[5] F. Fer, *L'Irréversibilité, fondement de la stabilité du monde physique*, Gauthier-Villars, Paris, 1977.
[6] P. Glansdorff et I. Prigogine, *Structure, stabilité, fluctuations*, Masson, Paris, 1971.
[7] P. Hanusse, P. de Kepper et A. Pacault, « Description d'un système chimique dissipatif », *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, Paris, t. 280, série B, 1975, p. 157-161.
[8] J. Largeault, « Hasards, probabilités, inductions », *Publ. de l'université de Toulouse - Le Mirail*, t. 42, série A, 1979.
[9] J. Largeault, *Énigmes et controverses*, Aubier, Paris, 1980.
[10] A. Messiah, *Mécanique quantique*, Dunod, Paris, 1965.
[11] J. Rayski, « Controversial Problems of Measurements within Quantum Mechanics », *Foundations of Physics*, vol. 9, nº 314, 1979, p. 217-236.

# CHAPITRE VII

# SUR UN MODÈLE GÉOMÉTRIQUE DE LA PERCEPTION VISUELLE[1]

## Introduction

Tout examen des travaux de Hoffman amène à poser les questions suivantes :

1) Pour quelles raisons Hoffman a-t-il été conduit à proposer ses modèles ? Ces raisons sont-elles de nature métaphysique, psychologique, sociologique, suggérées et soutenues par des expériences psychologiques, par des observations neurophysiologiques ?

2) Quel est le degré de pertinence de ces modèles par rapport à chacune des motivations précédentes ?

3) Quelles conclusions générales peut-on déduire des tentatives d'Hoffman, qui aient un intérêt, non seulement pour le psychophysiologiste, mais également pour la communauté scientifique tout entière ?

Avant d'entrer dans le vif du sujet, il est nécessaire de préciser que cette analyse se limitera à celle de deux articles assez anciens de Hoffman : « The Lie Algebra of Visual Perception [7] », et « The Neuron as Lie Group Germ and a Lie Product [8] ». Il faut également souligner la difficulté de traiter séparément chacune des questions : est-il besoin de rappeler la force des liens qui unissent la métaphysique, la psychologie et la sociologie. Nombre des

1. Le texte de ce chapitre a été publié, en langue anglaise, sous le titre : « On Hoffman's Work », dans les *Cahiers de psychologie*, vol. 20, nº 2-3, 1977, p. 183-195. Sa rédaction m'en avait été suggérée par le Pr J. Paillard que je voudrais remercier.

critiques formulées ici sont en fait déduites de certaines des conclusions générales qui, en partie, sont des a priori de l'auteur, étayés par l'observation. Par suite, le plan d'étude dessiné dans les premières lignes de ce chapitre ne sera pas suivi de manière rigoureuse.

Nos conclusions sur le premier des articles cités seront positives. A l'égard du second de ces articles, nous exprimerons quelques réserves. Il pourrait être utile, en tout cas, d'entreprendre des expériences qui montreraient les faiblesses et les points forts des affirmations de Hoffman.

### 7.1 Le triple rôle de la métaphysique, de la psychologie et de la sociologie

**7.1.1** « La philosophie mathématique présente un caractère fortement platonicien [17]. » Un grand mathématicien contemporain n'aurait pas désavoué ce jugement. De fait, divers mathématiciens, dont certains figurent parmi les meilleurs, pour des raisons psychologiques, par tradition, par expérience ou intuition, estiment nécessaire de maintenir toujours vivante la tradition pythagoricienne.

Cette attitude repose sur une base empirique solide. Presque tous les mathématiciens qui ont essayé d'appliquer la géométrie à l'étude des faits physiques et biologiques sont devenus plus ou moins platoniciens. Ce propos d'Hermann Weyl est tout à fait significatif : « La symétrie est sujet vaste, d'une grande importance en art et dans la nature. A sa base reposent les mathématiques [18]. » Nous croyons que la nature partage avec la géométrie trois attributs : la simplicité, l'élégance, la clarté dans la compréhension. De fait, les plus beaux succès auxquels sont parvenues les mathématiques appliquées sont de nature géométrique : *Principia* de Newton, théories de Maxwell et d'Einstein, réunies en une théorie unitaire par Mendel Sachs [15], qui obtient également « toutes les prédictions mathématiques de la mécanique quantique non relativiste (...) comme une approximation mathématique (linéaire) ». Des mathématiciens français ont obtenu récemment des résultats similaires : « La mécanique quantique correspond à une déformation non triviale de la mécanique classique [6] », elle-même exposée en termes de géométrie. Évoquons seulement les espoirs tout récemment placés dans les théories de jauge.



Aussi, l'idée de présenter des modèles géométriques dans les sciences de la vie doit-elle être défendue. Nous sommes convaincus que la nature peut être décrite par une théorie unitaire. Une bonne application du principe de correspondance consiste à étendre à d'autres sciences les outils géométriques qui se sont révélés utiles en physique.

En tant que mathématicien introduit dans le domaine de la géométrie et des applications des mathématiques, le Pr Hoffman a certainement goûté aux charmes du point de vue platonicien, et ses tentatives méritent d'être prises en considération.

**7.1.2** « Ce qui est l'objet de la géométrie, c'est l'étude d'un "groupe" particulier, mais le concept général de groupe préexiste dans notre esprit au moins en puissance. Il s'impose à nous non comme forme de notre sensibilité, mais comme forme de notre entendement. » « Dans notre esprit préexisterait l'idée latente d'un certain nombre de groupes ; ce sont ceux dont Lie[2] a fait la théorie. » Ces mots sont de Poincaré. En vérité, bien des psychophysiologistes devraient lire la théorie de Poincaré sur l'élaboration de l'espace ; à la lumière des théories neurophysiologiques les plus récentes, une étude critique acérée de ses idées [12], [13], [14] pourrait être très profitable. Les expérimentateurs comme les constructeurs de modèles pourraient tirer avantage de ses conceptions. Il écrit encore : « Je crois donc que si par espace on entend un continu mathématique à trois dimensions, d'ailleurs amorphe, c'est l'esprit qui le construit, mais il ne le construit pas avec rien, il lui faut des matériaux et des modèles. Ces matériaux et ces modèles préexistent en lui. » Cette dernière assertion est de nature à la fois empirique et platonicienne.

