SUR LE FORMALISME DIFFERENTIEL

C.P. BRUTER

Maître de Conférences à l'UBO

« La Vie est Mouvement »

0. On trouvera peut-être abusif de considérer que l'univers des objets se divise simplement en deux parties, le monde des objets idéels d'un côté, celui des objets factuels de l'autre. Cette division a pour elle l'avantage de la clarté, et d'introduire un début d'ordre dans l'amoncellement des modèles.

Située à la frontière des deux mondes, la pensée, via l'observation, par son pouvoir de transmutation, permet d'établir une dualité, un dialogue, en un mot une dialectique, entre ces deux parties de l'univers. Par le jeu de cette dialectique, tout modèle que nous créons, qu'il soit de nature essentiellement conceptuelle ou de nature principalement matérielle, doit une part des raisons de son existence et de ses propriétés aux qualités des objets du monde auquel il n'appartient pas.

Une des caractéristiques évidentes des chimères, mirages et autres éphémères, est leur absence de véritable stabilité structurelle, sauf peut-être pendant un laps de temps infime par rapport aux longues durées astronomiques. Par opposition, les objets présentant un réel intérêt sont structurellement stables. Et l'on peut interpréter la recherche de la vérité comme la recherche, dans le monde conceptuel, des objets dotés de la stabilité structurelle la plus parfaite. Falsifier des expériences, vérifier des raisonnements, permettent de tester les qualités de stabilité des objets factuels ou idéels.

Dans une certaine mesure, tout travail justificatif, tel que celui que nous allons essayer d'entreprendre sur quelques objets du monde conceptuel, les modèles différentiels, est une réflexion sur la stabilité structurelle de ces objets.

On se pose parfois des questions sur la nature des modèles : pour nous, est modèle tout objet qui répond à une nécessité de représentation. De ce point de vue, que partage le mathématicien contemporain de Poincaré, Emile Picard, l'activité centrale de notre pensée est de faire des modèles (confer le texte d'E. Picard rapporté dans notre commentaire sur la conférence de Monsieur Rybak).

Une des originalités importantes d'un modèle est de nous permettre de regarder le monde sous un angle nouveau, et de stimuler l'activité de notre perception à travers l'optique du modèle. Celui-ci apparaît donc comme une sorte de lunette par laquelle nous découvrons certaines facettes de la réalité, et les observons avec minutie, quoique plus ou moins déformées. Pour répondre en partie à une question posée par Monsieur Pacault au cours de ce Colloque, nous donnons ici les références de deux articles ([1], [2]) où une analyse des qualités d'un modèle a été entreprise.

1. En général, l'expérimentateur rend compte d'un phénomène à l'aide de trois types de paramètres :

des paramètres X_i dont il peut seulement mesurer les valeurs x_i sans être capable de les maîtriser ;

des paramètres U_j dont il peut mesurer et fixer *a priori* les valeurs u_i ;

des paramètres temporels T_k.

Par des expériences répétées, il obtient une statistique des différentes valeurs des (X_i, U_j, T_k). Supposons qu'il arrive à établir, avec ces seules données, des relations fonctionnelles

$$f_i(x_1, \ldots, x_n, \quad u_1, \ldots, u_p, \quad t_1, \ldots, t_q) = 0$$

entre ces valeurs, et que ces relations *restent stables* sur les domaines de variation des différents paramètres. Les f_i portent alors le nom de *lois*. Lorsque leur nombre est suffisant, elles permettent de prédire la manière dont varient certains paramètres en fonction d'autres.

Comme exemples de telles lois, on peut citer celle qui donne la position d'un mobile en chute libre dans le vide en fonction du temps, ou bien celle qui relie pour un gaz parfait la pression, le volume et la température absolue.

La donnée de telles relations fonctionnelles n'est pas satisfaisante. On ne comprend pas en effet la raison véritable de leur existence et de leur nature. Leur origine physique nous est en général masquée. Nous restons sur un sentiment d'incompréhension à l'égard du mécanisme sous-jacent qui donne naissance à ces relations.

2. Par contre, par l'activité de nos organes sensori-moteurs, nous avons souvent une perception très intime de la *présence de forces*, dont nous établissons une représentation mentale inconsciente. Nous réalisons une simulation de leurs effets, de leur devenir. Cette activité mentale se traduit par un affect qui est le sentiment de comprendre.

