ASSOCIATION POUR LA RÉALISATION ET LA GESTION

DU PARC DE PROMENADE ET D'ACTIVITÉS

MATHEMATIQUES

ARPAM

ÉLÉMENTS POUR L'ÉTUDE DE FAISABILITÉ

ARCHITECTURALE ET MUSÉOGRAPHIQUE

Réalisés pour le Ministère de la Recherche (DIST)

C.P.BRUTER

15, Avenue du Vaularon 91 940 GOMETZ-LE-CHATEL
16 (1) 69 07 08 91

PRÉAMBULE

1. Bref historique

A Leeds, en Septembre 1989, organisé par J.P.KAHANE (France) et H. POLLACK (USA), s'est tenu un colloque consacré à la "Popularisation des Mathématiques". D.BLANE de l'Université australienne Monash a fait un exposé où il racontait notamment comment, promenant ses élèves en ville, il profitait de la présence, près d'un centre commercial, d'un pavage au sol réalisé en petits moellons, pour faire évaluer par les enfants une approximation de π. J'eus alors l'idée au cours de l'exposé d'un projet de parc de promenade et d'activités mathématiques, dont j'esquissais rapidement les contours. J'en parlais à J.P.KAHANE qui m'encouragea à développer l'idée.

Je mis dans la confidence du projet un tout petit nombre de mathématiciens, et adressais une première plaquette au Chef de l'Etat, ainsi qu'aux Ministres de l'Education d'une part, de la Recherche d'autre part. De celui-ci, monsieur H.CURIEN, je reçus, datée du 8 Mars 1991, une lettre dont voici l'essentiel:

"Cette idée est séduisante et peut contribuer à réconcilier nos concitoyens jeunes et vieux avec cette discipline en montrant qu'utile et belle, elle peut aussi être distrayante. La qualité des patronages et collaborations que vous avez déjà reçus garantit la réussite scientifique et esthétique de cette entreprise.

Toutefois, son ampleur, son ambition posent de nombreux problèmes tant en ce qui concerne l'investissement que le fonctionnement et une étude approfondie doit effectivement être menée pour juger de sa faisabilité. Le ministère de la recherche et de la technologie, et en son sein la délégation à l'information scientifique et technique et la délégation régionale en Ile-de-France, dont vous avez déjà rencontré de représentants, sont disponibles pour vous aider à cette fin, en particulier pour vous permettre de préciser le contenu scientifique et muséographique."

Mon correspondant au Ministère de la Recherche, monsieur F.RUMPF, physicien, directeur de la Délégation à l'Information Scientifique et Technique (DIST), m'a invité à créer une Association, à rédiger une demande de subvention, et m'a notamment mis en rapport avec la Direction Régionale des Affaires Culturelles (DRAC) de l'Ile-de-France, en la personne de madame J.KRIEN.

L'aide de ces deux services, DIST et DRAC, qu'il faut remercier, a permis d'entreprendre les premières études.

2. Originalité du projet

Ce projet éducatif et esthétique, qui intéresse tous les publics, n'a pas encore d'équivalent connu, c'est une première. Son originalité est sauvegardée sur le continent européen par le dépôt du concept et des plans des bâtiments mathématiques auprès de la SACD (Société des Auteurs et Compositeurs Dramatiques).

3. Du bon (?) usage des subventions

Les fonds ont été utilisés dans le but d'acquérir le soutien au projet.

3.1 *Soutien scientifique*

Le soutien scientifique au projet est évidement acquis. Ce soutien est non seulement national, mais international. Le Conseil d'Administration de l'Association comprend non seulement des mathématiciens français (par ordre alphabétique, J.BRETTE du Palais de la Découverte, J.CERF qui représente les mathématiciens au sein du Comité National d'Evaluation des Universités, D.GUEDJ qui produit également des films scientiques, V.POENARU, qui a démontré la conjecture de Poincaré, L.SCHWARTZ, médaille Fields, mais faut-il le présenter ?); ce conseil comprend également des mathématiciens étrangers connus pour leur activité orientée vers la diffusion et l'enseignement des mathématiques (M.EMMER, italien, bien connu par ses films sur l'art et les mathématiques, M. de GUZMAN, espagnol, Président de l'ICMI (International Commission on Mathematical Instruction), M.NISS, danois, secrétaire de cette commission, I.STEWART, anglais, qui tient la rubrique mathématique dans la célèbre revue "Pour la Science" (version française du Scientific American), J.YU, chinois, responsable du centre sino-français de mathématique de l'Université de Wuhan.

On comprend qu'il sera toujours temps de financer la participation effective de mathématiciens, d'informaticiens, de physiciens à la réalisation d'un projet qui les intéresse intimement. Le premier effort à fournir est de convaincre les participants financiers potentiels à s'engager dans l'opération.

3.2 *Le soutien des intervenants*

Les intervenants financiers potentiels sont au nombre de 4:
- l'Etat, par l'intermédiaire des Ministères de la Recherche (maintenant également de l'Enseignement Supérieur) et de la Culture
- les Collectivités locales (communes)
- les Collectivités régionales (département, région)

- les mécènes (Fondations, Banques et Industries, CEE).

Une remarque importante: le soutien des Collectivités locales et régionales (département au moins) est nécessaire pour que l'Etat poursuive son engangement.

Celui-ci est acquis, sous réserve de la remarque précédente.

Celui des collectivités locales, pour l'instant les communes de Bures-sur-Yvette et de Gometz-le-Chatel, est également acquis. Elles n'ont pas d'argent mais donnent la réserve foncière, environ 22 hectares, ce qui, dans la région parisienne, n'est pas rien. La mairie de Gometz envisage l'affectation d'un bâtiment à l'accueil des scolaires provinciaux qui viendraient visiter la région parisienne (et bien sûr le parc). La mairie de Bures est également active, notamment par l'intermédiaire du directeur de ses services techniques, monsieur H.URIOS, également secrétaire de notre Association.

Le département a, jusqu'à présent, refusé d'octroyer une quelconque subvention. Aucune raison n'a été donnée qui motive le dernier refus. Compte tenu du soutien au projet dont avait fait part, par écrit, le premier vice-président du conseil général de l'Essonne, qui, par ailleurs avait souhaité que soit affinée l'appréciation de la faisabilité et du coût du projet, l'une des raisons vraisemblables qui justifieraient ce refus est la raison financière: le département est fortement endetté.

Face à cette situation de blocage, provisoire sans nul doute, trois types de démarches ont été envisagées:

- une démarche commune avec les maires locaux auprès des différentes instances départementales
- la recherche d'un nouveau lieu géographique d'implantation du parc. Une offre a été renouvelée: celle de réaliser le projet sur le plateau du Moulon, lieu d'implantation de la technopole d'Orsay. Cette offre ne soulève pas l'enthousiasme pour des raisons d'insuffisance esthétique et d'accès par les transports en commun. L'aménagement du parc de Jouy-en-Josas (15 hectares) laissé vacant par le transfert à Paris des expositions de la Fondation Cartier est une possibilité différente qui n'a pas été explorée.
- rejoignant l'avis du directeur de la direction régionale des affaires culturelles de l'Ile-de-France, il est raisonnable de penser que ce projet, convenablement présenté, pourrait rencontrer l'agrément du prochain Président de la République, notamment dans la perspective de l'an 2000, consacrée année mondiale des mathématiques par l'Union Internationale des Mathématiciens.

En définitive, *la nécessité première de présenter aux autorités politiques et aux partenaires financiers potentiels un projet également convaincant sur le plan matériel a imposé de consacrer une part importante du budget à la préparation, par un cabinet spécialisé, d'une étude portant sur les modalités concrètes de réalisation du projet.* Selon le contrat établi, il appartient à ce cabinet de fournir un rapport aussi attrayant que solide, consacré à l'estimation du coût du projet et à l'évaluation de sa faisabilité technique, en même temps qu'une première maquette détaillant l'architecture d'un bâtiment. Ce rapport doit nous parvenir fin Octobre: il sera aussitôt diffusé.

3.3 *Ventilation des dépenses*

La subvention de la DRAC Ile-de-France, d'un montant égal à 85 000 F, a été versée intégralement au début de l'année 92. Elle a d'abord été gelée en grande partie en attendant de recevoir la subvention promise par la DIST, également de 85 000F. Il a fallu attendre l'année 93 pour pouvoir, en pratique, bénéficier de celle-ci, dont la gestion administrative est difficile. Ce n'est qu'à partir du moment où il était assuré que des sommes, provenant de cette subvention, seraient véritablement disponibles, qu'ont pu être lancées, en toute sécurité financière, les études extérieures, leur premier financement étant réalisé sur les fonds provenant de la DRAC.

Des 170 000F reçus au total, 100 000F ont été consacrés au paiement des travaux d'étude réalisés pour nous par le cabinet d'architecture Bravo-Lichnerowicz et par la société Pro-Développement. 40 000F ont été dévolus à l'achat d'outils (outils de secrétariat dont micro-ordinateur, documentation), nécessaires à la préparation des documents attenant au projet. Le reliquat a été affecté au paiement de travaux réalisés par des mathématiciens, et au maintien d'une petite réserve destinée au paiement de travaux ultérieurs.

4. Perspectives

Ce projet commence à être bien connu, de quelques collègues américians très actifs notamment. Pour des raisons évidentes, il serait souhaitable qu'il ne reste plus à dormir dans les cartons.

Si l'on chiffre à 25 millions le coût des infrastructures, dont une vingtaine récupérable à terme, à 60 millions celui de la réalisation de tous les bâtiments, **on aboutit à un coût d'investissement très modeste eu égard à l'intérêt, étendu sur de fort longues années, éducatif, touristique, et donc économique, de ce projet.**

POURQUOI UN PARC
DE PROMENADE ET D'ACTIVITES
MATHEMATIQUES

Une réelle élévation du niveau intellectuel d'une société, objectif noble et utile, s'accompagne de l'élévation de son niveau culturel, facteur d'ouverture de l'esprit.

Une culture authentique est de caractère universel: elle n'est pas seulement artistique ou littéraire, elle est aussi scientifique. Or parmi les sciences, les mathématiques occupent une place très importante, de sorte que donner à tous l'accès à cette forme de culture est indispensable.

Toutes les disciplines doivent concourir à la formation de l'esprit. L'apport des mathématiques dans ce domaine est irremplaçable. Leur enseignement stimule aussi bien les facultés explicatives que l'aptitude à concevoir des synthèses, il excite l'imagination, développe les capacités mentales d'observation, exerce la réflexion.

Cette valeur pédagogique des mathématiques est essentielle. Ce n'est pas là leur seul intérêt. Les mathématiques sont aussi, notamment par leur universalité, un étonnant outil d'intelligibilité du monde. Cet outil est utilisé tant dans les sciences fondamentales que dans leurs applications techniques.

Pour ces motifs d'ordre culturel et éducatif, il importe que chacun puisse bénéficier de l'enrichissement inégalable que peut apporter la connaissance mathématique.

Malheureusement, l'accès aux mathématiques se heurte souvent à des obstacles. Ils peuvent être d'ordre psychologique, affectifs. Ils peuvent être d'ordre intellectuel. Ils peuvent être d'ordre éducatif.

Il en résulte une formation de base parfois insuffisante en ce domaine, nuisible à la qualité du travail, ainsi qu'un déficit important en enseignants très qualifiés dans cette discipline.

Toutes ces raisons militent en faveur de la création d'un Parc de Promenade et d'Activités Mathématiques.

Le premier but recherché par la création du parc est l'abaissement des barrières psychologiques qui finissent par détourner certains de s'adonner à l'étude des mathématiques. On entend parvenir au résultat recherché par l'emploi des qualités esthétiques que possèdent les objets mathématiques, et qui exaltent le sentiment de beauté que chacun porte en soi.