Ainsi, depuis Poincaré, il est communément accepté par la communauté mathématique que le développement de notre corps s'accomplit en même temps que l'élaboration d'un certain nombre de groupes de Lie. Les mathématiciens font confiance à Poincaré, l'un des meilleurs d'entre eux, qui avait également des connaissances profondes dans toutes les branches de la science. Ses théories psy-

2. Un *groupe de Lie* est une forme topologique, par exemple un cercle, une droite, qui possède une structure de groupe au moins continu : on peut interpréter un cercle comme un groupe continu de rotations, une droite comme un groupe continu de translations.

chophysiologiques reposent sur des faits neuropsychologiques, et relient la perception aux mouvements.

Bien qu'Hoffman ne fasse pas mention de Poincaré dans son premier article [7], nous devons porter au crédit de ce dernier d'avoir attiré l'attention sur l'intérêt des groupes de Lie dans la théorie de la perception. Selon le second article, Hoffman semble avoir acquis l'idée de faire appel aux groupes de Lie à travers l'étude des travaux de Pitts et McCulloch. Cependant, c'est le mérite d'Hoffman d'avoir à nouveau valorisé le rôle des groupes de Lie en les introduisant de manière explicite dans la théorie de la perception.

**7.1.3** Quand apparaît une nouvelle théorie basée sur les mathématiques, quatre attitudes sont possibles.

La première, mais souvent la dernière à être adoptée, est l'attitude sereine ; des arguments sont avancés montrant l'intérêt ou la faiblesse de la théorie : toute passion est absente du débat.

Dans les second et troisième cas, parfois par manque de connaissances mathématiques, la réaction est admirative et enthousiaste, ou, au contraire, carrément méprisante : plus ou moins encouragées par l'organisation présente de la communauté scientifique, les personnes à l'esprit exagérément compétitif, voire paranoïaque, font souvent preuve d'une agressivité déplacée – toute activité du collègue est sans intérêt.

La dernière réaction peut être celle de l'indifférence, soit par hostilité cachée à l'égard d'une théorie qui affaiblit plus ou moins grandement la portée de ses propres travaux, soit parce qu'elle requiert l'effort de lire, d'apprendre et de comprendre, ou bien par simple ignorance. L'indifférence admet un corollaire, la mort par oubli.

Pourquoi tant de modèles sombrent-ils dans le néant, à peine publiés ? Une des raisons possibles est leur manque de pertinence. Les idées de valeur se maintiennent en vie, creusent un lit dans l'esprit des hommes et, petit à petit, parviennent à s'imposer à la communauté scientifique.

Il faut noter que les travaux d'Hoffman ont suscité des réactions et restent encore soumis au feu des discussions. Naturellement, pour expliquer ce point positif, on peut avancer que : en premier lieu, la plupart des psycho- et neurophysiologistes ignorent le maniement des outils mathématiques utilisés par Hoffman ; en second lieu, le style



de cet auteur est plutôt abrupt, il affirme plus qu'il ne démontre : la méthode de la pédagogie directe a parfois des effets persuasifs. Mais ces arguments peuvent se rapporter à d'autres modèles qui ne rencontrent pas le même succès. Il faut chercher plus loin.

## 7.2 Fondements psycho et neurophysiologiques

**7.2.1** *Premier article.* Nous n'avons pas d'idée exacte sur le savoir neurophysiologique des années 65 en matière de perception visuelle. Pour autant qu'on en puisse juger et deviner, Hoffman semblait posséder une bonne vision d'ensemble sur ce savoir. En particulier, la bibliographie qu'il donne révèle sa familiarité avec les tentatives d'« explication » mathématique des illusions géométriques et avec l'ontogénie des neurones. Néanmoins, les références aux théories bien connues des psychologues (Koelher, Hebb, Day, etc.) comme les références à la phylogénie et au rôle du système sensori-moteur sont absentes de cette bibliographie. Naturellement, il serait malséant d'en déduire qu'Hoffman n'avait aucune connaissance des sujets correspondants. Mais on peut penser qu'à l'époque ils ne faisaient point partie de ses principaux centres d'intérêt.

Au contraire, l'examen des écrits de Poincaré frappe par les analyses et la compréhension profonde du fonctionnement du système sensori-moteur, et par les références constantes à l'onto- et à la phylogénie. Le mathématicien français développe d'abord une théorie neurophysiologique, il introduit ensuite et justifie l'emploi des groupes de Lie, emploi qui paraît alors naturel.

Hoffman ne cherche nullement à essayer de justifier l'usage des groupes de Lie. Cependant, grâce au travail préliminaire de Poincaré, à la confiance que nous avons en son intuition et en son raisonnement, cet emploi par Hoffman des groupes de Lie bénéficie d'un préjugé favorable, mais il est certain que des explications neurophysiologiques de la part d'Hoffman auraient été bienvenues. Nous proposerons dans les prochains paragraphes des arguments en faveur des modèles de ce mathématicien. Toutefois, puisque nous n'avons aucune idée sur la durée nécessaire avant que ne soient avancées des justifications de poids, il conviendra de faire référence à la théorie de Poin-

caré, de faire preuve de réserve dans les affirmations et d'insister sur la valeur de généralité des représentations géométriques proposées.

Considérons les quatre affirmations. La Terre autour du Soleil suit une trajectoire elliptique. Une voiture de course parcourt un circuit automobile, sa trajectoire est une ellipse. Un athlète court sur la piste, sa trajectoire est une ellipse. J'observe en perspective le bord de l'abat-jour. Je vois une ellipse.

La définition de toutes ces ellipses comme résultat de l'action[3] d'un groupe de transformation de Lie sur une variété M de dimension 2 a-t-elle un sens du point de vue neurophysiologique ? En ce qui concerne les trois premiers exemples, sans doute. *Quelles que puissent être les causes physiques du mouvement*, et la complexité des formules analytiques qui inspirent ces causes, on peut les représenter à travers le champ des vecteurs qui engendrent la trajectoire elliptique E. Ce champ de vecteurs peut alors être étendu en un champ de vecteurs sur la totalité de la variété M ; *ce champ, à son tour, donne naissance à un groupe de Lie* [5] – quand certaines conditions de compacité sont remplies, ce que l'on peut admettre tant dans la réalité physique que perceptible, en considérant l'espace usuel comme un espace projectif.