Lorsque nous sommes capables de reconstituer par le verbe les grands traits de ce processus mental, nous offrons alors un modèle linguistique du phénomène observé. Le langage le plus concis qui rende compte de phénomènes simples et généraux est le langage mathématique ; les modèles les plus représentatifs sont exposés dans les termes de ce langage.

Ces modèles doivent refléter la présence de forces qui impriment des mouvements : ces mouvements sont décelés par des variations dans les valeurs des paramètres. Ainsi, dans le cas de la mécanique classique, l'action des forces entraîne des variations des vitesses, alors qu'en thermodynamique chimique classique, l'action des forces conduit à la variation de quantités de matière et de divers flux.

Ces variations peuvent apparaître comme continues ou discontinues. On peut, dans certains cas, interpréter l'existence d'une variation discontinue comme suit : l'objet, dont l'état initial est A_1, est soumis à une force. Cette force fait évoluer relativement lentement la structure interne inconnue et très complexe de l'objet.

Lorsqu'un certain stade dans cette évolution est atteint, l'objet change de structure interne en une *durée brève* par rapport à celle des évolutions préalables, il passe dans un état A_2 avec changement éventuel de position et de configuration. Cette description théorique d'un mécanisme possible expliquant une variation d'apparence discontinue, a l'avantage de donner une assise à cette intuition que les modèles discontinus, *quelle que soit leur valeur parfois excellente de représentation*, ne décrivent pas la réalité profonde des phénomènes. Ils se maintiennent au niveau de l'apparence phénoménologique.

Il est certain, compte tenu de nos connaissances présentes sur la genèse et le fonctionnement du milieu biologique, que nous ne sommes pas souvent capables, pour l'instant, d'établir des modèles significatifs. Nous essayerons de voir ce qu'il en est sur ce point de manière plus précise. Par contre, il existe de nombreux modèles de type discret dont l'intérêt est réel.

3. Les modèles usuels continus établissent donc des relations entre les forces qui s'exercent sur l'objet considéré, et différents paramètres qui le situent dans l'espace-temps et le caractérisent. Et comme l'action de ces forces se traduit par la création de variations plus ou moins instantanées dans les valeurs des paramètres, on est conduit à fabriquer, sur des bases physiques, des modèles mathématiques caractérisés par des relations fonctionnelles stables entre les paramètres qui décrivent l'objet et leurs différentes dérivées partielles. Ces relations fonctionnelles sont appelées des *lois d'évolution*.

Voici, de manière plus précise, différents types de modèles continus dont l'étude a été entreprise :

3.1 — Modèles définis par des équations différentielles autonomes (par rapport au temps) :

$$\frac{dx}{dt} = f(x), x = x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)), f = (f_1, f_2, \ldots, f_n).$$

3.2 — Modèles définis par des équations différentielles non autonomes :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t).$$

3.3 — Modèles définis par des équations différentielles autonomes avec contraintes : $f_i(x) = 0$ pour i variant de 1 à k et $\frac{dx_j}{dt} = f_j(x)$ pour j variant de $k+1$ à n.

3.4 — Modèles définis par des équations différentielles avec retard :

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1(t - h_{i1}), x_2(t - h_{i2}), \ldots, x_n(t - h_{in})), \ i \text{ variant de 1 à } n.$$

3.5 — Modèles intégro-différentiels qui intègrent des effets de retard :

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(x(t)), \ x(t) = y(t) + g(t) - \int_0^t K(t-s) f(x(s)) \, ds.$$

3.6 — Modèles définis par des équations aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \frac{\partial u}{\partial x_i}, u\right),$$

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n),\ f = (f_1, f_2, \ldots, f_n),\ u = u(x, t)\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

3.7 — Modèles comptant des équations 3.6, et 3.1 ou 3.4 ou 3.5.

L'emploi de ces modèles est, à l'heure actuelle, et pour l'essentiel, limité en biologie à l'étude de certaines réactions chimiques et de la conduction nerveuse.

D'autres modèles font partie de la classe des modèles continus. Ce sont les modèles géométriques comme ceux liés à la perception des couleurs par exemple, ainsi que les modèles inspirés par la théorie des catastrophes sur lesquels nous reviendrons.