La simple vue de ces objets, certaines de leurs propriétés peuvent susciter l'admiration, l'étonnement et la curiosité, aiguillons qui peuvent pousser le visiteur à accomplir un effort pour comprendre la signification de ce qu'on lui a montré, pour essayer d'aller plus loin dans la connaissance des thèmes qui lui ont été proposés.

Pas davantage que dans la contemplation de l'Arc de Triomphe du Carrousel ou de l'obélisque de la Concorde et de la perspective élyséenne, absolument aucune connaissance n'est requise pour profiter de l'esthétique des bâtiments et des espaces verts, de leurs formes, leurs lumières, leurs couleurs.

Tous les publics, de tous âges, pourront bénéficier des qualités de ce lieu, s'émerveiller des originalités et des beautés des objets. Ils pourront aussi, sans effort, prendre contact avec certains éléments de base des mathématiques, s'instruire de leur signification, et pénétrer dans le monde très riche des mathématiques classiques et contemporaines.

Haut de lieu de tourisme, actuellement unique dans sa conception, ce parc de contemplation et de méditation sera aussi un parc d'initiation qui contribuera à l'épanouissement de l'être.

C.P.BRUTER

Que soient remerciés ici tous les amis et collègues dont on rencontrera les noms au fil des pages de ce document, qui croient en la pertinence de ce projet, et m'ont assuré de leur soutien, de leur concours

ÉLÉMENTS POUR L'ÉTUDE

DE

FAISABILITÉ ARCHITECTURALE

ET

MUSEOGRAPHIQUE

1. GENERALITES

1.1 Principe

Le visiteur du parc pourra pénétrer à l’intérieur de bâtiments de petite taille ou folies: leur dimension, 60 m^2 au sol, 10 m de haut environ, leur permet d'être discrètement inserés à l'intérieur d'un vaste domaine boisé, sans nuire à la qualité présente du paysage. Le visiteur pourra également aller s’as-soier sur les gradins d’un amphithéâtre.

Chaque folie sera consacrée à un thème mathématique plus ou moins large. Ce thème sera illustré:

- par tous les éléments architecturaux du bâtiment
- par l'ordonnancement des espaces verts
- par des réalisations physiques ou sur écran d’ordinateur, situées à l’intérieur ou parfois même à l’extérieur du bâtiment.
- par des jeux de fiches disponibles auprès de chaque bâtiment et classées par niveau: grand public, étudiants.

L’un des objectifs est d’initier, par ces biais, le public à des concepts et des faits mathématiques visibles et immédiatement accessibles.

1.2 Description sommaire du Parc

1.2.1 Les conditions physiques de faisabilité et de succès

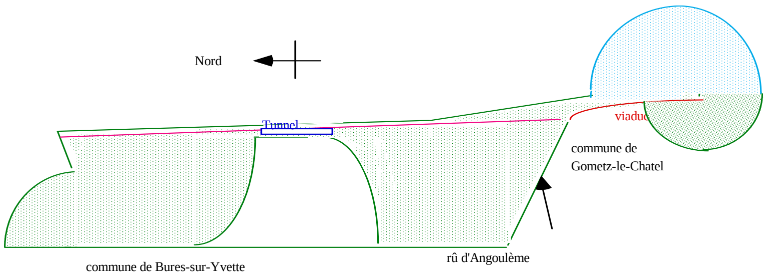
Pour réaliser un parc de ce genre avec quelque chance de succès, il est nécessaire de pouvoir disposer d'un domaine de dimension suffisante, bien situé, accessible tant par les transports en commun que par la route, doté des meilleures atouts d'exposition: au problème près, tout à fait résoluble, posé par les questions de stationnement des voitures, *le site bénéficie de tous les avantages exigés pour sa réalisation.*

1.2.2 Implantation

Le parc se situe dans la Vallée de Chevreuse, à proximité de l'Université scientifique d'Orsay, dans le prolongement de l'IHES (Insitut des Hautes Etudes scientifiques, lieu privilégié qui accueille, pour quelques mois, les meilleurs mathématiciens et physiciens théoriciens de la scène internationale). Le parc occupera les parties boisées des Communes de Bures-sur-Yvette et de Gometz-le-Chatel.

Le domaine mis à notre disposition par ces Communes couvre environ 22 hectares. Il est exceptionnel aujourd'hui, dans la région parisienne, de pouvoir disposer d'une telle étendue. L'ancienne voie de chemin de fer Paris-Chartres constitue la ligne de crête du domaine, et domine, dans la direction du sud-ouest, la vallée: l'exposition du domaine est magnifique.

De surcroît, le domaine comprend un tunnel très vaste, de 80 mètres de long environ, et un viaduc cintré d'une rare élégance: ces deux ouvrages réalisés en meulière sont de réelles oeuvres d'art qui seront maintenues en l'état.



Le rû d'Angoulême sépare, à l'intérieur du domaine, les communes de Bures et de Gometz. Un bassin de retenue des eaux est situé sur le tracé du rû, convenablement aménagé, apportera un élément esthétique et de repos supplémentaire.

1.2.3 Accès

L'accès au domaine par les transports en commun est presque immédiat: la station de Bures-sur-Yvette, située sur la ligne B du RER, est donc directement reliée à Roissy, la gare du Nord, et, par un seul changement, à l'Etoile comme à Orly. L'accès principal au parc serait alors situé à 400 m environ de la gare de Bures. Pour les personnes âgées, trop jeunes, ou pressées, une petite navette fera la liaison entre la gare et l'entrée au parc.

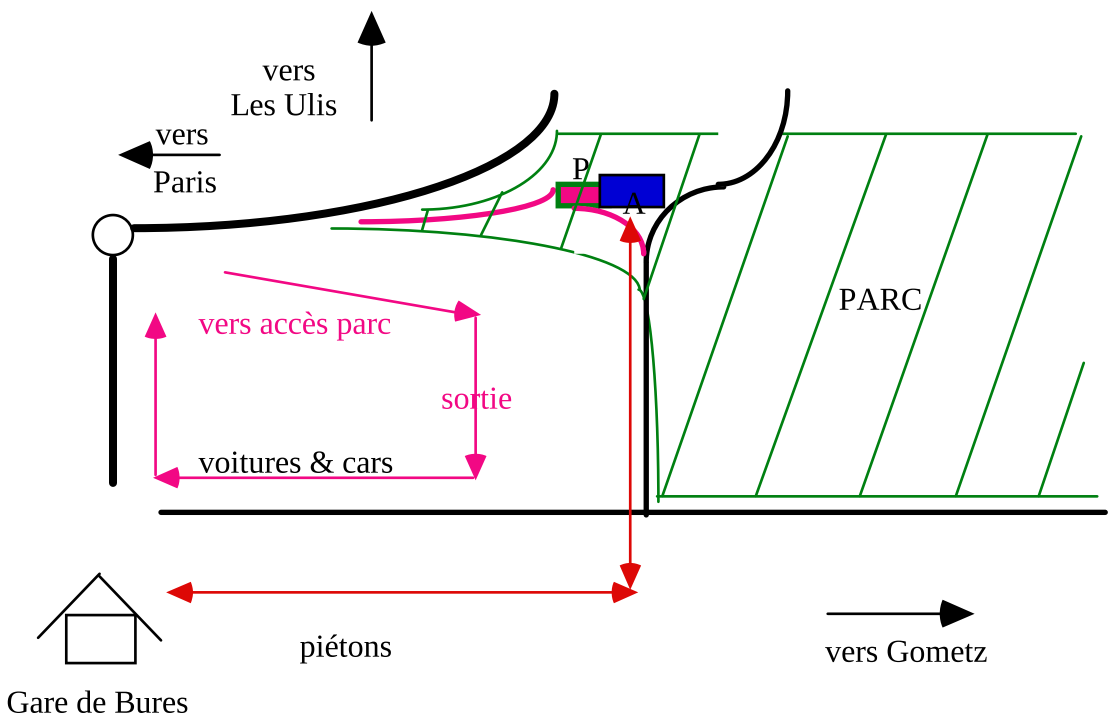
L'accès routier pose un problème: les places de stationnement existant autour de la gare de Bures, de l'ordre de 150 , ne sont disponibles, en pratique et actuellement, que le week-end: presque totalement le dimanche, pour moitié le samedi.

Cette situation est très insatisfaisante, si l'on songe que des scolaires pourront venir dans la semaine, notamment le mercredi, que l'on peut tabler sur une population de 150 000 visiteurs par an.

Il faut donc prévoir dès le départ la création d'emplacements supplémentaires de stationnement de manière:

i) à ne pas surcharger davantage la circulation urbaine de Bures,
ii) à ne pas nuire à la tranquillité des riverains
iii) à ne pas défigurer le paysage.

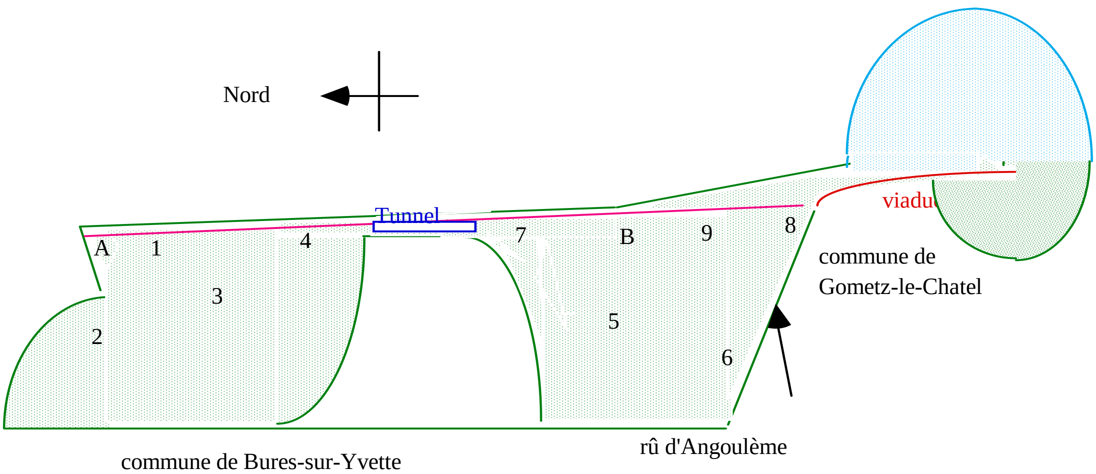
La solution qui s'impose d'elle-même consiste à prévoir, le long de la voie qui mène de Paris vers les Ulis, la création d'une bretelle de sortie sur une longueur de 110 m environ, permettant l'accès à un parking enterré, lui-même débouchant, par la création d'un élément de voirie (40 m environ), sur une route existante menant aux Ulis et longeant le domaine.



Légende: P: parking à créer
A: bâtiment d'accès (Le temple mystérieux)
noir: voies existantes
rouge: voies à créer (150m environ)
vert: domaine du parc

Cette solution présente l'inconvénient d'être coûteuse sur le moment, de l'ordre de 20 millions de Francs, mais il ne faut pas oublier que nous sommes dans une région semi-urbaine, et qu'un grand nombre de lieux touristiques parisiens sont équipés de parkings souterrains - par exemple Notre-Dame ou la Cité Scientifique de la Villette. *On notera par ailleurs que ce parking étant payant, d'une part son amortissement sera rapide, d'autre part l'accès au parc par le transport public sera encouragé.*

L'ancienne voie de chemin de fer qui parcourt le domaine dans sa partie la plus haute pourra servir non seulement de tracé pour l'arrivée des fluides (eau, électricité) qui seront desservis dans les bâtiments, mais aussi de trajet d'un train miniature dont les wagonnets auront des formes originales, et qui reliera Gometz-le-Chatel au bâtiment principal d'accès. Ce moyen de transport desservira les "gares" 1, 4, 7, 9, 10. De ces gares, les visiteurs pourront se rendre aux différentes folies. La présence d'un tel moyen de transport est une nécessité: la distance entre les points 1 et 10 est de l'ordre de 800 m.