Précisons les raisons pour lesquelles, dans le cas perceptif, on peut considérer l'ellipse comme engendrée par un champ de vecteurs. Un vecteur prend naissance entre deux points chaque fois qu'au même moment les valeurs associées à une qualité commune aux deux éléments d'espace représentés par ces points deviennent différentes. Ainsi, entre chaque lettre de ce texte et son voisinage immédiat, existe un ensemble continu de (vecteurs) gradients de couleur ou d'intensité lumineuse, et la forme de la lettre est définie par une courbe C orthogonale à cet ensemble de gradients. Pour des raisons de convenance mathématique, et non pas pour des raisons de nature biophysique, dans les cas élémentaires, et précisément dans le cas des illusions géométriques, nous pouvons considérer le champ de vecteurs particulier qui engendre la courbe observée C

3. Un groupe de Lie, tel que le groupe $\Theta$ des rotations d'angle $\theta$ représentées par le cercle $S^1$, « agit » sur une variété M de la manière suivante : tout point p de M, soumis à l'action d'un élément du groupe, est transformé en un point p' déduit de p par une rotation d'angle $\theta$ autour d'une origine. En passant continûment de p à p', la trajectoire suivie par le point courant est un arc de courbe.



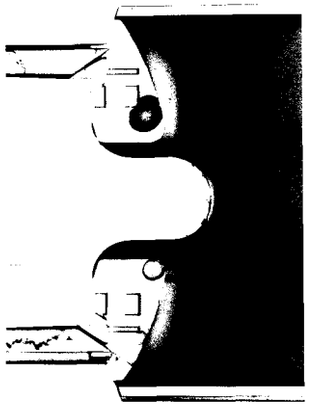
comme plongé dans un champ de vecteurs plus large, lié, dans les situations simples, aux groupes de Lie. Insistons sur le fait que les trajectoires autres que C, engendrées par ces groupes, n'ont pas de réalité physique.

Le modèle possède quelque valeur si nous sommes sûrs que notre système visuel est vraiment sensible aux gradients. Or, ce fait est connu depuis plus d'un siècle. Les bandes de Mach, les expériences de Helmoltz – qui ont donné naissance aux modèles de Huggins et Licklider [2] – en témoignent.

Les observations de Hubel et Wisel donnent une importance accrue à la notion de champ de vecteurs visuel. Puisque l'activité du neurone adulte est l'aboutissement phylogénétique et ontogénétique d'un fonctionnement qui se prolonge dans un passé très lointain, il n'est nullement déraisonnable de supposer que certains neurones ont acquis une grande spécialisation. Ils ont pu devenir particulièrement sensibles à certaines directions, ils ont pu intégrer, avec davantage d'intensité, des réponses à des directions privilégiées et avoir ainsi un fonctionnement très dépendant de l'orientation – on ne doit pas oublier qu'ils sont en fait sensibles, même très faiblement, à la plupart des directions (cf. [1]).

Il paraît alors sensé de construire un système visuel mécanique ou théorique qui diviserait l'espace visuel en petits disques d'observation ; chaque disque serait observé à l'aide d'un faisceau de neurones sensibles à des directions particulières ; la coordination entre les disques s'effectuerait au travers de processus intégratifs incluant l'action du système sensori-moteur. L'activité des neurones impliqués dans l'ensemble du processus conduit à l'élaboration de l'image instantanée.

Il serait souhaitable de mieux connaître les détails neurophysiologiques et d'examiner comment un ensemble de gradients donne naissance à une image qui lui est orthogonale. On notera ici que le concept de transversalité (ou encore d'orthogonalité généralisée) pourrait être utile dans l'étude de nombreuses questions neurophysiologiques [2]. Par exemple, ce concept suggère des éléments d'explication de certaines causes physiologiques qui pourraient être à l'origine des post-images et des post-effets visuels. En conséquence, l'emploi par Hoffman de groupes de Lie



semble justifié, mais il ne contient en lui-même aucune explication du phénomène.

Sans doute apparaît-il clairement, à la lumière des données du paragraphe précédent, que *le concept important* n'est pas celui de groupe, mais plutôt celui de *champ de vecteurs qui*, à travers son expression mathématique, *contient une bonne part de la réalité physique.*

Dans la plupart des cas, les champs de vecteurs engendrent des groupes de Lie, et on peut jouer avec les vecteurs, soit directement, soit indirectement, à l'aide des groupes de Lie associés. Certaines expériences dues à Caelli, visant à donner une assise aux théories d'Hoffman, doivent sans doute leur succès à ces propriétés des champs de vecteurs ; puisque les opérations qui sont faites sur ces vecteurs ont un sens physique, il n'est pas étonnant que les résultats expérimentaux de Caelli coïncident avec la théorie mathématique.

L'intérêt du langage des groupes de Lie est de donner une expression algébrique à quelques processus géométriques, et ainsi de faciliter le calcul. La géométrie est l'étude des mêmes trajectoires, qu'elles soient définies par des champs de vecteurs, qui sont de nature physique, ou bien des groupes de Lie, qui sont de nature abstraite.

Hoffman pensait en termes de géométrie, présentée dans le langage « moderne » (depuis F. Klein, 1872 !) des actions de groupe – le terme champ de vecteurs n'apparaît jamais dans les deux textes soumis ici à la critique. Leur auteur a pu néanmoins écrire ses modèles par suite, d'une part, de la présence physique de gradients lumineux externes, et, d'autre part, des capacités du système sensoriel interne à détecter de tels gradients.

Une philosophie de la reconnaissance des formes pourrait être développée à partir de cette dernière remarque, mais ce n'est pas, ici, le lieu pour entreprendre une telle étude.