En fait, le critère le plus évident et le plus utilisé pour décider de l'emploi d'un modèle différentiel est celui de la continuité observée des évolutions spatio-temporelles des différents composants de l'objet.

Il est sans doute assez vain de vouloir chercher à tester, de manière numérique et directe, des questions de continuité, de dérivabilité ou d'analyticité. Car toute mesure se fait avec un degré d'approximation donné qui détermine l'espace numérique Q_m sur lequel on travaille. Q_m désigne ici l'ensemble des nombres décimaux tronqués à la m-ième décimale, celle-ci est la dernière décimale significative définie par les qualités des appareils de mesure.

C'est, en définitive, le degré d'accord entre les résultats obtenus à l'aide du modèle différentiel et les résultats obtenus par l'expérimentation qui reste le meilleur critère de validation du modèle. Si donc la création d'un modèle différentiel repose sur l'observation, l'intuition et l'hypothèse de la continuité, voire de la différentiabilité, la vérification de ces prémisses ne s'obtient en général que par un travail de comparaison *a posteriori.*

4. Rappelons que la résolution numérique des modèles différentiels se fait à l'aide de modèles approchés discontinus. Supposons par exemple donné le système différentiel

$$3.1 \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x, t), \text{ avec pour données initiales} \\ x(t_0) = x_0 . \end{cases}$$

La continuité de f est supposée vérifiée ; lorsque f vérifie en plus une condition de Lipschitz, c'est-à-dire s'il existe une constante L de sorte que, pour toute valeur de t comprise entre t_0 et $t_0 + a$, et pour tout couple de points x et x', le rapport

$$\frac{\| f(x, t) - f(x', t) \|}{\| x - x' \|} \text{ est inférieur ou égal à L,}$$

alors l'existence d'une solution unique pour le système 3.1 est assurée sur l'intervalle $[t_0, t_0 + a]$.

La condition de Lipchitz est automatiquement vérifiée chaque fois que f est une fonction non seulement continue mais aussi dérivable, et dont la dérivée est bornée sur l'intervalle $[t_0, t_0 + a]$. Bien évidemment, dans la pratique expérimentale ou numérique, la condition de Lipchitz est toujours vérifiée. Ce décalage entre la théorie et la pratique peut, naturellement, conduire à des résultats et à des jugements erronés ; dans le cas, précisément, où la condition de Lipchitz n'étant plus vérifiée, la pathologie que présenterait l'absence ou la présence de solution ne pourrait être décelée par la résolution numérique du problème.

La solution numérique approchée peut s'obtenir par différentes méthodes plus ou moins précises ; la plus ancienne et la plus simple, consiste à résoudre l'équation de récurrence :

$$3.1 \begin{cases} x_0 = x(t_0) \\ x_{n+1} = x_n + hf(x_n, t_n) \quad \text{pour } n = 0, 1, \ldots, N - 1 \\ t_n = t_0 + nh,\ h = a/N. \end{cases}$$

obtenue en calculant x_{n+1} à partir de x_n, et d'un développement taylorien de $x(t)$ tronqué au second ordre. Quand le pas h tend vers 0, la solution x_n tend vers la solution exacte du système différentiel. On connaît de plus, en fonction de h, une évaluation de l'écart e_n entre les solutions exactes et approchées. Pour des approximations récurrentes à peine plus sophistiquées que celle dite d'Euler-Cauchy que nous venons de définir (3.1) (développement taylorien de $x(t)$ tronqué à l'ordre $p + 1$), l'écart e_n est au plus proportionnel à $h^p \dfrac{e^{L(x_n - x_0)} - 1}{L}$.

La possibilité d'obtenir un écart élevé ajoute encore à la nécessité naturelle de procéder à une étude théorique préalable du modèle différentiel, la plus complète qui soit.