Légende: A: temple mystérieux (accès) B: amphithéâtre Bourbaki

1 (coiffe d'Apollonius) 2 (corne d'abondance) 3 (maison du nombre) 4 (observatoire de Gauss) 5 (parapluie de Whitney) 6 (pont d'Euler) 7 (septième temple) 8 (vitrail noué) 9 (surprises de Poincaré) 10 (tore lumineux)

1.2.4 Organisation du parc

Le parc comprend des bâtiments collectifs (nommés plus tard A et B), les ouvrages d'art existant actuellement (tunnel, viaduc), les bâtiments mathématiques ou folies, le domaine boisé.

Les folies sont réparties en deux groupes. Le premier comprend les folies 1, 2, 3, 4, destinées à illustrer les mathématiques classiques, et mises en forme jusqu'au début du 19ème siècle. Les autres folies sont consacrées aux mathématiques développées aux 19 et 20èmes siècles.

Ainsi, l'itinéraire que suit le promeneur lui permet de faire un parcours historique à travers les thèmes majeurs des mathématiques. Les dernières folies, consacrées aux théories topologique et à la dynamique, permettront de faire valoir la beauté et le grand intérêt des théories modernes en développement.

2. LES FOLIES: LEUR THÉMATIQUE

2.A Le temple inachevé

Porteur de quelques devises célèbres sur la géométrie et le nombre, ce bâtiment, ayant la forme d'un temple égyptien inachevé, inachevé est l'édifice mathématique, ce bâtiment donc aura une vocation administrative.

Le hall d'entrée pourra servir de salle d'exposition de livres et de cassettes de mathématiques, et sur les mathématiques.

Le sous-sol pourra éventuellement être aménagé en bibliothèque consacrée aux rapports entre art et mathématique, à la pédagogie audio-visuelle des mathématiques.

Les visiteurs pourront s'y procurer des cartes magnétiques permettant:

- l'accès aux folies
- l'achat de fiches techniques
- l'achat de boissons.

2.B L'amphithéâtre Bourbaki

L'amphithéâtre, par son architecture, rappellera celui de Delphes. Selon la saison, le temps du jour, l'amphithéâtre pourra être ouvert au ciel, ou non.

Il pourra servir:

- de lieu d'exposition
- de lieu d'expression théâtrale et musicale
- de lieu de séminaires.

2.1 La coiffe d'Apollonius

Cette folie est dévolue aux géométries classiques, celle d'Euclide, celle de Desargues encore appelée géométrie projective.

Ces géométries classiques ont servi d'outil premier dans la description physique du monde (optique et forme des objets, trajectoires d'objets de toute sorte), dans la fabrication des édifices et d'instruments.

Ces géométries peuvent être pratiquées dès l'adolescence, et leur valeur pédagogique est inestimable. La démonstration géométrique fait appel aux relations de causalité qui lient les faits mathématiques; elle exerce l'esprit à la recherche des causes et à la découverte de leurs enchaînements. La démonstration géométrique classique, en général assez courte et par là accessible, est une invite à la compréhension exacte des phénomènes, en même temps qu'un outil puissant de formation à la rationalité.

On verra apparaître sur le bâtiment les figures géométriques classiques. Des faisceaux lumineux mobiles éclairant les configurations géométriques de base permettront de visualiser quelques théorèmes fondamentaux.

Des logiciels reprendront les faits optiques et géométriques précédents et développeront les propriétés des coniques.

2.2 La corne d'abondance

Ce bâtiment est consacré à cette branche des mathématiques appelée l'analyse classique.

On y traite notamment de problèmes de devenir de populations, d'objets en évolution, de calculs d'énergie à travers les calculs de volumes.

On y rencontre, à travers la notion de limite, celle d'approximation, celle de convergence: existe-il une limite?

Les limites fixent l'étendue des domaines connus. Qu'advient-il lorsqu'on franchit ces limites? L'objet limite est parfois un objet nouveau! Existe-t-il une commune mesure entre les propriétés des objets en évolution et celle des objets limites?

Les concepts véhiculés par l'analyse mathématique sont trop nombreux pour pouvoir être illustrés dans leur totalité. La forme extérieure du bâtiment permet de saisir la notion d'approximation (notamment d'une fonction continue par une fonction en escalier). On voit mieux la notion de convergence en se plaçant à l'intérieur du bâtiment, bâti autour du nombre d'or qui caractérise la première suite de nombres historiquement créée, celle de Fibonacci, décrivant l'évolution d'une population de lapins.

La décoration murale montre les propriétés récurrentes de certaines suites, leurs ensembles limites: on y rencontre les morphologies fractales, celles de trajectoires limites.

Objets et logiciels illustreront des phénomènes de convergence de suites d'objets mathématiques divers.

2.3 La maison du nombre ou l'hôtel de Fermat

Consacré à la théorie des nombres, la forme du bâtiment est établie d'après les propriétés de quelques nombres célèbres tels que e et pi (π). L'extérieur du bâtiment est éclatant alors que son intérieur est sombre: on symbolise par là le fait que le monde numérique est encore plein de mystères.

Les lignes tracées à l'intérieur du bâtiment portent des chiffres donnant les valeurs des nombres précédents, ou illustrant des théorèmes et des conjectures renommées.

Une série de logiciels est envisagée, qui exposent les modes de construction des nombres, certaines de leurs représentations (par exemple sous forme de fractions continues) ou de leurs utilisations, notamment pour le codage des messages.

2.4 L'observatoire de Gauss

On entend illustrer à l'aide de cette folie des concepts et résultats que l'on rencontre en géométrie différentielle, dont l'un des buts est de fournir des outils pour représenter et étudier les formes des objets dans l'espace usuel notamment.

Deux notions simples jouent un rôle majeur en géométrie différentielle: celle de courbure des formes d'une part, celle de métrique de l'espace d'autre part. Après la mise au point de ces notions sur le plan mathématique, les grandes théories physiques, par exemple celle de la relativité, ont pu être élaborées.

Le bâtiment se compose d'un socle dont la surface est un objet mathématique appelé surface minimale. Ce socle supporte un tronc cylindrique porteur d'un dôme auquel on accède par un escalier hélicoïdal. Le dôme est sphérique, partiellement transparent. Cette partie transparente peut être partiellement occultée par un écran formé d'un portion d'un plan tangent à la sphère, et supposé mobile. De l'intérieur, un faisceau lumineux, également mobile et qu'on peut rendre de forme convenable par des caches et des miroirs de forme adaptée, découpe sur l'écran des coniques.

On se servira de la partie opaque de la coupole pour illustrer la courbure gaussienne.

Les animations porteront sur les déformations de quadriques, la géométrie sphérique, les films liquides et les surfaces minimales.

2.5 Le parapluie de Whitney

Deux familles de géomètres peuvent revendiquer à bon droit la possession de ce bâtiment: les géomètres algébristes, les analystes différentiels. Les mêmes questions les préoccupent souvent.

L'existence de ce "parapluie", sa structure, sont en rapport avec quatre concepts fondamentaux: ceux de singularité, de stabilité, de bifurcation, de stratification. Les animations illustreront ces concepts.

2.6 Le pont Leonhard Euler

La topologie est issue de l’étude des propriétés des figures indépendamment de leur taille, de leurs propriétés métriques. Elle étudie donc des contraintes de forme incontournables, elle est devenue de ce fait un outil indispensable pour l’étude de certaines réalisations techniques, d’arrangements moléculaires, dans la mise en place des conceptions de la physique fondamentale.

Le résultat de L.Euler sur l’impossibilité de réaliser un parcours fermé qui n’emprunterait qu’une seule fois chacun des ponts de la ville de Königsberg constitue l’un des premiers énoncés de topologie, permettant d’illustrer l’une des notions de base de cette branche des mathématiques, la notion de connexité.

L’aménagement d’un petit plan d’eau et de sept ponts nécessaires à la présentation miniaturisée du problème de Königsberg est rendue possible par la présence sur le site d’un bassin de très grande dimension, où viennent actuellement se nicher des canards sauvages.

Le promeneur pourra s’asseoir sur des bancs, y lire les quelques dépliants qu’il pourra se procurer dans l’une des guérites posées dans l’une des îles, profiter du cadre de verdure, admirer la pureté de forme de certains objets placés sur les garde-corps des ponts, sphères, tores à un ou plusieurs trous permettant d’illustrer la notion de caractéristique d’Euler.

2.7 Le septième temple

La théorie des groupes joue un rôle très important tant en physique qu’en mathématiques.

L’objectif pédagogique lié à ce bâtiment est de faire connaître l’existence de cette notion de groupe, de commencer à familiariser le public avec cette notion, notamment à travers deux exemples de résolution du problème de très grande importance physique: comment la Nature remplit-elle l’espace ?

Le visiteur découvrira sur les murs mêmes du bâtiment des solutions au problème posé.

Les motifs que la Nature emploie pour combler l’espace sont parfois assimilables à des polyèdres, dans la description desquels la théorie des groupes joue un rôle majeur. On rencontrera de tels polyèdres soit sur la surface hyperbolique formant la voûte intérieure du bâtiment, soit sur la frise supérieure des murs extérieurs.

Deux polyèdres, l’un convexe, l’autre étoilé, mobiles autour d’un de leurs axes de symétrie au moins, seront bâtis à l’extérieur du bâtiment. Ils pourront servir de manège, le premier intérieur, le second extérieur, pour les petits enfants.

Une série de logiciels est en préparation, qui exposent les symétries fondamentales et leur agencement en groupes, les modes de pavage rectilignes ou “frises”, les modes de pavage de domaines plans, les constructions de certains polyèdres, certains groupes de mouvement à trajectoires fermées ou groupes d’homotopie.

2.8 Le vitrail noué

Cette folie, où le verre, teinté ou non, parfois à indice variable, est omniprésent, est consacrée à la topologie différentielle, c'est-à-dire à l'étude des formes, indépendamment de métriques éventuellement sur-ajoutées.

Les mondes physique et surtout biologique offrent de mutiples exemples de structures présentant des formes nouées et enlacées qui sont prédominantes dans l'architecture du bâtiment.

Des animations lumineuses dirigées sur la structure du bâtiment permettront d'illustrer le mode de construction de certaines de ces formes. D'autres opérations topologiques seront visibles sur les films.

2.9 Les surprises de Poincaré

Le rôle joué par le mouvement, l'évolution dans le développement des mathématiques est immense. L'intérieur du bâtiment, les films, seront consacrés en grande partie à l'illustration de cette thèse.

2.10 Le tore lumineux

3. LES OUVRAGES D'ART

Le viaduc est et restera utilisé par les amateurs d'escalade qui, en particulier en fin de semaine, viennent s'entraîner. Si jamais le parc venait à être clos, ces amateurs, déjà regroupés au sein d'une Association dont le siège est à Gometz, bénéficieraient d'un accès gratuit au parc. Il en serait de même des habitants des communes de Bures et de Gometz.

Le tunnel pourrait abriter des services communs: centre de télésurveillance, sanitaires, salle de soins, cabines téléphoniques.

4. LES BOIS, LE PAYSAGE

Le bois actuel comprend quelques chênes, principalement des châtaigniers encore très jeunes et souvent en taillis. Il sera donc nécessaire de revoir la composition végétale de ce bois, et de l'aménager en fonction des objectifs mathématiques recherchés.