Puisque la notion de champ de vecteurs est la notion la plus pertinente, et la plus proche de la réalité neurophysiologique, on aurait pu suggérer l'abandon dans les titres de la référence aux groupes de Lie. Une autre modification aurait concerné l'expression de « perception visuelle ». L'usage d'une telle expression aurait été justifié si la théorie avait été capable de prendre en compte la perception visuelle d'un paysage ordinaire et de tous ses colo-

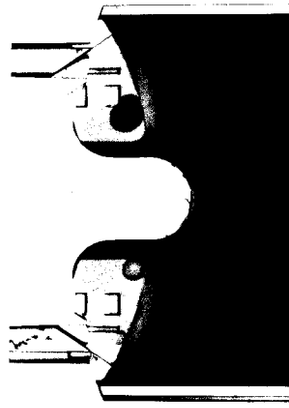


ris, les effets de perspective, tous les changements multiples dans la perception visuelle engendrés par les différentes sortes d'aphasie, et par toutes les maladies neurologiques ou neurophysiologiques.

En fait, le modèle d'Hoffman se rapporte à quelques aspects seulement des illusions géométriques. Puisque, d'un point de vue psychophysiologique, ces illusions peuvent faire l'objet de critiques (cf. par exemple *Topologie et perception* [2] et l'article de P. Dodwell dans les *Cahiers* où fut publié ce texte), il semble plus juste de restreindre explicitement le modèle aux aspects de la perception visuelle évoqués quelques lignes plus haut, et de réfléchir aux possibilités d'étendre le modèle.

Un trait général de la perception visuelle est l'invariance de la perception de la scène observée alors que le corps bouge. Par exemple, quand nous remuons la tête, le bord de l'abat-jour apparaît une première fois comme un cercle plan, une seconde fois comme un demi-cercle, comme une ellipse dans les autres cas. Une fois que nous avons observé la forme du cercle, nous en concluons que la forme intrinsèque de ce bord est celle du cercle : pourquoi, comment[4] ? La même question se pose si l'objet que nous considérons n'a pas la forme intrinsèque du cercle, mais disons celle d'une ellipse, comme, par exemple, un ruban élastique.

L'article d'Hoffman semble traiter pour l'essentiel des phénomènes de constance visuelle. Pour la clarté des problèmes, il aurait été sans doute souhaitable d'en proposer des définitions abstraites, et, pour l'auteur, de bien préciser le programme qu'il entendait suivre. Dans le cas présent, il appartient au lecteur d'interpréter ou d'imaginer. Tout un article serait nécessaire pour traiter ces problèmes de constance visuelle, nous ne pouvons pas réellement les aborder ici.



4. On peut avancer les éléments d'explication suivants : selon le principe de continuité, cher à Aristote et à Poncelet, nous gardons en mémoire que le cercle, l'ellipse et le segment appartiennent à la même famille d'objets mathématiques.

Si à chaque figure, on associe l'aire du domaine plan borné qu'elle délimite, on voit que le segment et le cercle sont singuliers dans l'ensemble de ces figures : par suite, et sauf exception, on devrait conclure que la figure type de l'objet considéré est celle de l'ellipse.

Cependant, l'expérience acquise en matière de forme d'abat-jour, étayée par l'observation particulière ou par la connaissance du fait que le cercle correspond à la figure la plus stable du point de vue mécanique, rend la plus vraisemblable l'hypothèse selon laquelle l'abat-jour possède la symétrie de révolution.

Soit C, une courbe donnée – sans singularité. On suppose que l'équation analytique de C peut être trouvée ; elle est notée (f = 0). C'est un exercice que d'écrire l'expression mathématique des composantes du champ de vecteurs qui engendre la courbe, ainsi que l'expression d'un générateur infinitésimal du groupe de Lie L dont l'action sur la totalité de l'espace engendre la courbe C parmi d'autres. C restera invariante sous l'action de L : cette propriété peut être exprimée par le fait que la dérivée de Lie de L par rapport à f est nulle (voir [5]).

Supposons que C soit une ellipse. Remuant la tête ou bougeant l'ellipse, nous supposons que C continue à nous apparaître comme une ellipse : le même *type* de groupe de Lie sera engendré. Le problème reste posé : de quelle manière, sur des bases biochimiques et neurophysiologiques, les champs de vecteurs correspondants restent-ils « les mêmes » ou bien stables – en un certain sens qu'il faudrait pouvoir préciser ? Hoffman considère seulement un groupe de Lie : mais, en fait, nous sommes en présence d'une famille de tels groupes. Les questions de stabilité ne sont pas posées dans son premier article. Elles apparaissent dans le second, mais elles n'y sont guère travaillées. Il est vrai que l'étude mathématique de la stabilité des actions de groupes de Lie est difficile.

Supposons maintenant qu'après avoir bougé la tête, et prenant du recul, l'ellipse apparaisse comme un intervalle : le groupe de Lie à considérer est tout autre, des processus de bifurcation affectent profondément le champ de vecteurs. Comment la nature réalise-t-elle ces processus de bifurcation ? Il ne semble pas que le texte d'Hoffman contienne une allusion quelconque à ces phénomènes. Il faut dire que, dans les années 65, l'attention des mathématiciens ne se portait guère vers les problèmes de bifurcation.

Abandonnons ces questions difficiles. Hoffman affirme l'existence d'« entrées proprioceptives appropriées qui déterminent les paramètres du groupe [7] », et que, d'après des expériences diverses, les animaux font preuve d'une sensibilité précoce à différentes « directions » spécifiques – y compris à la « dilatation des formes ». Ces « directions » peuvent être exprimées à l'aide des générateurs infinitésimaux de groupes de Lie adéquats. Le cerveau pourrait combiner ceux-ci de bien des façons – notons que si



des neurones (ou des couches de neurones) sont réellement spécialisés dans l'évaluation de « directions » particulières, la destruction de ces neurones, ou des interactions entre eux, devrait supprimer ou du moins atténuer la perception de ces mélanges de « directions ».

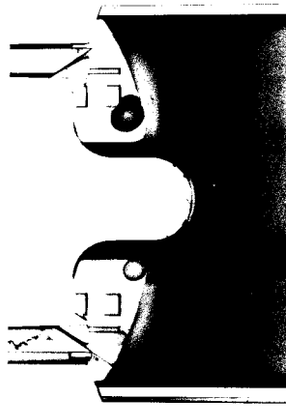
Hoffman a établi une liste de « directions » ou de générateurs de « directions » élémentaires. Il est très clair que la construction de cette liste ne s'obtient pas par l'emploi d'un algorithme abstrait, puisque existe une grande relativité dans le choix d'une base. Cette liste est le résultat de la simple observation, d'une sorte de rétroaction mentale de l'élaboration par le système visuel des formes standard qui apparaissent couramment dans le champ de la vision.