5. Les phénomènes étudiés en Biologie présentent des caractères de stabilité assez forts. Cette propriété devrait faciliter la recherche, parmi tous les modèles différentiels susceptibles de représenter un phénomène, du meilleur d'entre eux. *Le modèle doit en effet présenter les mêmes qualités de résistance aux perturbations que la réalité elle-même.* Pour chaque valeur $x(t)$ des paramètres, on peut en principe évaluer la perturbation maximale $\delta x(t)$ qui n'influe pas sur l'évolution du phénomène : les mécanismes de régulation interne sont alors assez puissants pour permettre à $x(t + \delta t)$ de conserver une valeur très voisine de celle qu'il aurait prise en l'absence de la perturbation $\delta x(t)$. La pratique expérimentale ne parvient guère, pourtant, à modifier de manière douce ces paramètres. Bien souvent, l'évolution du phénomène échappe plus ou moins complètement à l'emprise de l'expérimentateur. On a tenté d'étudier les effets de perturbation en dynamique des fluides où rapidement divers effets de turbulence apparaissent.

Notons par ailleurs que l'étude de la stabilité des modèles différentiels définis par des équations analytiques explicites n'a été entreprise que dans certains cas particuliers, et encore dans le seul cadre des modèles du type 3.1. C'est dire assez que nous ne disposons pas encore de bons critères pour le choix des modèles différentiels.

6. Le schéma de résolution numérique du système différentiel 3.1 montre qu'à l'inverse, on peut concevoir un modèle différentiel comme une approximation d'un modèle discret dont le modèle différentiel associé permettrait une étude qualitative plus facile.

Par exemple, le formalisme utilisé par Pierre Delattre est discret dans sa conception. On peut pourtant envisager de traiter les paramètres qu'il utilise comme des paramètres continus. Pour défendre ce point de vue, on peut mettre en avant deux motifs. Le premier tient au caractère ténu du substrat que décrit ce modèle, et qui, s'il n'échappait à l'expérimentateur en raison même de sa petitesse, permettrait de faire usage d'un pas h extrêmement fin. Le second motif tient au fait que le modèle théorique n'est qu'une image d'une réalité physique beaucoup plus complexe, où sont présents sans doute des réactions transitoires multiples, des effets thermiques, de champs locaux secondaires, de dissipations imperceptibles, d'absorption et d'amortissement des chocs.

Ces effets secondaires ont pour effet de lisser le phénomène discret, de lui donner une apparence continue qui correspond peut-être mieux à la réalité. Le modèle complet est vraisemblablement un modèle continu, mais comme il est hors de notre portée de l'établir, on construit un modèle approché qui fait appel, pour sa construction, aux mécanismes physiques les plus importants et les plus apparents. Il est peu probable que l'on commette une grave erreur en approchant à son tour ce modèle par un autre modèle continu.

Il est vraisemblable que la justification proposée ici de l'emploi d'un modèle différentiel comme approximation d'un modèle discret peut s'étendre à de nombreuses situations similaires, où l'effet global est obtenu par interaction d'un nombre très élevé d'actions individuelles de nature semblable, et dont le pouvoir local est extrêmement faible.

7. Pour examiner à nouveau certains rapports entre modèles discrets et modèles différentiels, nous allons partir d'une image géographique. On pourra établir, avec un peu d'imagination, un parallèle entre cette image et celle qu'offre l'observation des morphologies biologiques.

Considérons par exemple la surface de la terre. Par endroit le sol est très argileux. Un tel sol, par temps humide, paraît uniforme. Dès que le temps se met au sec pour quelques jours, le sol se fendille, se crevasse, apparaît en surface une sorte de mosaïque cellulaire. La description complète de cette mosaïque relève d'un formalisme différentiel. Pourtant, si l'on se contente de l'apparence des choses, un modèle discret, où l'on tient compte éventuellement de quelques symétries locales, peut suffire à représenter cette mosaïque, dont, par exemple, on cherche à évaluer simplement le nombre de cellules.

Si l'on s'élève à une certaine altitude au dessus du sol, les crevasses qui le zèbrent en surface finissent par s'estomper. L'étendue terrestre paraît à nouveau continue, nous prenons davantage conscience de la forme du relief. Le modèle discret perd toute signification ; un autre type de modèle différentiel, plus global, devra être mis en place pour représenter la morphologie du paysage.

Il n'est pas possible, pour l'instant, de saisir le jeu des forces tectoniques, des effets de l'érosion, de sorte qu'on en est réduit à inférer d'après la morphologie observée, les types de forces qui ont pu modeler le terrain.