Il est notamment prévu la réalisation d'éléments de jardins:

A. le jardin des symétries, près du septième temple
B. le parc projectif, près de la coiffe d'Apollonius
C. la clairière phyllotaxique, près de la corne d'abondance
D. la forêt nouée, près du vitrail noué
E. les jardins eulériens, près du pont d'Euler.

5. LE PERSONNEL

L'entretien du parc pourrait nécessiter en permanence la présence de deux personnes.

La surveillance des bâtiments à travers un centre de télésurveillance pourrait nécessiter également la présence de deux personnes.

L'accueil des visiteurs pourrait nécessiter la présence de trois guichetier(e)s.

La réception et la vente d'objets pourrait également mobiliser trois personnes en permanence.

La gestion du parc pourrait nécessiter la présence d'une secrétaire et d'un gestionnaire.

Un responsable général de l'établissement est évidemment également nécessaire.

Des étudiants en thèse payés sur vacation, des étudiants en cours de service militaire, pourraient être formés pour servir en quelque sorte de tuteurs aux visiteurs de chaque folie. Il faudrait en permanence une équipe de deux tuteurs par folie, par exemple l'un viendrait le matin, l'autre l'après-midi.

Un mathématicien devrait également être présent pour assurer la formation des tuteurs et les assister en cas de besoin.

Une équipe de concepteurs et de réalisateurs de logiciels mathématiques pourrait être implantée sur les site (dans le bâtiment A: la conception de ce bâtiment devrait alors en tenir compte).

Le présent document ne concerne que les sept premières folies, l'ordre de présentation est l'inverse de l'ordre naturel.

LE SEPTIEME TEMPLE

Il existe une Harmonie des tensions opposées comme celle de l'Arc et de la Lyre Héraclite

Art, science, philosophie : voix mêlées de la Connaissance. Ainsi, selon l'intuition des penseurs grecs, le monde est composé de forces, les objets n'existent que par l'équilibre interne de ces forces qui les modèlent, et lorsque, au fil des ans, s'estompe la mémoire du chaos originel, se dissipe la violence des premières luttes, la quiétude apparaît, alors l'homme, mesure de toutes choses, éprouve secrètement le sentiment du Beau, et, frappé par l'harmonie des réalisations naturelles, laisse éclater sa joie.

La raison qui classifie a depuis longtemps entrepris de dresser l'inventaire des forces qui apparaissent dans les *situations équilibrées, caractérisées par la présence de symétries.*

Cette même raison qui légifère s'est aussi attachée à établir des règles présidant à la génération de ces formes.

Se fondant sur la notion de transformations obéissant à une loi fondamentale de conservation des symétries internes, la pensée a élaboré une théorie abstraite très puissante, celle des groupes.

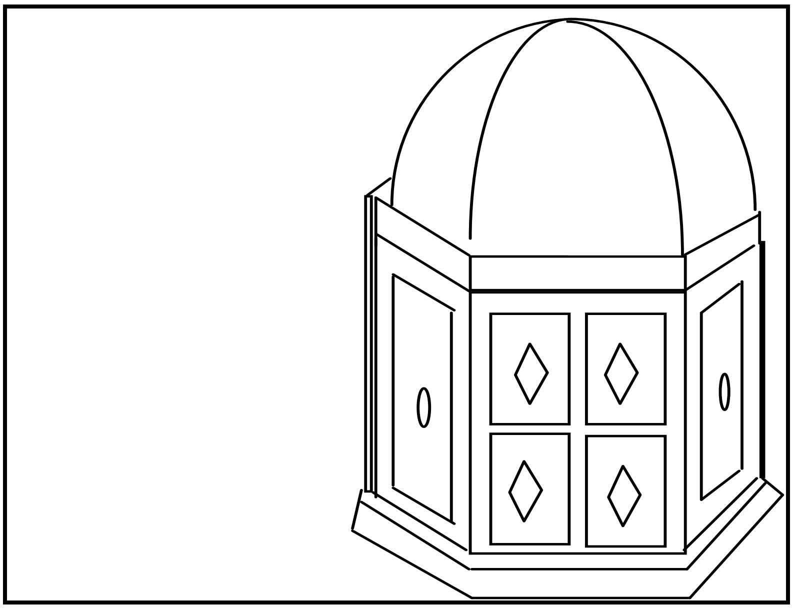
Equilibre via *la symétrie*, *groupe*, tels sont les concepts auxquels ce bâtiment est consacré. Ils permettent par exemple de répondre parfois à l'une des questions fondamentales: *comment la Nature remplit-elle l'espace ?*

Ces concepts sont à la racine de notre description et de notre intelligence du monde physique.

CPB

SEPTIEME TEMPLE

DESCRIPTIF ARCHITECTURAL



1. Les éléments décoratifs

Ce bâtiment a 17 faces extérieures: 17 est le nombre d'éléments du groupe de pavage du plan euclidien, et chaque face illustrera un mode de pavage: quatre d'entre elles seront en vitrail.

Une colonne torsadée pourra séparer deux faces extérieures consé-cutives: la torsade illustrera un élément du groupe des tresses à 17 brins.

Les 17 panneaux formant la frise supérieure seront ornés de poly-èdres de Coxeter.

La toiture est constituée par une coupole extérieure, une section de l'hyperboloïde à deux nappes sur laquelle est reproduite le pavage hyperbolique de Klein.

Intérieurement, le bâtiment a 7 faces: 7 est le nombre d'éléments du groupe de réalisation des frises, et chaque face illustrera l'un des éléments du groupe.

Le sol est tapissé par le pavage hyperbolique de Klein: l'heptagone central est évidé, et, selon la suggestion de J.Brette, porte un miroir en lequel se reflète le plafond. Celui-ci est le symétrique de la coupole extérieure par rapport au plan horizontal; le pavage de Klein qu'il porte est alors un vitrail éclairé par un système lumineux placé entre le plafond et la toiture. Le miroir indiqué plus haut sera un miroir sans tain éclairé par une source lumineuse, située en point symétrique par rapport au sol du point le plus bas du plafond, son centre. On illustrera ainsi concrètement l'obtention du pavage de Klein placé au sol comme projection stéréographique du pavage de Klein réalisé sur l'hyperboloïde.

2. Descriptif technique

Ce descriptif laisse peu de libertés aux services techniques chargés d'en parfaire la définition.

Les colonnes seront fabriquées en résine par une entreprise compétente.

La frise extérieure ornée de polyèdres, également fabriqués en résine, et dont la définition fait l'objet d'un chapitre particulier.

Les 17 faces du mur extérieur porteront chacune la réalisation fixe d'un mode de pavage du plan.

Les 7 faces du mur intérieur porteront chacune un panneau mobile montrant la réalisation d'un type de frise. On fabriquera ainsi une collection de frises par époque et civilisation.

Le toit de la coupole extérieure reproduira sur sa face visible un pavage hyperbolique de Klein. La coupole intérieure, symétrique de la précédente par rapport à un plan horizontal, et dont la définition fait l'objet d'un chapitre particulier, sera réalisée à la manière d'un vitrail.

R cercle exinscrit au mur extérieur 5 m
1 côté extérieur 1,837m
épaisseur mur extérieur 30

17 colonnes tressées (tresse de 1 à 17)
diamètre de la base du fût 40, du faîte du fût 30
diamètre base du stylobate 60, hauteur 50
hauteur fût 4,5 m
hauteur couronnement 30
déport entablement 25
hauteur entablement-frise 60

hauteur soubassement 85 = 7 marches de 15

panneau décoratif 130 x 250 à 125 de la base du stylobate
2 portes 140 x 250, cadre à 40, médaillon 120 x 60

mur intérieur d’épaisseur 20
1 extérieure de ce mur 4, 72 m
hauteur mur vertical 5, 7 m

panneau décoratif 185 x 300 à 80 du haut du mur
entrée 1 x h = 250 x 215
4 portes 80 x 180 pour écran-clavier d'ordinateur
heptagone sol à 40 du mur
rayon du cercle exinscrit à cet heptagone 4 m
rayon du cercle inscrit 3, 6 m
rayon du cercle exinscrit à l'heptagone central 90

coupole F. Klein se projetant stéréographiquement sur le disque plan bordé par le cercle inscrit à l'heptagone: cette coupole doit être normalement un tronc supérieur de la nappe inférieure d'un hyperboloïde à deux nappes, d'équation

$$z^2 - x^2 - y^2 = R^2.$$

Le calcul ci-dessous a été fait en prenant une approximation sphérique de la coupole, suffisant pour la réalisation de la maquette:

rayon de la sphère 4,2 m
base de la coupole 3,6 m
hauteur 2 m
longueur de l'arc sphérique 8, 6 m

La vraie coupole, hyperbolique, de hauteur encore 2m et de base toujours 3,6m, a pour rayon R = 4,48 m.
Sera présentée à l'extérieur la partie Sud, inférieure, de l'hyperboloïde. La partie symétrique Nord sera présentée à l'intérieur.

L'heptagone central sera creusé jusqu'à - 4,48 m où sera implantée une source lumineuse, de manière à créer un miroir sur lequel, par réflexion, on pourra voir la coupole intérieure.

Le descriptif exact de la coupole et du vitrail sera établi en liaison avec le constructeur. Les indications théoriques suivantes seront utiles: les arcs du vitrail situés sur l'hyperboloïde S sont à l'intersection de celui-ci avec des plans passant par l'origine et d'équation générique $a x + b y + c z = 0$.
Par projection stéréographique de pôle sud sur le plan horizontal (u,v) passant par l'origine, ces intersections deviennent des cercles d'équation

$$(u + r)^2 + (v + s)^2 = r^2 + s^2 - R^2$$

où $r = a R/c$, $s = b R/c$. Ces cercles sont orthogonaux au cercle C qui borde le domaine intérieur D de la projection stéréographique.

D étant muni de la métrique de Poincaré

$$- ds^2 = 4 R^4(du^2 + dv^2)/(u^2 + v^2 - R^2)^2$$

la longueur hyperbolique de OP_o, où P_o de coordonnées (u,0) est l'image d'un point M_o de S supposé situé dans un plan vertical $y = 0$, a pour valeur

$$d = R\mathrm{Log}\,((R + u)/(R - u)).$$

Cette longueur d est aussi la longueur euclidienne de l'arc OM_o tracé sur S.

De manière générale, le point P (u,v) est l'image du point M (x,y,z) où $x = 2R^2u/(R^2 - u^2 - v^2)$; y a la même expression que précédemment où l'on remplace u par v; $z = x/u - R$.

La courbure de l'arc d'hyperbole $z^2 - x^2 = R^2$ au point (z,x) a pour valeur $k(z,x) = R^2/(x^2 + z^2)^{3/2}$.

C.P.BRUTER

LE PONT DE LEONHARD EULER

C’est à LEIBNIZ (1646-1716), introduisant l’expression de “géométrie de situation”, que l’on doit la première suggestion d’un dépassement de la géométrie classique.

Il a fallu atteindre le 19e siècle pour que les mathématiciens parviennent à une notion claire de la topologie, aujourd’hui subdivisée en plusieurs chapitres (topologie générale, combinatoire, algébrique, différentielle, dynamique).

La topologie établit des propriétés des figures indépendamment de leur taille, de leurs dimensions métriques. Située en arrière-plan de la géométrie, elle établit la liste des contraintes intrinsèques qui interdisent ou permettent la réalisation de figures et configurations, l’existence de solutions à des problèmes très variés.