Le dernier paragraphe portant sur ce premier article d'Hoffman sera consacré aux questions soulevées par le choix de la métrique.

On fait d'ordinaire l'hypothèse que la géométrie du monde physique est localement euclidienne, et, en relativité spéciale, que la métrique physique est correctement approchée par la métrique lorentzienne (appelée dans [5] métrique relativiste). Puisque l'esprit opère une simulation du monde externe, il est raisonnable de faire l'hypothèse que l'espace visuel, au niveau d'intégration le plus élevé, est muni d'une métrique proche de la métrique relativiste.

Cette considération *a priori* vient appuyer le choix de la métrique fait par Hoffman. Le raisonnement qu'il tient pour justifier ce choix semble bon, puisque nous sommes obligés de prendre en compte le temps nécessaire à l'élaboration de l'image.

Comme le mouvement est impliqué dans le processus, le rôle du cerveau moteur ne peut pas être éliminé et aurait dû être, pour le moins, rappelé. La corrélation entre le développement de la perception de la forme et l'activité du système moteur mériterait d'être mieux éclaircie (cf. par exemple [10]). Quand le système visuel est en fonctionnement, l'image de l'objet en déplacement doit faire son chemin à travers l'image visuelle stable du paysage. La trace des ondes de chocs qui, dans la physiologie, accompagne la formation de l'image en déplacement, pourrait être comprimée ou dilatée sous l'effet de différents facteurs ; les expériences sur la contraction ou sur la dilatation des longueurs mériteraient d'être finement analysées, et repro-



duites après modification légère de tous les paramètres auxquels nous pouvons penser.

La vitesse est certainement un des paramètres prépondérants. Quand un objet en déplacement apparaît dans le champ visuel, et pas seulement sous l'effet de micronystagmi, les neurones de type Y (et peut-être certains neurones de type X et W) sont excités par la perception du mouvement. Si la vitesse de l'objet est relativement faible, l'excitation pourrait agrandir l'image perçue, alors qu'une excitation trop brève pourrait la réduire. La vitesse de conduction d'*axones transverses* pourrait jouer un rôle de barrière entre les deux différents types de perception des objets en déplacement.

En fait, la valeur de la vitesse limite qui est considérée dans cet espace visuel abstrait dépend de plusieurs paramètres. Cette vitesse limite est théorique, et la vitesse moyenne observée à l'intérieur du cerveau donne une idée seulement de sa valeur. Il ne faut pas oublier que nous sommes en présence d'un *modèle global de l'espace visuomental*, modèle dont il est bien difficile d'évaluer le degré de perfection.

Dans le monde physique, la vitesse limite est très élevée (300 000 km/s). Dans l'espace visuomental, cette vitesse est plutôt faible, approximativement 2 m/s ou 7,2 km/s. Mais, naturellement, ce qui est important est la constance de la durée. Le même laps de temps est nécessaire à une voiture C pour aller de la maison A à la maison B, et au cerveau pour réaliser le changement en position de l'image C' de la voiture. Si celle-ci parcourt les 200 m séparant A de B à la vitesse de 72 km/h, elle aura accompli son trajet en 10 s. Le cerveau devra donc travailler également pendant 10 s pour déplacer l'image C'. Il est naturellement capable d'une telle prouesse. Supposons que la distance somatotopique entre les images A' et B', respectivement de A et B, soit de 5 cm. Si la vitesse limite est de 200 cm/s = 2 m/s, 1/40 s sera au moins nécessaire aux impulsions nerveuses pour se déplacer de A' en B', beaucoup moins par conséquent que les 10 s autorisées. Nous ignorons si des expériences psychophysiologiques ont été conduites afin d'évaluer la vitesse limite : la principale difficulté est sans doute de déterminer la distance nerveuse entre les images somatotopiques A' et B'. Alors pourrait-on calcu-



ler une sorte de coefficient de réduction du monde extérieur au sein de l'espace visuel interne.

Il est douteux que la métrique choisie par Hoffman soit si simple. En premier lieu, cette métrique dépend de l'état neurophysiologique de l'individu, en liaison avec son état neuropsychologique. Chacun, à tout moment, possède une métrique en propre. Les nécessités de la stabilité imposent aux coefficients de la métrique, au moins en première approximation, d'appartenir à des déploiements universels [2], [3]. En second lieu, comme il est facile de le montrer [5], à une transformation logarithmique près induite par la loi de Fechner, la métrique euclidienne est trivialement équivalente à la métrique sensorielle. Puisque la loi de Fechner n'est qu'une approximation de la loi, meilleure, de Stevens, une transformation issue de cette dernière induirait une métrique plus compliquée que la métrique euclidienne adoptée par Hoffman ; mais il se pourrait que cette nouvelle métrique soit plus réaliste.

Un dernier aspect du premier article de Hoffman sera traité maintenant, au cours de l'analyse de la seconde de ses publications.

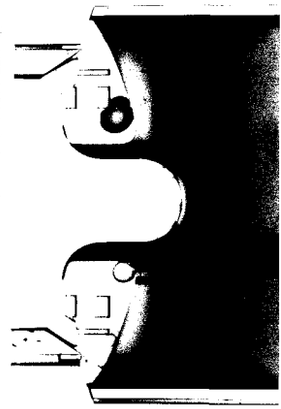
### 7.2.2 Sur le second article d'Hoffman

Cet article traite principalement de problèmes morphologiques. Nous le commenterons assez brièvement.

Tout d'abord, Hoffman tente d'expliciter mieux quelques affirmations déjà énoncées dans le premier article sur la morphologie des neurones du cortex visuel. Il considère des « neurones canoniques » dont la morphologie est, dit-il, cylindrique. On peut se demander si les neuro-anatomistes sont prêts à accepter cette stylisation.

Admettons cette hypothèse. Hoffman considère certains systèmes dynamiques qui pourraient être à l'origine des morphologies corticales observées. Mais quelle est la signification réelle de ces systèmes dynamiques ? D'où proviennent-ils en réalité ? Hoffman ne pose pas le problème.

