes quelconques d'une droite sont non seulement équipotentes mais homéomorphes. Dans le cadre d'une théorie entièrement géométrique du continu, il faudrait sans doute poser comme axiome l'identification de la droite géométrique à l'ensemble des réels.

Avant de revenir en conclusion sur la signification de ces faits, il convient encore d'évoquer la manière dont les géomètres définissent leurs objets courants dotés de propriétés de continuité, les variétés et fibrés différentiables. Cette manière quoique locale n'est pas atomistique. On ne part pas des éléments, mais d'étendues locales puisées dans les domaines numériques continus, dont l'assemblage par collage permet une construction de l'objet. Même si le filtre des voisinages converge vers un point, les propriétés sont localement constantes sur un voisinage immédiat du point, fait physique qui autorise la construction mathématique. Cependant, les mathématiciens étudient aussi des variétés avec singularités. La considération de l'élément, en l'occurence le point singulier, devient ici très importante. Il faut s'interroger à ce moment sur la validité de la représentation mathématique du fait physique. Cette représentation n'est-elle pas trop grossière, outrancière ? N'est-ce-pas faute d'une connaissance physique suffisante de ce qu'il advient au voisinage de la réalité représentée de manière idéale par le point singulier qu'un tel modèle est employé ? A ces questions, la réponse ne peut être pour l'instant qu'évasive. La prudence d'une part, le souci intellectuel de complétude d'autre part, imposent de toute façon d'élucider toutes les propriétés des variétés branchues, nouées, et porteuses en même temps de singularités qui sont autant de défis à la continuité.

On retombe ainsi sur les problèmes liés à nos conceptions du continu physique et de ses transformations. Dans quelle mesure est-il une sorte de fluide qui s'épaissit voire se cristallise localement en particules plus ou moins bien définies et stables ? Dans quelle mesure alors est-on capable de définir des transformations similaires d'espaces mathématiques? Même si la construction des espaces de tolérance de Zeeman, ou celle des épaississements de Gromov, constituent des premiers travaux qui vont dans le sens d'une réponse à cette question, celle-ci reste largement ouverte.

Il faut encore signaler, par la négative, deux propriétés du continu topologique. Le continu arithmétique proprement dit, celui des réels, est totalement ordonné; il est orientable. Le continu topologique ne possède ces attributs que de manière exceptionnelle. Ces faits ne seront sans doute pas sans conséquence sur le développement futur de la science. La logique élémentaire, son mode de fonctionnement sont fortement liées aux propriétés du continu arithmétique, dont les capacités de représentation sémantique sont par ailleurs pauvres. Il n'est pas exclu qu'en utilisant de meilleure manière les ressources du continu topologique, on ne puisse un jour mettre en œuvre des espaces de représentation sémantique moins élémentaires, plus adaptés à la description des arcanes du raisonnement. Incitant à la mise en place de "logiques" ou procédures de description du fonctionnement de la pensée moins frustes que les logiques actuelles, l'utilisation de la richesse potentielle des continus topologiques permettrait peut-être d'affiner encore notre intelligence de la nature.

Enfin, pour revenir au continu physique du premier ordre, chargé de qualités physiques, il est nécessaire, pour en donner une représentation plus fidèle, de compléter l'espace topologique avec d'autres propriétés physiques internes. Elles sont exprimées par la valeur d'une forme différentielle, de degré variable. Le cas le plus classique est celui où cette forme est de degré 1, et où, tensorisée avec elle-même, elle définit une métrique sur l'espace. L'espace topologique devient alors un espace géométrique, description d'une κωρα platonicienne idéale.

3. Conclusion

L'axiomatique actuelle des mathématiques possède un caractère hybride dû à l'importance de la place occupée par l'ensemble des réels. Il n'est pas certain qu'on ne puisse lui substituer une

axiomatique différente, plus géométrique, où l'hypothèse du continu, prise comme axiome, jouerait un rôle central. L'exercice, qu'on a peut-être déjà tenté de faire, n'intéressera sans doute plus guère le mathématicien, davantage préoccupé par la découverte de nouvelles propriétés au sein de son univers d'objets. Il est peu probable en effet qu'une nouvelle mise en forme des éléments de base des mathématiques présente un quelconque avantage pour la mise en évidence de ces propriétés. L'intérêt d'une telle reformulation concernerait plutôt une connaissance sur les capacités de l'esprit humain à élaborer une théorie cohérente qui permette de mieux saisir la nature de l'infini et du continu.