Alors que la topologie commençait à se chercher, L.EULER (1707-1783) donna deux exemples de propriétés qui s’avérèrent être des propriétés de nature topologique:

Le premier (1750), entrevu un siècle auparavant par DESCARTES (1596-1650), ressort de la topologie combinatoire et algébrique: étant donné un polyèdre $\mathbb{P}$, qui a la forme d’une boule, les nombres F de ses faces, A de ses arêtes, S de sommets sont liés par la relation:

$$\chi(\mathbb{P}) = F - A + S = 2.$$

Cette relation est tout à fait indépendante de la forme exacte du polyèdre, de sa taille. $\chi(\mathbb{P})$ est un *invariant topologique* des formes.

Le second exemple (1736) trouve son illustration en ce lieu: parviendriez-vous, quittant ce banc où vous me lisez, à traverser le “fleuve” en passant, obligatoirement, par chacun des sept ponts une seule fois ? Euler a démontré l’impossibilité de toute tentative.

C’est LISTING (1808-1882), l’inventeur du terme *topologie*, qui a reconnu le caractère ... topologique du résultat de Euler, lié au concept de *connexité.*

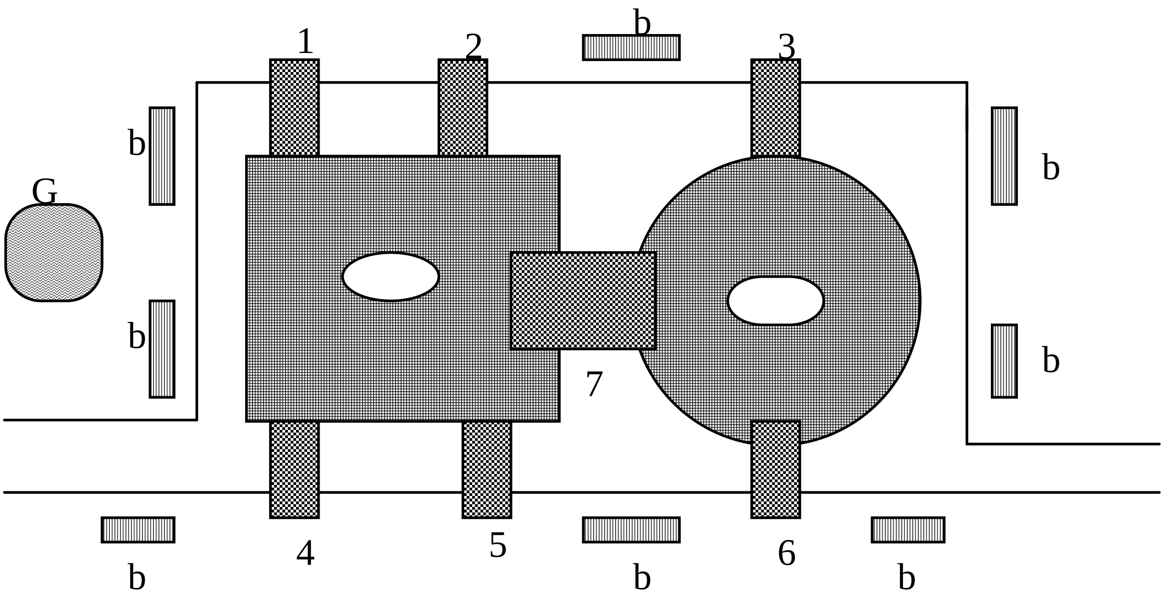
La topologie, surtout différentielle, s’attache à la classification des formes (par opposition à figures qui sont des formes dimensionnées), et à la découverte de leurs propriétés *invariantes par petites déformations*. Elle fait l’objet des travaux de mathématiciens à tournure d’esprit géométrique. Son rôle, en mathématiques et en physique, est fondamental.

CPB

LE PONT D’EULER

INDICATIONS POUR LA RÉALISATION

Les restes d’un bassin régularisent encore le débit du rû qui sépare les communes de Bures et de Gometz. L’étendue plane est de taille largement suffisante pour pouvoir être aménagée selon le plan très approximatif suivant:



Légende:
b désigne un banc: les sièges proprement dits seront par exemple constitués de sortes de coupelles trouées en leur centre symbolisant des tores aplatis.
G désigne la sorte de guérite abritant des distributeurs de rafraîchissements et de fiches consacrées à cette folie.

1: pont LISTING
2: pont LEIBNIZ
3: pont RIEMANN
4: pont MOEBIUS
5: pont VAN DYCK
6: pont POINCARÉ
7: pont EULER

Les divers gardes du corps, balustrades, seront ornés de boules, tores, objets de genre supérieur, présentant des sommets et des lignes singulières et conférant à ces objets une apparence légèrement polyédrique.

Le bassin rectangulaire peut avoir sans difficulté 25x75m pour dimension. CPB

LE PARAPLUIE DE WHITNEY

Drôle de parapluie, n'est-ce-pas, que celui qui nous abrite en ce moment ! Et les manières de l'observer sont nombreuses; ce type d'objet se situe en effet à la rencontre de différentes branches des mathématiques: les géométries algébrique et analytique, l'analyse et la topologie différentielles.

Quatre concepts d'ordre mathématique et physique parmi les plus importants sont associés à ce "parapluie":

celui de singularité
celui de stabilité
celui de bifurcation
celui de stratification.

L'objet *singulier* est l'objet particulier, aux propriétés extrémales, dégénéré par rapport à une forme de spécialisation, totipotent, autour duquel s'organise tout un univers local.

L'objet *stable* est celui qui perdure, largement utilisé pour sa résistance à l'épreuve des chocs et du temps, et qu'on cherche souvent, pour cette raison, à construire. Face à une perturbation qui le déforme, il conserve ses propriétés intrinsèques.

La perturbation est déterminée par des agents extérieurs, appelés en l'occurence paramètres. Un objet peut rester stable tant que les paramètres se meuvent à l'intérieur d'un domaine précis. Quand ils franchissent le bord de ce domaine, appelé *ensemble de bifurcation*, l'objet connaît des changements plus ou moins profonds. L'ensemble de bifurcation sépare des domaines de stabilité de l'objet.

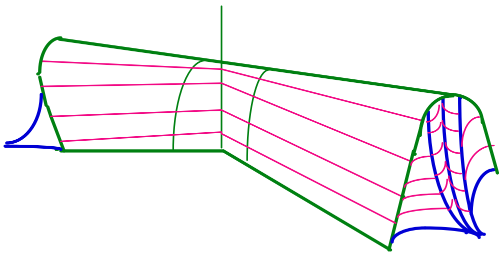
Les objets géométriques s'organisent en sous-objets appelés *strates* qui sont raccordées les unes aux autres.

Par leur utilité tant pour la compréhension des phénomènes que pour leur description précise, tant dans les sciences fondamentales que dans la vie quotidienne, ces concepts présentent un intérêt exceptionnel.

CPB

LE PARAPLUIE DE WHITNEY

INDICATIONS POUR L'ARCHITECTURE



La section du parapluie que l'on considère a pour équation paramétrée

$$(X = 5/48\ rt,\ Y = r,\ Z = 6 - t^2/6)$$

où $0 \leq t \leq 6$, $-8 \leq r \leq 8$ et

$$(X = 5/48\ rt(1 - r/9),\ Y = r,\ Z = 6 - t^2/6)$$

lorsque, pour les mêmes valeurs de t que précédemment, $8 \leq |r| \leq 9$.

Ce parapluie est en principe très facile à construire, puisqu'il est généré par des droites (pour t constant) qui s'appuient sur le manche et sur les paraboles situées dans les plans verticaux $Y = \pm 8$ et d'équation cartésienne $Z = 6(1 - X^2/25)$.

Toutefois, pour des raisons d'éclairement et de luminosité, on tâchera de réaliser partiellement en verre la partie du parapluie contenue dans la tranche $-2 \leq Y \leq 2$. C'est dans cette tranche qu'on placera un écran d'ordinateur par salle.

Les parties frontales du bâtiment, où seront les portes d'entrée et de sortie de chaque salle, sont des sections d'objets homéomorphes au parapluie, appelées queues d'aronde. Elles s'enfonceront légèrement sous le parapluie. De manière plus précise, l'extrémité de ces portions symétriques de queue d'aronde partiront des points $Y = \pm 11{,}90$.

En plaçant l'origine en ce point, et en orientant l'axe des Y en sens inverse du sens précédent, la forme au sol d'une portion sera donnée par l'équation paramétrée

$$(Y = u,\ X = \pm 2\ [u/3]^{3/2})$$

La section centrale de la queue d'aronde a pour équation paramétrée

$(Y = u, Z = u^2/4)$.

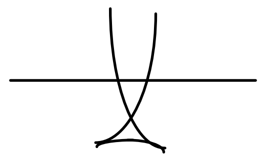
Dans le cas présent u est compris entre 0 et 4,9 m.

La queue d'aronde complète a pour équation paramétrée

$(X = - 4w^3 + 2w\,u,\ Y = -u,\ Z = 3\,w^4 - w^2\,u)$.

Si donc on fixe w, on obtient l'équation d'une droite. La surface est ainsi réglée, par conséquent facile à réaliser.

Les sections verticales à Y (donc u) constant ont cette forme:



On en prendra seulement la partie inférieure à la hauteur h(u) égale à $u^2/3$.

C.P.BRUTER

L'OBSERVATOIRE DE GAUSS

Il n'y a aucune partie de l'astronomie qui ne soit fonction
des lignes visuelles et de la perspective,
filles de la peinture.

Leonardo da Vinci

Il y a plus de choses sur la terre et dans le ciel,
Horatio,
qu'il n'en est rêvé dans votre philosophie.

W.Shakespeare

"Oh, Hamlet, toi qui rencontres le mystère, permets-moi de t'interroger. Dis-moi, serait-il prétentieux et risible, fou, ce rêve qui voudrait connaître les formes et les distances dans l'Univers ? Que penses-tu de ces Chaldéens modernes, que l'on nomme mathématiciens, qui s'interrogent d'abord sur les façons de concevoir la métrique des espaces, c'est-à-dire la manière d'évaluer les distances entre points de ces espaces ? Ces métriques sont-elles immuables à travers les espaces et le temps, ou bien varient-elles et comment ? Quelles sont alors leurs singularités, où et pourquoi se présentent-elles, que signifient-elles ?

Ces corsets métriques qui modèlent l'espace, peut-on les classer, étudier et comparer les géométries qu'elles définissent ? Et à quelles réalités physiques correspondent ces huit types de géométrie en dimension trois découvertes par nos Chaldéens ?

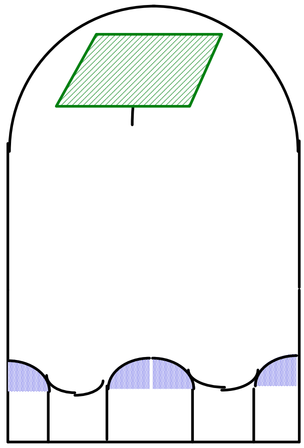
Selon la fable, Dieu aurait façonné le sombre anneau des confins de l'Univers, trempé l'anneau dans le liquide étincelant et primordial, et l'étrange bulle alors formée serait ce monde dont nous cherchons à pénétrer les secrets. La forme de l'univers serait-elle analogue à celle d'une surface minimale ?"

Ainsi pensait l'Astronome, créateur de la géométrie, que son nom fut Thalès, Eudoxe ou Gauss. En leur honneur, un monument fut élevé. On y pouvait observer les trois types de surface et de géométrie qui font encore rêver, l'elliptique au plus haut, la parabolique en son milieu, l'hyperbolique à sa base.

C.P.B.