Soit un objet. Supposons que, par chance, ou plutôt qu'à la faveur d'une approximation grossière, l'action d'un groupe de Lie engendre un ensemble de trajectoires dont la forme générale s'apparente à celle de l'objet donné. Faut-il en déduire que la morphologie de cet objet a été, également, engendrée par l'action de ce même groupe ?



Supposons qu'un sculpteur façonne une pièce de bois afin de reproduire un neurone stellaire. Naturellement, on pourrait établir tous (?) les paramètres physiques déterminant le champ de vecteurs qui engendre la trajectoire de l'outil, puis admettre que ce champ pourrait être étendu sur la totalité de notre espace tridimensionnel, donnant naissance à un groupe de Lie. Mais de nombreuses hypothèses ont été faites, bien des problèmes restent posés, comme, par exemple, celui de dire pourquoi telle trajectoire particulière doit être considérée comme le bord de la pièce de bois.

La théorie d'Hoffman aurait un sens si la constitution du cerveau était homogène, à la manière de la masse plastique d'une matière inorganique. On pourrait, dans certains cas rares, la considérer comme telle, mais il n'en est certainement rien si l'on doit étudier la morphologie des neurones. Il existe d'autres objections, telle par exemple l'interprétation d'une « ligne de points singuliers » comme le correspondant mathématique d'une colonne de neurones ; que le nombre de neurones d'une colonne à l'autre soit quasi constant est certainement dû à des raisons précises, et il aurait été du plus grand intérêt de proposer un modèle mathématique qui traduise ce fait.

Certes, nul ne peut réfuter le fait que la morphologie du cerveau soit le résultat d'une évolution qui puisse être décrite par un modèle dynamique. Mais ce modèle devrait être temporel, incluant toutes les étapes de l'évolution phylogénique et ontogénique.

Toutefois, l'argument d'Hoffman est intéressant et mérite qu'on s'y arrête. Hoffman suppose établi qu'un neurone particulier possède une fonction spécifique, disons, de manière impropre, celle de l'« évaluation d'une constante » – hypothèse qui mériterait d'être à nouveau vérifiée. Selon Hoffman, une telle fonction est en définitive caractérisée par un germe de groupe de Lie. Hoffman observe que la morphologie de la famille des trajectoires est grosso modo la même que celle des neurones. Il en déduit que « les neurones du cortex visuel sont en effet les portraits de phase locaux associés aux dérivées de Lie impliquées dans les mécanismes de constance [9] ».

On peut exprimer ainsi l'idée d'Hoffman : il existe un lien entre la forme et la fonction. Excellente idée, souvent négligée par les savants. Dans le cas présent, la fonction



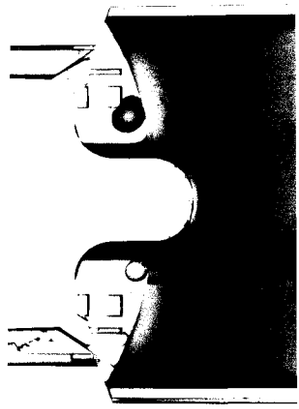
est réalisée par le neurone, i.e., au moyen de la machinerie biochimique contenue dans le périkaryon. Il est difficile de comprendre comment la morphologie externe, plutôt simple d'aspect, peut être une sorte d'image de la morphologie interne, très complexe et presque inconnue, à l'intérieur de laquelle la correspondance entre forme et fonction pourrait être reconnue. Des expériences pourraient en décider.

Quelle que soit l'opinion sur cette partie du travail d'Hoffman, le problème important des liens entre forme et fonction reste posé.

En dernier lieu, Hoffman établit un parallèle entre une représentation graphique de l'identité de Jacobi et la ramification des neurones. Une telle spéculation semble peu fondée.

Le premier argument d'Hoffman est que « l'identité de Jacobi correspond en un certain sens à une condition d'intégrabilité, permettant ainsi une extension allant d'une transformation infinitésimale jusqu'à une *Gestalten* [8] ». Tout savant sait ce qu'est une intégrale ; ce terme possède une définition précise. Mais quand un sociologue parle d'intégration sociale, lorsqu'un économiste évoque une intégration économique, est-il acceptable et facile d'associer à ces processus une opération d'intégration au sens mathématique du terme ? Un neurophysiologiste est-il capable de donner une définition abstraite de cette intégration dont il parle à propos de neurones, plus fréquemment à propos de noyaux ou d'aires cervicales ? Il existe certainement des points communs entre ces différentes acceptions du terme intégration. Mais l'assimilation d'une intégration neuronique à une intégration mathématique, comme celle, élémentaire, suggérée par Hoffman, paraît outrancière.

Supposons, néanmoins, qu'aux extrémités des ramifications des neurones des germes de groupes de Lie puissent être définis (sur quel espace précis agissent-il ?), supposons que nous connaissions bien la signification de ces groupes de Lie, la manière dont ils sont élaborés, dont ils se propagent le long des connexions synaptiques, que la représentation d'Hoffman est réaliste (i.e. les arbres d'Hoffman associés aux identités de Jacobi représentent également les neurones). Deux problèmes peuvent alors être posés : en premier lieu, arranger les arbres représentant les neurones de manière à réaliser un complexe de



neurones abstraits comprenant deux mille neurones, et possédant une signification fonctionnelle ; en second lieu, dessiner l'arbre d'Hoffman correspondant à un neurone muni d'un millier de dendrites, ou bien, étant donné n germes de groupes de Lie et l'identité de Jacobi du n-ième ordre, dessiner le « neurone » correspondant, et désigner un neurone possédant la même structure et les mêmes propriétés. On peut répondre en arguant qu'Hoffman ne parle pas d'identifier un tel arbre avec un neurone. Mais le but et l'usage de cette construction seraient alors mis en question.

### 7.3 Considérations plus générales

**7.3.1** Le travail d'Hoffman, de nature non réductionniste, donne une bonne illustration de l'une des thèses défendues dans le premier paragraphe de ce chapitre : l'intérêt de la géométrie. Hoffman a raisonné géométriquement : il a pu ainsi proposer des considérations dont la plupart sont utiles aux psychophysiologistes, bien qu'elles ne soient pas soutenues par une théorie générale neurophysiologique, mais seulement par quelques observations ponctuelles.