Quoi qu'il en soit, les considérations des paragraphes précédents ne peuvent que conduire à douter de la capacité des sens et de la pensée à cumprehendere la véritable nature du continu physique, de la κωρα. Les révélations de l'intuition s'amenuisent au fur et à mesure que celle-ci pénètre à l'intérieur du monde physique. D'un autre côté, nos constructions mentales rationnelles, aussi axiomatisées soient-elles, ne permettent pas de bâtir un édifice cohérent garantissant l'atteignabilité d'une preuve constructive de toutes nos propositions. Nous sommes donc conduits à faire preuve de beaucoup d'humilité. Cette vision modeste, et pourtant ouverte sur le monde, était aussi celle d'Hermann Weyl, présentée de manière plus complète sous la forme de quatre thèses par Jean Largeault dans sa magnifique introduction. Faut-il ajouter que notre ami partageait, lui aussi, ces convictions dont je choisirai la suivante pour conclure cet hommage : "l'infini est accessible à l'esprit et à l'intuition sous la forme d'un champ de possibilités ouvert à l'infini."

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI *Théorie des Ensembles*, Hermann, Paris, 1970.
[2] N.BOURBAKI *Topologie Générale*, Hermann, Paris, 1971.
[3] C.P. BRUTER *De l'Intuition à la Controverse (Essai sur quelques controverses entre mathématiciens)*, Blanchard, Paris, 1984.
[4] C.P.BRUTER Sur la construction des nombres, *Zeszyty Naukowe Uniw. Jagiellonskiego*, **17** (1975) 25-32.
[5] C.P.BRUTER Bifurcation : un concept interdisciplinaire, *Interdisciplinarité scientifique (Actes 114 ème Congrès Soc.*

Savantes), Ed.CTHS, 1992, 59-71.
[6] A.L.CAUCHY *Le Calcul Infinitésimal*, 1823 (ACL-éditions, Paris, 1987).
[7] J.DHOMBRES *Nombre, Mesure et Continu*, Cedic-Fernand Nathan, Paris 1978.
[8] G.S.KIRK, J.E.RAVEN, M.SCHOFIELD *Les Philosophes Présocratiques*, Ed. du Cerf, Paris, 1995.
[9] J.LARGEAULT *Leçons de Métaphysique*, IRU Histoire de la connaissance, Paris 12, 1984.
[10] J.LARGEAULT *Intuition et Intuitionisme*, Vrin, Paris, 1993.
[11] J.LARGEAULT *Intuitionisme et Théorie de la Démonstration*, Vrin, Paris ,1992.
[12] D.LOUET *Structure et Réalité de l'Espace d'après la Science Classique*, Thèse, Paris 12, 1996.
[13] F.LURCAT *L'Autorité de la Science*, Ed. du Cerf, Paris, 1995.
[14] H.WEYL *Le Continu et autres écrits*, Vrin ,Paris, 1995.

La dialectique de l'objectivité et du sens

Jacques Harthong

1. Introduction et explication du titre

Les idées développées dans ce petit essai sont résumées dans la conclusion; il est donc possible d'avoir une vue d'ensemble très rapide en lisant cette conclusion en premier.

Je vais donner un point de vue de praticien. L'établissement mentionné ci-dessus, l'*École Nationale Supérieure de Physique*, est en effet une école d'ingénieurs. J'y fais de la physique *appliquée*. Une partie de mon enseignement et l'essentiel de mon activité de recherche est le *Calcul scientifique*, c'est-à-dire l'art d'utiliser les ordinateurs pour traduire les équations de la physique en calculs numériques.

Je n'ai pourtant jamais séparé mon activité, aussi pratique soit-elle, de la réflexion philosophique. Ce colloque m'a fourni l'occasion de lire les ouvrages de Jean Largeault, que je ne connaissais point auparavant. Voici quelques commentaires inspirés par ces lectures.

Il convient avant toute autre chose que j'explique mon titre, après quoi j'en développerai l'idée. Ce titre suggère que les deux termes, l'*objectivité* et le *sens*, s'opposent et créent de ce fait une dynamique. La thèse est la suivante: un moteur essentiel de l'évolution de la science est cette dialectique permanente entre le souci d'objectivité et le souci de comprendre les causes et d'expliquer les phénomènes (ce que je résume par le *sens*). Mais ces deux termes nécessitent une définition plus précise. Voici par