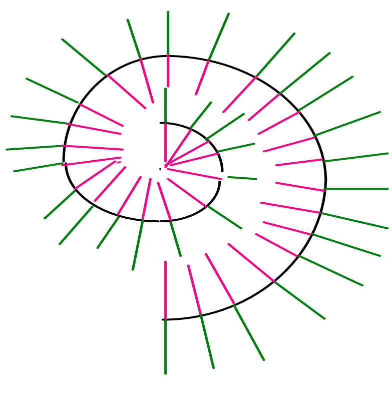
L'OBSERVATOIRE DE GAUSS

INDICATIONS POUR L'ARCHITECTURE

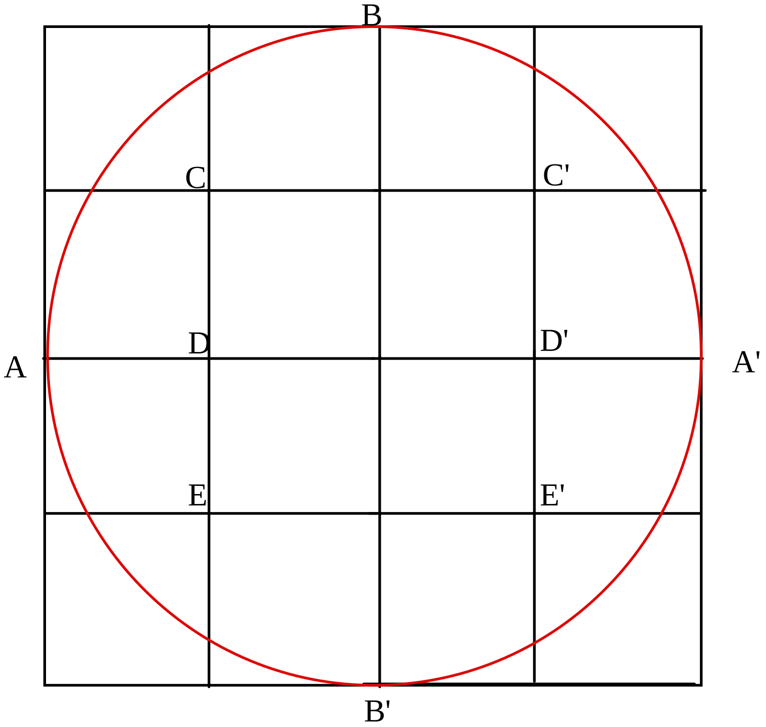


Le bâtiment de 14,142 m de hauteur apparente, se compose d'une demi-sphère de 4,37 m de rayon, supportée par un tronc cylindrique de même rayon et de même hauteur (4,37), reposant sur un socle de 5,40 m.

A l'intérieur du socle, se trouve un escalier un peu original: son support "vertical" est composé de génératrices d'un hélicoïde oblique d'équation x = r cos ß, y = r sin ß, z = 4 r - ß (z en cm et ß en degrés), comprenant 30 marches de 18 cm de hauteur, décalées les unes des autres d'un angle de 18°, et dont voici une projection très approximative sur le plan horizontal:

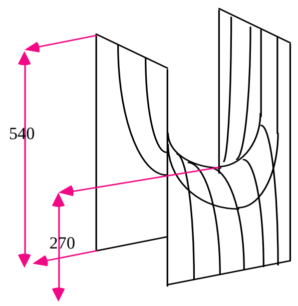


Le sol sera creusé jusqu'à - 5,40 m de manière, si les conditions techniques de fabrication de sols transparents le permettent, à voir en totalité le tronçon d'hélicoïde situé entre -5,4 et 0, sur le prolongement duquel s'appuie l'escalier posé entre 0 et 5,4.



On fabriquera le socle à partir de la première surface de Scherk, et d'équation $z = \mathrm{Log}(\cos ky / \cos kx) + 2{,}7$ (où $k = \pi : 2{,}185 = 1{,}4378$) tronquée entre le plan horizontal et le plan de cote 5,4, et intérieure au cylindre droit de rayon 4,37. Ce morceau de surface sera encore évidé de manière à pouvoir insérer l'escalier précédent.

La réalisation technique de ce socle ne présente pas de difficulté particulière puisque au dessus des points A, A', B, B, etc... du quadrillage la surface de Scherk possède des droites verticales, qui seront matérialisées par des poteaux porteurs. Cette surface est formée par l'union d'éléments standard disposés en quinconque. Voici le dessin approximatif d'un élément:



LA MAISON DU NOMBRE
ou
L'HÔTEL DE FERMAT

Science divine
Gauss

Les nombres habituels et leurs propriétés essentielles témoignent de quelques-uns des principes élémentaires qui gouvernent l'esprit: le désir d'acquisition transparaît à travers notre facilité à concevoir l'addition, le désir de conservation rend au contraire difficile l'assimilation des opérations de soustraction et de division, la capacité de représentation se manifeste dans le processus même de création des nombres.

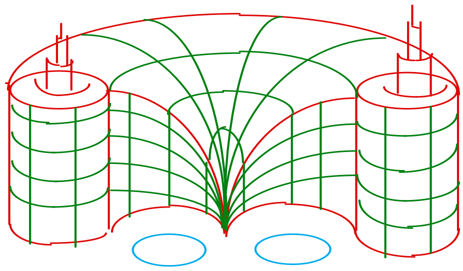
Le nombre est sans doute la plus simple de nos représentations abstraites. L'absence d'objet se note par 0. La présence d'un objet se note, dans notre système d'écriture, par 1. Rien, forme, couleur, origine, poids, usage, etc, rien n'est dit sur les qualités de l'objet. Si, de même, l'objet se présente sous la forme d'une colonie de 20 cellules, la caractéristique de présence 20 nous laisse dans l'ignorance totale sur la nature des cellules, leur disposition spatiale, leurs propriétés spécifiques, etc...

L'apparence du bâtiment est éclatante. Son intérieur est sombre. On veut signifier par là que les propriétés des nombres restent enrobées de beaucoup de mystères. Même les nombres premiers n'ont pas livrés tous leurs secrets. Ces nombres, qui ne sont divisibles que par eux-mêmes ou par un, permettent, au travers de la multiplication, de générer tous les entiers. Ils jouent un grand rôle dans certaines utilisations des mathématiques.

Nous ignorons l'origine des grandes lois physiques, et même si nous parvenons à atteindre du très petit ou du très grand, le véritable infini du monde échappe encore à notre savoir. Les constructions de nombres nous révèlent l'existence d'infinis abstraits, dont les comportements à la limite rappellent parfois ceux du monde physique, et dont l'incarnation dans le réel reste un sujet d'étonnement et de discussion.

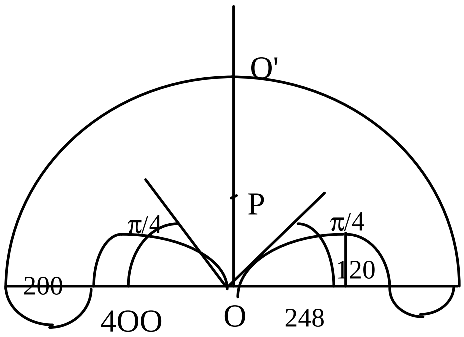
CPB

LA MAISON DU NOMBRE



INDICATIONS POUR L'ARCHITECTURE

Au sol, le bord extérieur du bâtiment se compose d'un demi-cercle de rayon 6m, tangent à eux demi-cercles de rayon 1m, qui se raccordent au centre 0 du grand demi-cercle par deux branches de strophoïdes droites symétriques. La branche de droite appartient à la strophoïde droite d'équation polaire $r = 4 \cos 2\beta / \cos\beta$. Si 0, point double de cette strophoïde, est l'origine des coordonnées de cette courbe, le maximum de hauteur de la branche considérée est atteint pour $x_m = 2,479$ m, $y_m = 1,2$ m et un angle $\beta_m = 25°91$:

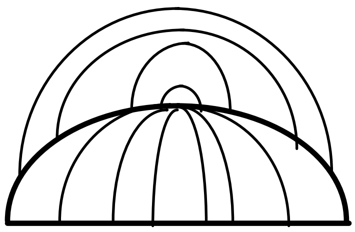


Si p désigne la distance entre 0 et un point P situé sur l'axe de symétrie de la figure ci-dessus, la hauteur du plafond au-dessus de P sera égale à h (P) = 10 log(1 +p/2). Lorsque P parcourt l'axe de symétrie, le point h décrit un arc de courbe logarithmique, que l'on fait tourner autour de l'axe vertical en 0, et dont on considère l'intersection avec le cylindre vertical dont la figure précédente est la section droite. Cette intersection constitue le toit du bâtiment, dont la hauteur maximale est de 6,02 m , à l'exception des morceaux d'hélicoïde implantés au dessus des tours extérieures.

L'extérieur du bâtiment sera lumineux, enrobé par exemple de plaques de verre métallisées.

Entrée et sortie se feront par les tours dont la base intérieure sera éclairée par des faisceaux lumineux assez intenses.

A l'exception de ces entrées et d'un foyer luminescent centré en 0', l'intérieur sera relativement sombre, mais d'une clarté suffisante pour pouvoir lire les lignes de chiffres ainsi disposées :



Les lignes tracées sur le mur vertical seront les intersections du cylindre vertical de base le demi grand cercle centré en 0, et de cylindres elliptiques à génératrices horizontales et dont les bases seront des ellipses situées dans des plans verticaux. Ces plans verticaux sont situés aux distances p'_i de O' évaluées en cm : 10, 20, 30, 40, 60, 100, 160, 260, 420. On prendra pour équation d'une ellipse située à la distance p'_i de 0', la relation $(x/a_i)^2 + (z/b_i)^2 = 1$, $a_i = (R^2-(R-p'_i)^2)^{1/2}$ et $a_i/b_i = 19/14$ (qui est voisin de e/2), où R est le rayon du demi grand cercle.

LA CORNE D’ABONDANCE

L’homme de science, le mathématicien, sont des explorateurs. Parvenus aux confins des domaines de connaissance, ils rencontrent souvent des mondes entièrement nouveaux. Ils partent ainsi, parfois, en un long voyage vers un infini qui les fascine.

L’analyse fine des mouvements, si instructive, s’ébauche avec l’école grecque, celle de Parménide et de Zénon, au cinquième siècle avant J.C. On se pose, aujourd’hui encore, la question: qu’advient-il lorsque la durée du voyage devient infinie ? Qu’advient-il en effet de la nature du mouvement, de la forme de la trajectoire, ou des objets -forme, dimension- qui se transforment à chaque instant ?

Et si l’on ne peut donner de réponse exacte à ces questions, peut-on au moins apporter des solutions approchées ?

La branche des mathématiques qui utilise la précision et l’extension à l’infini du nombre pour tenter de résoudre ces problèmes s’appelle l’*analyse*.

La théorie des nombres, la “géométrie” -devenue topologie différentielle dans sa version la plus moderne- sont les piliers les plus anciens de l’édifice mathématique. L’analyse s’arc-boute sur ces deux piliers. Le nombre devient un instrument pour la description fine du comportement des formes, des figures, des objets, notamment lorsqu’on procède à leurs transformations délicates.

Elle est l’outil de calcul des aires, des volumes, de manière plus physique des énergies. Comme en témoigne l’œuvre d’Archimède (287-212 avant J.C), les nécessités de ce calcul ont également servi de mobile à la genèse de l’analyse, et de moteur à son développement.

L’architecture de cette folie, sa décoration intérieure, illustrent les notions d’*approximation*, de *convergence*, de *limite*, de *suite*, de *série*, d’*intégrale*, de *fonction* quelques-uns des concepts de base de l’analyse classique, qui n’a pris véritablement son essor qu’à partir du seizième siècle.

On rencontrera à propos d’un autre bâtiment, le parapluie de Whitney, d’autres concepts très profonds et plus modernes.