Cependant, lorsqu'il abandonne la géométrie et se lance dans des considérations abstraites, ses spéculations deviennent beaucoup trop générales pour avoir une utilité pratique ; elles sont même, dans certains cas, dénuées de signification.

**7.3.2** Pour cette dernière raison, quelques critiques agressifs rejetteraient Hoffman du meilleur de la communauté scientifique. On suspecterait volontiers ces critiques de manquer de capacités réelles créatives. Tout comme Newton, Maxwell ou Poincaré, tout savant a publié des articles contenant des erreurs, a proposé des théories fausses. Le prix à payer pour parvenir à la bonne théorie est très élevé ; avant d'atteindre le succès, d'innombrables essais et erreurs sont presque nécessaires. Ils sont en effet utiles car ils ferment ou bien ouvrent des voies nouvelles de réflexion, nous obligent à penser. Hoffman, qui fait preuve d'intuition, mérite la reconnaissance de la communauté scientifique pour nous avoir obligés à penser un peu.



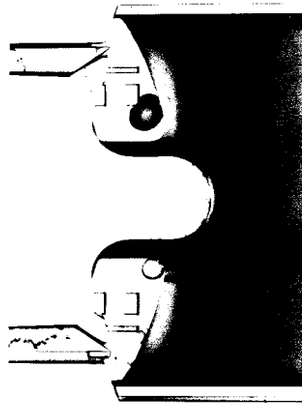
La méthode suivie par Hoffman donne un exemple d'une procédure plutôt générale, trop souvent suivie par les mathématiciens appliqués. Ils ont une sorte d'attitude *a priori* qui pourrait être considérée comme platonicienne si elle était établie solidement sur un arrière-fond philosophique. En un sens assez large, la nature obéirait à des règles mathématiques, appartenant, de préférence, au domaine mathématique dont l'auteur du modèle est spécialiste. Tous les travaux d'Hoffman, les derniers en particulier, reflètent cette tendance d'appliquer des schémas mathématiques sur des phénomènes naturels.

En fait, aucun mathématicien ne désapprouve complètement cette méthode. Nous sommes tous plus ou moins platoniciens. La tradition et le succès des mathématiques viennent à l'appui de cette position. Aucun travail scientifique ne peut être réalisé sans quelques idées *a priori,* ni sans concepts théoriques. Il est naturel que les mathématiciens les puisent dans leurs théories mathématiques.

**7.3.4** Mais, dans chaque cas, il faut montrer que ces concepts, provenant des structures ou des manifestations des entités ou des phénomènes du monde naturel, apparaissent bien fondés, logiques, nécessaires. Poincaré avait raison : la totalité de notre être *élabore* les mathématiques. Il appartient aux physiologistes de montrer comment l'on parvient à cette élaboration.

Puisque parfois, à travers l'activité de notre esprit et de notre cerveau, des structures mathématiques émergent de la réalité naturelle, les modèles mathématiques devraient être le résultat de l'observation et de la compréhension plutôt que le résultat de propositions *a priori.* L'attention doit être attirée sur les bases des modèles, souvent très rudimentaires, alors que les phénomènes présentent des caractéristiques infinies et des causes aussi nombreuses que subtiles. En tout cas, l'absence de toute compréhension physique ne doit pas être masquée par l'idéalisation mathématique de quelques maigres données.

D'un autre côté, il faut noter qu'au moment de la construction d'un modèle la réalité est tronquée à deux niveaux distincts : au niveau de l'observation, par laquelle nous n'obtenons que des aperçus sur les phénomènes réels ; au niveau de la transcription mathématique des faits observés – le langage mathématique est un langage simplifié dans lequel tout ne peut être transcrit.



Pour toutes ces raisons, il importe d'être très prudent au moment de l'examen de modèles et de théories. La complexité de la vie est si riche que, souvent, il est préférable d'avoir un modèle laxiste plutôt qu'une théorie bien formalisée, où abondent propositions merveilleuses, lemmes et corollaires, sans véritable signification, ni sur le plan physique, ni sur le plan mathématique. En fait, les articles correspondants ne touchent ni le mathématicien, ni l'expérimentateur.

**7.3.5** Les modèles fructueux ne peuvent être développés sans que le corps des théories mathématiques se fonde avec la complexité subtile de la réalité. Mais l'appréciation des qualités de la réalité, la compréhension de l'organisation des causes physiques et de leurs conséquences doivent provenir des expérimentateurs qui devraient imaginer des théories et des directions d'explication. Le mathématicien, même s'il ne peut être lui-même un expérimentateur, peut essayer de forcer sa propre imagination, il doit surtout essayer de pénétrer les intuitions des expérimentateurs, et tenter alors de les convertir en termes mathématiques significatifs.

Naturellement, les meilleurs succès peuvent être atteints lorsque le mathématicien professionnel est également un expérimentateur professionnel : qui ne pense au cas de Maxwell, exemplaire [17]. Malheureusement, les difficultés qu'on éprouve à se tenir au courant de sa propre discipline, l'organisation de l'enseignement universitaire – au moins dans le système rigide et intouchable des universités françaises – constituent des obstacles à la réalisation d'une pareille osmose entre le théoricien et le praticien.

**7.3.6** Le progrès dans ce sens serait facilité par un enseignement adéquat des mathématiques dans les lycées et dans les universités.

Les mathématiques sont présentement enseignées par des mathématiciens, pour des mathématiciens, et pour la mathématique.

Cette affirmation est volontairement excessive. Elle n'est pas très diplomatique. Un grand nombre de collègues en seront offensés ; ils en resteront d'autant plus fermes dans leurs convictions. Néanmoins, l'idée pourrait faire son chemin. Nous voudrions suggérer que, dans les cours dispensés à des mathématiciens qui ne visent pas la pure mathématique, bien des preuves soient laissées de côté, que la rigueur se fasse moins oppressive, que des discussions sur les définitions soient ouvertes, des commentaires engagés, et que la signification pratique comme l'usage – et pas seulement en mathématiques – de tous ces concepts, méthodes, résultats soient constamment mis en évidence.