Ici intervient la théorie des catastrophes élémentaires : on peut l'utiliser comme suit : les dynamiques de champs de vecteurs gradients, que l'on sait classer, donnent

naissance à certaines morphologies caractéristiques dans la mesure où sont vérifiées les hypothèses physiques à la base de la théorie des catastrophes. Rappelons qu'une dynamique gradient est une dynamique définie par $dx/dt = f(x)$, où le vecteur $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ est formé des dérivées partielles par rapport aux coordonnées positions $(x_1, \dots, x_n)$ d'une fonction d'énergie potentielle $V(x_1, \dots, x_n)$ $(f_i = \partial V/\partial x_i)$. Lorsqu'on observe dans la nature une morphologie voisine d'une des morphologies caractéristiques dont nous venons de parler, et cela quel que soit le niveau de globalité du phénomène ou le niveau de découpage que l'on choisit dans le champ des observables, *on émet l'hypothèse* que cette morphologie correspond à l'un des systèmes gradients répertoriés par la théorie.

C'est là une hypothèse bien audacieuse ; il n'est pas toujours possible, comme en optique, de la justifier par une théorie physique, on peut lui refuser tout crédit. Cependant, on peut tenter, dans certains cas, de la valider par l'argument suivant. Une forme est le lieu des points séparant deux phases distinctes par le changement d'une au moins de leurs propriétés. Supposons qu'en tout point de cette forme, s'annulent certaines tensions, de sorte que cette forme soit l'image d'un attracteur particulier de la dynamique d'évolution qui a conduit à la création de la forme étudiée. Supposons de plus que, sur cet attracteur, les vitesses d'évolution soient extrêmement faibles. Alors on peut conjecturer que la composante gradient totale du champ de vecteurs dx/dt définit, de manière très locale, la forme de l'attracteur.

Pour pouvoir accepter le bien-fondé de cette thèse, nous admettrons, comme il a été démontré en dimension 2, que tout champ de vecteurs est un mélange d'un champ de vecteurs gradients défini par la fonction potentielle V, et d'un champ de vecteurs conservatifs qu'on peut décomposer en champs hamiltoniens. Un champ hamiltonien est un champ de vecteurs caractérisé par deux propriétés : l'énergie H est d'une part constante sur chaque trajectoire, s'écrit d'autre part comme la somme d'une énergie potentielle U et d'une énergie cinétique $T (H = U + T)$. Au voisinage de l'attracteur, les vitesses qui déterminent les valeurs de l'énergie cinétique tendent vers 0 : le champ hamiltonien tend donc à se comporter de plus en plus comme un champ de gradients. Finalement, sur l'attracteur, le champ serait localement équivalent à un champ de gradient caractérisé par la fonction potentiel $V + U$. Les attracteurs d'un champ de gradients structurellement stable sont des points. Le lieu de ces points définirait ainsi l'attracteur de la dynamique donnée. La forme en un point de cet attracteur, c'est-à-dire la courbure locale en ce point serait naturellement définie à travers la direction des vecteurs vitesses au voisinage immédiat du point.

Il existe d'autres arguments pour justifier l'emploi de la théorie des catastrophes (cf. par exemple [3]). Certains d'entre eux sont tirés de l'histoire et de la psychologie de l'invention. D'autres font appel à des raisons ontologiques et mathématiques : l'argument ontologique repose sur la constatation que la nature est économe de ses moyens, choisit les voies les plus courtes et les plus stables, et ne manque pas d'utiliser les mêmes solutions éprouvées à différents étages de ses constructions. La théorie mathématique offre par ailleurs une classification des applications stables selon une complexité croissante. Le couplage entre l'argument ontologique et le résultat mathématique permet de comprendre, sans trop de réticences, pourquoi il est naturel de retrouver si fréquemment la présence d'un certain nombre d'applications d'expression classique dans les modèles mathématiques courants, et pourquoi le risque d'erreur à leur emploi est faible.

Il n'en reste pas moins vrai que si l'on admet la validité d'un modèle inspiré de la théorie des catastrophes, le problème reste posé des origines et de la détermination sur des bases physiques acceptables des diverses énergies potentielles qui entrent en jeu.