CPB

LA CORNE D'ABONDANCE

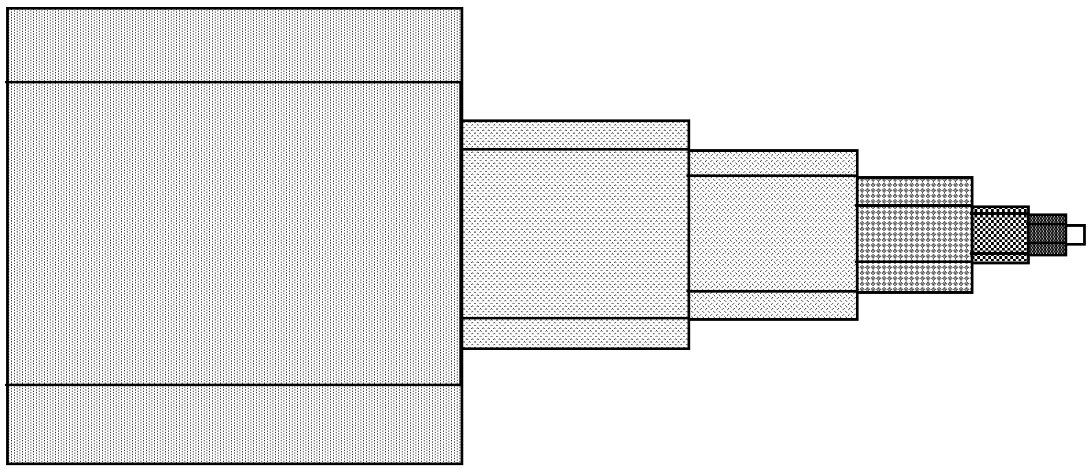
INDICATIONS POUR L'ARCHITECTURE

1. ARCHITECTURE INTÉRIEURE

Intérieurement, le bâtiment se compose d'une suite de cellules accolées. Le rapport métrique de la cellule i à la cellule suivante i+1 est égal au nombre d'or, $(5^{1/2} + 1)/2 = 1{,}618034...$ Leur base horizontale est carrée; la longueur du côté du carré a pour valeur(mm):

6000, 3708, 2292, 1416, 875, 541, 334, 206, 127, 79, 49, 30.

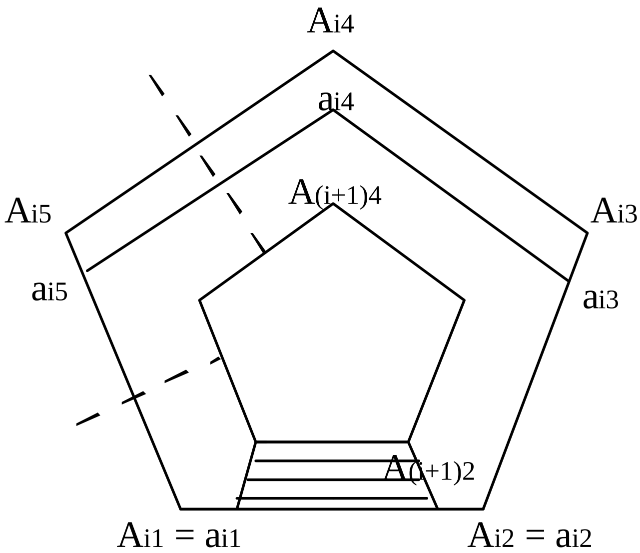
La longueur totale intérieure est donc de 15,708 m.



Le mur gauche de la cellule i, Mgi a la forme d'un pentagone régulier de côté A_{ij} (j = 1, 2, 3, 4, 5). Les hauteurs H_i de ces pentagones sont respectivement, en mm:

9233, 5706, 3527, 2178, 1347, 833, 515, 318, 196, ...

Le mur droit de la cellule i, Mdi, a la forme d'un pentagone symétrique dont les côtés a_{ij} sont parallèles à ceux du pentagone précédent; il est ajouré par le pentagone régulier Mg(i+1).



On passe de la cellule i (i < 5) à la cellule suivante en montant quelques marches situées dans la cellule i.Voici les hauteurs des escaliers e(i,i+1) de transition:

1 -> 2: 4 marches de 18 cm = 72 cm
2 -> 3: 3 marches de 18 cm = 54 cm
3 -> 4: 2 marches de 18 cm = 36 cm
4 -> 5: 2 marches de 9,5 cm = 19 cm

Le passage entre la cellule 5 et les suivantes se fait de manière continue jusqu'à atteindre, par rapport au niveau du sol de la cellule initiale, une hauteur voisine de 2 m.

Le mur Mg1 est un pentagone de 6m de côté. On a toujours:

$$A_{i1} = a_{i1} \text{ et } A_{i2} = a_{i2}$$

La distance h_i entre les côtés $A_{i+1,1}A_{i+1,5}$ et $a_{i1}a_{i5}$ est égale à:

i = 1: 1316 mm
i = 2: 841 mm
i = 3: 529 mm
i = 4: 302 mm

La distance d_i entre les sommets $A_{i+1,4}$ et a_{i4}, donnée par la relation $d_i = h_i/\sin(3\pi/10)$, est égale à:

i = 1: 1397 mm
i = 2: 893 mm
i = 3: 561 mm

i = 4: 320 mm

On calculera, si besoin est, la distance entre A_{i4} et a_{i4} par la relation:

$$d(A_{i4}\ a_{i4}) = H_i - H_{i+1} - d_i - e(i,i+1)$$

LA CORNE D'ABONDANCE

INDICATIONS POUR LA DÉCORATION INTÉRIEURE

Salle 1

(6x6 au sol moins les escaliers)

sol: il est divisé en deux bandes latérales identiques et une bande centrale de dimension 6 x 3,7O8. Les bandes latérales seront carrelées de marbre vert, elles seront tangentes à une ellipse centrale (b/a = nombre d'or), tapissée à la Serpinski, selon le modèle de la cathédrale d'Agnani (11O4).

plafond: bleu nuit dégradé s'éclaircissant au fur et à mesure qu'on entre dans le bâtiment, parsemé d'étoiles organisées selon les attracteurs classiques (noeuds, foyers, points-cols).

écrans d'ordinateurs: quatre, un de part et d'autre de l'accès à la seconde salle, les deux autres sont en vis-à-vis sur les murs latéraux, centrés à deux mètres de l'entrée.

logiciels: il serait souhaitable que les logiciels aient les qualités suivantes:

- qualités narratives (grande clarté, langue simple mais harmonieuse, texte vivant, un peu d'humour si possible)
- qualités artistiques
- qualités pédagogiques: nombre restreint de messages se rapportant à une définition, une propriété.

Je suggère en particulier la préparation de scénarios autour des thèmes suivants:

- suites et critère de Cauchy
- à travers le traitement de la suite de Fibonacci de ses origines à nos jours, histoire de la notion de suite

- histoire de la notion de fonction f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ en partant de la représentation des objets par des coupes $f^{-1}(c)$, et en remontant le temps.

- approximation du "continu" mathématique par du discret.

murs: Aux angles des murs et du plafond, prévoir des projecteurs:

- deux d'entre eux envoient sur le mur Md1 une ou des images d'éléments floraux créés à partir de la suite de Fibonacci (le fait d'avoir deux vues permet de créer l'impression de relief).

- les autres projecteurs envoient sur les murs qui leur sont opposés des décors végétaux fixes ou en évolution sur un fond lointain d'ensemble de Mandelbrot en 3D.

Les **salles 2 & 3** sont consacrées respectivement aux fractals (détails d'ensembles de Julia) et aux attracteurs et bassins d'attraction des systèmes dynamiques.

Les sols sont décorés à la manière du sol de la première salle, mais le vert des bandes latérales s'éclaircit au fur et à mesure qu'on pénètre à l'intérieur du bâtiment. L'ellipse au sol de la seconde salle peut entourer un objet fractal du genre éclair, le cercle au sol de la troisième salle peut s'inspirer de la figure 3, p.111, présentée dans Pour la Science, N°182, Déc.92 .

Les plafonds restent bleus d'un dégradé de plus en plus accentué au fur et à mesure que l'on pénètre dans la bâtiment.

Sur les murs, ensembles de Julia dans la première salle, attracteurs chaotiques dans la seconde salle.

Le fond du bâtiment, c'est-à-dire la partie du bâtiment située au-delà de la salle 3, sera inaccessible au public. Elle sera carrelée de pavés d'abord de verre teinté dans les tons bleus et vert, de plus en plus pâle, pour laisser la place à des carreaux de miroir de taille décroissante jusqu'à l'extrémité du bâtiment d'où jaillira une lumière assez intense pour illuminer le fond du bâtiment ainsi que la salle 3.

C.P.BRUTER

LA COIFFE D'APOLLONIUS

Le livre de la Nature s'écrit en termes de Géométrie
Galilée

Les mathématiques reposent sur deux piliers fondamentaux : celui des nombres d'une part, celui des formes d'autre part. L'impression du nombre dans la forme crée la figure, l'objet type de la géométrie.

La géométrie est en fait une physique abstraite, celle d'un monde idéal.

On désigne sous le nom de **géométrie classique** une théorie optique formalisée, celle des trajectoires rectilignes des rayons lumineux, des ombres créés par les objets, puis des formes des objets révélées par les jeux de la lumière.

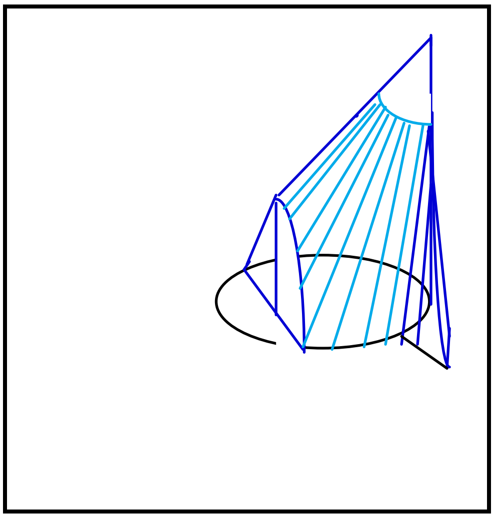
L'Egypte a été le premier foyer de développement de cette géométrie. Le rôle joué par les nécessités de la conception et de la construction des temples a été considérable dans cette genèse. Dépassant les considérations techniques, les prêtres égyptiens, qui ont formé les grands géomètres grecs, ont sans doute eu l'intuition du rôle de la géométrie comme outil de description et d'interprétation de l'architecture du monde.

La géométrie classique a permis d'établir les premières théories astronomiques qui conservent toute leur actualité. Et l'audace des pythagoriciens trouve un premier achèvement dans la théorie cosmogonique que Platon expose dans le **Timée**.

L'extension moderne de cette géométrie est largement utilisée aujourd'hui dans l'élaboration des théories de l'infiniment petit et de l'infiniment grand. Aujourd'hui comme hier, la géométrie reste l'outil fondamental de compréhension et de découverte.

CPB

LA COIFFE D'APOLLONIUS



INDICATIONS POUR L'ARCHITECTURE ET LA DÉCORATION EXTÉRIEURE

Le bâtiment se compose de deux parties accolées :

- la première est un cône : l'angle de son axe avec le sol est fixé par la hauteur du soleil au-dessus de l'horizon au solstice d'été 64°44'. Cet angle est noté β.
- La seconde est un morceau d'hyperboloïde à une nappe.