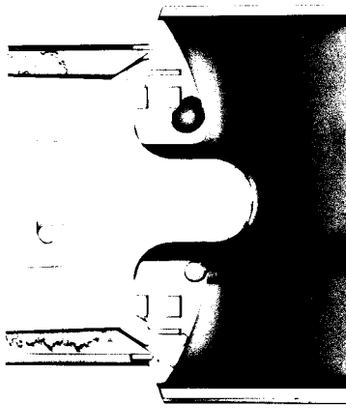
L'article introductif [5] constitue une tentative pour illustrer certaines de ces idées. Un très grand nombre de personnes, même sans connaissance mathématique, se sont révélées capables, au moins au moment des conférences orales, d'en absorber le contenu mathématique. On ne voit pas pourquoi quelques exposés généraux, ouverts sur les mathématiques réellement modernes et pratiquement utiles, ne pourraient pas être faits dans les années du lycée et de l'université.

Un dernier point doit être souligné. L'enseignement abstrait et ordinaire des mathématiques met l'accent sur la notion de groupe. Il apparaît, à la lumière des considérations développées au paragraphe 7.2.1 et plus généralement de la pratique courante, que la *notion de champ de vecteurs prédomine sur celle de groupe*. Par suite, une introduction à cette notion devrait être faite au niveau du lycée et inscrite dans les programmes du secondaire. Cela prendra sans doute du temps, mais, certainement, on finira par enseigner cette notion à tous les niveaux de l'éducation.

**7.3.7** Pour terminer, la question de la nature des modèles sera à nouveau très brièvement évoquée. Nous avons examiné et quelque peu traité ce problème dans les premières pages de [16] – le terme partiellement peut être pris dans deux sens différents. Cette question se pose ici, puisque Hoffman croit apporter des explications à certains phénomènes psychophysiologiques. A notre avis, il n'use que de métaphores.

La différence est grande entre métaphore et explication. Une explication est caractérisée par deux propriétés. En premier lieu, une explication est constructive, en ce sens que la totalité du développement d'un processus peut être suivie pas à pas en fonction de toutes les causes locales présentes, depuis sa naissance jusqu'à sa maturité et sa fin. En second lieu, une explication se rapporte aux parties et à la structure de l'objet lui-même.

Mais si un terme médian est introduit entre le sujet qui parle et l'objet soumis à l'analyse, alors nous obtenons une



métaphore. Dans les meilleurs cas, le moyen terme « se comporte comme » l'objet qu'il remplace. Dans cet ordre d'idées, tout modèle mathématique devient une métaphore.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] C. Blakemore, « Development of Functional Connexions in the Mammalian Visual System », *British Med. Bull.*, 30, 2, 1974, p. 152-156.

[2] C.P. Bruter, *Topologie et perception*, tome 2, Aspects neurophysiologiques, Maloine-Doin, Paris, 1976.

[3] C.P. Bruter, « Perception and Topology », *in* : *Modern Trends in Cybernetics and Systems* (Actes du 3e Congrès du WOGSC), *Lange et Springer*, 1977, vol. 1, p. 557-563.

[4] C.P. Bruter, « La Formule et le Fait », *Bull. du GERB*, 8, 6, 1976, p. 185-200, *Économies et sociétés*, série M, 29, 1977, p. 533-552 ; *Bull. de l'APMEP*, 309, 1977, p. 471-492 (cf. chapitre II).

[5] C.P. Bruter, « Initiation à la géométrie différentielle », *Cahiers de psychologie*, 1977, 20, p. 73-90.

[6] M. Flato, A. Lichnerowicz et D. Sternheimer, *Crochet de Moyal-Vey et quantification*, Comptes Rendus de l'Académie des sciences, 283, 1976, série A, p. 19-24.

[7] W.C. Hoffman, « The Lie Algebra of visual perception », *J. Math. Psychol.*, 3, 1966, p. 65-98. Cf. *Errata, ibid*, 4, 1967, p. 348-349.

[8] W.C. Hoffman, « The Neuron as a Lie Group Germ and a Lie Product », *Quarterly Applied Math.*, 25, 1968, p. 423-440.

[9] W.C. Hoffman, « An informal, historical description of the LTG/NP », *Cahiers de psychologie*, 20, 1977, p. 135-174.

[10] D.H. Hubel et V.C. Drager, « Physiology of Visual Cells in Mouse Colliculus and Correlation with Somatosensory and Auditory Input », *Nature*, 253, 1975, p. 203-204.

[11] J.C. Maxwell, *Treatise on Electricity and Magnetism*, 2 vol., 2e éd., 1892, reprise 1946, Lowe and Brydone, Londres.

[12] H. Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, Flammarion, Paris, 1902-1968.

[13] H. Poincaré, *La Valeur de la science*, Flammarion, Paris, 1905-1970.

[14] H. Poincaré, *Dernières pensées*, Flammarion, Paris, 1913-1963.

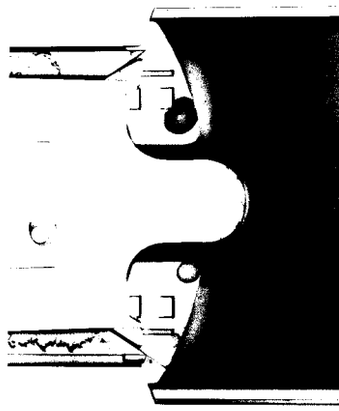
[15] M. Sachs, « A New Theory of Elementary Matter », *Inter J. of Physics*, vol. 4, no 6, 1971, p. 433-476 et 5, 1972, p. 33-53, 161.





[16] R. Thom, *Modèles mathématiques de la morphogenèse*, séminaire IHES, 1970-1971, La Scuola Normale Superiora di Pisa, Lezione Fermiane, 1970, et Union générale d'éditions, 10/18, Paris, 1974 (première édition).

[17] W. Thomson et P.G. Tait, *Treatise on Natural Philosophy*, 2 vol., Cambridge University Press, 1879, 3e éd.

[18] H. Weyl, *Symmetry*, Princeton University Press, Princeton, 1952.

[19] R.L. Wilder, « Robert Lee Moore », *Bull. Am. Math. Soc.*, vol. 83, no 3, 1976, p. 417-427.