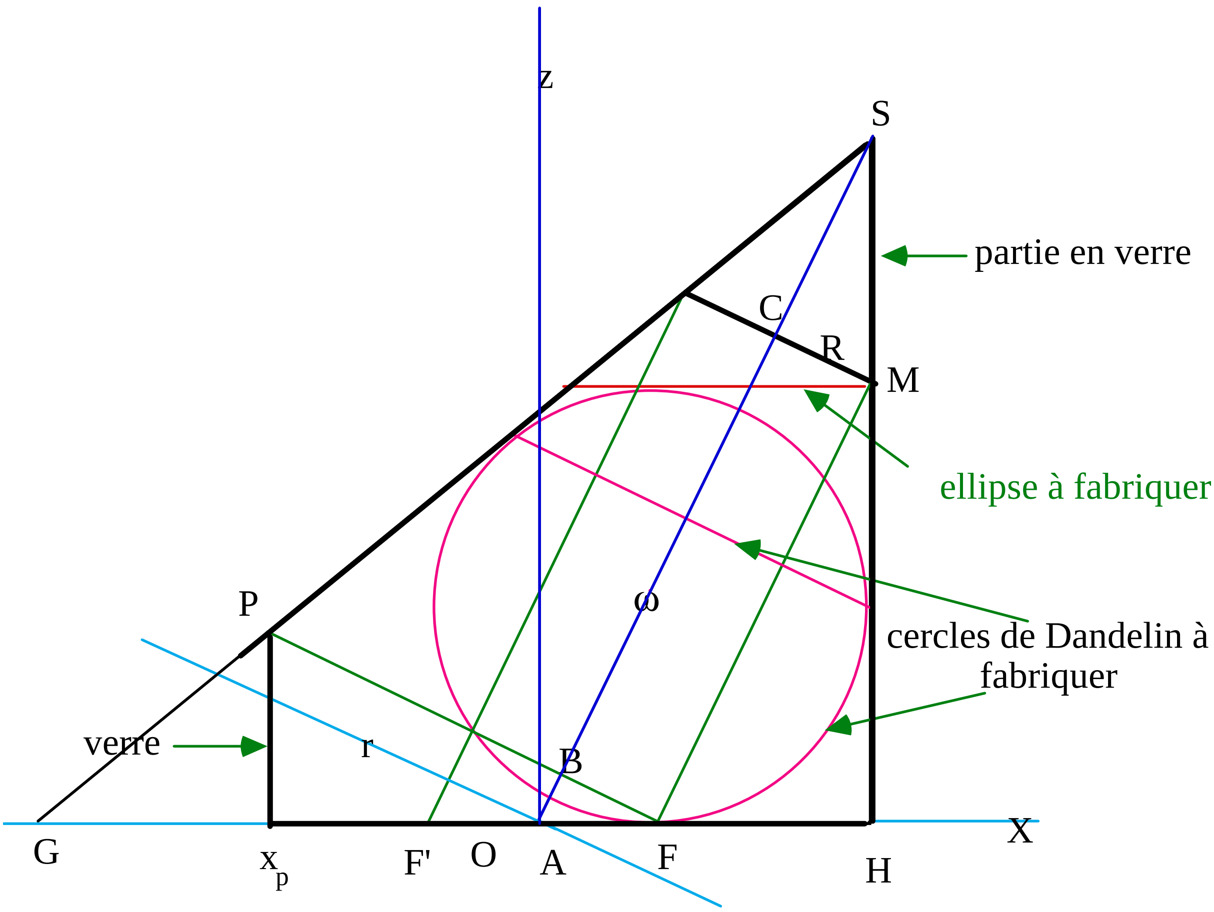
Les données numériques sont proposées ici à titre légèrement indicatif. Les données exactes seront établies par les services techniques, en tenant compte des contraintes d'épaisseur.

Soit S le sommet du cône, A l'intersection de son axe avec le sol. On peut noter L la longueur SA. Le cône possède une génératrice verticale de longueur L $\sin\beta$= 9, 02133 pour L = 10. On peut noter SH cette génératrice. AH = L cosB = 4, 31456. La génératrice la plus longue SG vérifie SG = SH/cos(π-2β) = 14, 12896. Le grand axe de l'ellipse de la base a pour longueur GH = SH tg(π-2β) = 10, 874 = 2 x 5, 437. On prendra comme rapport des longueurs entre les petit et grand axes de l'ellipse, le nombre d'or 1, 618.

La distance OF entre le cercle et un foyer de l'ellipse sera alors telle que $OF^2 = OH^2 - OK^2$, où OK est la longueur du petit axe (OF = 2, 6415).

La partie supérieure du cône sera faite en un matériau transparent, en verre par exemple. Les génératrices du cône pourront être en métal léger et teinté, recouvertes de laques brillantes qui reproduiront les couleurs du ciel au cours de la journée; si l'axe principal du bâtiment représente le sud, la génératrice centrale aura une couleur blanc jaune étincelant, une génératrice située à l'est aura la couleur d'un ciel matinal, une génératrice située à l'ouest aura la couleur d'un soleil couchant.

Les dimensions véritables de ce cône seront fixées en fonction de l'éclairement de la salle, des contraintes de réalisation technique. A titre indicatif, on supposera ici que, M désignant le point de rencontre du cercle de base de ce cône avec SH, FM est parallèle à l'axe SA. Dans ces conditions, le rayon R du cercle précédent vaut R = AF /sinβ = (AH - FH) /sinβ = (AH - OH + OF)/ sinβ = 1, 37.

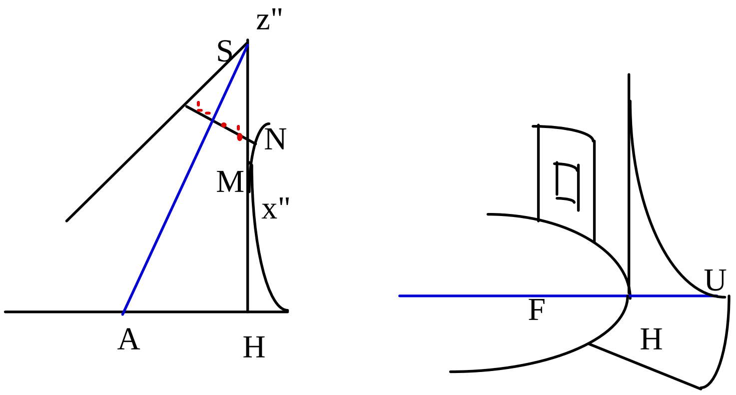


On fabriquera en métal nickelé deux tores symbolisant deux cercles de la sphère de Dandelin tangente au grand cône et passant par le foyer F et son symétrique N sur SH par rapport à la bissectrice de l'angle droit AHS.

La perpendiculaire à l'axe SA et passant par le foyer F rencontre la génératrice SG en P. On procèdera à l'ablation de la partie du cône contenant G, par un plan vertical parallèle à SA, perpendiculaire à GH et passant par P.

La section du cône par ce plan est une parabole. Si B désigne l'intersection de SA avec FP, le plan vertical contient le point S' symétrique de S par rapport à B sur l'axe du cône. L'équation du cône rapporté aux axes AS (coordonnée z'), AX' (la perpendiculaire à SA en A dans le plan AHS, coordonnée x'), et AY' (coordonnée y') s'écrit de manière simple : $L^2 (x'^2 + y'^2) = r^2(L - z')^2$ où r désigne la longueur du segment joignant A à sa projection sur

SG selon AX'. L'équation de ce cône rapporté aux axes GH (coordonnée x),



AY (coordonnée y), AZ (coordonnée z) s'effectue par le changement de variables : z' = xcosä + ysinä, y' = y, x' = -xsinä + zcosä, où ä désigne le complémentaire à $\pi/2$ de l'angle β. L'équation de la section parabolique s'obtient alors immédiatement en remplaçant dans la nouvelle équation du cône x par la valeur x_P évaluant l'abcisse de P.

Du point de vue texture, cette section sera faite en verre, et contiendra les portes d'entrée du bâtiment.

Le cercle de gorge de l'hyperboloïde à une nappe est en principe le cercle de base, de centre C, du cône transparent. En fait, compte tenu des épaisseurs, le cercle de gorge est de rayon CN supérieur à CM = R. Le repère étant constitué de l'axe Z' du cône, de l'axe X" contenant CN, et de l'axe Y" qui est perpendiculaire aux deux précédents, l'équation de l'hyperboloïde est de la forme $x''^2 + y''^2 - CN^2 z''^2/c^2 = CN^2$. Il sera naturellement tangent à la verticale SH.

Il rencontrera l'horizontale GH en un point U de manière que le volume compris entre le cône et le paraboloïde soit suffisant pour qu'on puisse y installer deux ordinateurs et deux projecteurs.

C.P.BRUTER

ANNEXE 2

FICHES ET LOGICIELS-FILMS

Le visiteur du parc pourra se procurer in situ des fiches d'information qui lui présenteront l'objet du parc, des folies, l'initieront aux concepts et aux faits mathématiques associés aux folies. Rentré chez lui, il pourra mieux prendre connaissance du dossier qu'il aura constitué.

Le parc ne se veut pas un musée. Un objet se fixe dans l'esprit par la singularité de ses propriétés: par exemple sa taille, les matériaux qui le constitue, les couleurs qu'il porte, l'originalité de ses formes. Mais, ce qui permet le mieux de retenir et de comprendre un objet est la redécouverte de sa genèse, de son évolution.

Aussi entend-on créer ou faire créer toute une série de films et de logiciels d'animation chargés de faire passer leurs messages, non seulement par leurs qualités narratives et esthétiques, mais aussi par la manière dynamique de traiter les sujets.

La fabrication d'un logiciel ou d'un film est une opération longue et coûteuse (une vingtaine de mille francs pour la rédaction du scénario d'un film court, à partir d'un centaine de mille francs pour sa réalisation).

Ces données financières, fournies par Denis GUED auteur de films scientifiques remarqués et par D.PATURLE (Imagiciel, Ecole Polytechnique), expliquent l'absence de telles réalisations dans cette présentation du projet.

Un budget spécifique devra être établi, destiné d'une part à l'achat des différentes productions existantes, et d'autre part à la réalisation de films-logiciels, éventuellement en liaison avec d'autres services publics (Centre National de Télé-enseignement, chaîne audio-visuelle culturelle), et via la création de quelques petites équipes de fabrication, à caractère éventuellement international.

Dans l'immédiat, faute de moyen financier sérieux, aucun logiciel complet n'a pu être mis au point.

1. CORNE D'ABONDANCE

Fiches

1.1 Introduction
1.2 Ensembles de Julia (Hubbard)
1.3 Décomposition d'un espace (Hubbard)

Logiciels

Plusieurs logiciels existent, appartenant soit à des éditeurs, soit à des équipes universitaires (cf J.Hubbard)

2.COIFFE d'APOLLONIUS

Fiches

2.1 Introduction
2.2 Alignements et Rencontres
2.3 Le théorème de Thalès et ses conséquences

Logiciels

3. L'HÔTEL DE FERMAT

Fiches

3.1 Introduction

Logiciels

4. L'OBSERVATOIRE DE GAUSS

Fiches

4.1 Introduction

Logiciels

5. LE PARAPLUIE DE WHITNEY

Fiches

5.1 Introduction

Logiciels

6. LE PONT D'EULER

Fiches

6.1 Introduction
6.2 Connexité
6.3 Un invariant de forme

Logiciels

7. LE SEPTIÈME TEMPLE

Fiches

7.1 Introduction
7.2 La coupole
7.3 Les frises
7.4 Pavage d'un espace
7.5 Polyèdres
7.6 La notion de groupe

7.7 7 et 17

Logiciels

7.A Frises et Pavages (A.Luck)
7.B Polyèdres (E.Bonan)
7.C Odyssée mathématique 1: Voyage en homotopie (ébauche de scénario)