8. Il est par ailleurs clair que, dans le cadre de la description géographique précédente, même s'il existe des liens entre eux, nous sommes en présence de deux modèles bien distincts correspondant à deux phénomènes physiques différents. Le premier étudie, liée à la texture du sol, l'apparence de la superficie terrestre, le second, la forme globale du relief. Il est alors permis de croire qu'en Biologie, la connaissance des mécanismes biochimiques locaux, de la vie cellulaire et intracellulaire, qui se rapportent en quelque sorte à la surface des êtres vivants et se trouvent être décrits par des modèles du premier type, est insuffisante en elle-même pour expliquer les nombreuses variantes des morphologies que l'on rencontre.

9. La théorie des catastrophes *élémentaires* fait appel à des dynamiques gradients dont les propriétés numériques sont le plus souvent, et dans l'état actuel des choses, inconnues. Pour cette raison, la plupart des descriptions faites dans ce langage restent pour l'instant qualitatives, et décrivent tout au plus des formes, sans grande considération à l'égard de leurs propriétés métriques.

On peut songer à faire appel à des dynamiques beaucoup plus générales afin d'imaginer et de construire, plus ou moins *a priori,* selon une logique en partie dictée par les propriétés topologiques des systèmes dynamiques, une représentation de l'évolution des phénomènes vitaux. L'idée de cette construction se situe dans une ligne de pensée dont il faut rechercher l'origine dans un passé très lointain, puisque, selon les Egyptiens, « le Livre de la Nature s'écrit en termes de Géométrie ». L'œuvre maîtresse de Descartes, pour le physiologiste, est son traité « De l'Homme » ; l'influence de cet ouvrage fut déterminante jusqu'au début de ce siècle (on la perçoit encore à travers la découverte par Sherrington de l'arc réflexe). Ce traité s'articule autour de constructions à la fois géométriques et mécaniques. Il a donc sa place dans la liste des grands ouvrages auxquels nous devons faire référence.

Les représentations en termes de topologie dynamique de certains phénomènes vitaux procèdent de la même démarche de pensée que celle suivie par Descartes. Cependant, dans l'optique présente, il ne s'agit plus, pour le théoricien, de définir les rouages de la mécanique humaine, ce terme mécanique ne devant pas, bien sûr, être pris au sens littéral du terme. L'objectif est d'arriver à donner une représentation condensée, complète et cohérente de la dynamique du corps et de ses différentes parties. Une telle représentation a valeur explicative, par sa cohérence même, par la logique des règles mathématiques qui permettent de comprendre la nature des comportements locaux, leur enchaînement, l'articulation des parties au sein du tout.

Les modèles différentiels employés ne sont pas et ne peuvent être explicites, dans l'état présent de nos connaissances sur le vivant tout du moins. Dans l'immédiat, l'intérêt que présentent ces modèles se situe moins sans doute dans leur valeur explicative, encore bien sujette à caution, que ***dans l'emploi et la diffusion d'un langage nouveau,*** adapté par sa nature même à la description des caractéristiques principales des phénomènes en évolution.

10. Lorsqu'on examine les raisons des différenciations sociales, on s'aperçoit que trois facteurs interdépendants jouent un rôle prépondérant : un *facteur d'activité* qui prend l'apparence, en économie, du rendement ou de la productivité ; un *facteur de fonctionalité* lié aux nécessités du moment pour l'individu et à celles de l'avenir pour l'espèce ; un *facteur d'intégration combinatoire et créative* lié aux possibilités d'acquérir des données sur l'état de l'environnement, de les combiner entre elles et d'en déduire des nouveautés, des innovations comme disent parfois les économistes. Naturellement, la présence de capacités et de ressources énergétiques sert de dénominateur commun à ces trois facteurs.

Tout porte à croire, qu'au niveau biologique, les mêmes facteurs sont potentiellement présents. Un des facteurs clefs est le facteur d'activité par lequel certains processus se déroulent plus rapidement que d'autres dans certains milieux, ce qui leur donne un avantage définitif sur d'autres processus plus lents.

Cette donnée conduit à considérer des modèles où le facteur temps opère sur différents paramètres selon des modalités distinctes. On est alors amené à envisager l'existence de plusieurs paramètres temporels, $T_1, T_2, \ldots, T_k$ éventuellement liés entre eux par des relations fonctionnelles, en même temps qu'une dépendance des paramètres X_i ou U_j à l'égard de ces paramètres temporels.

On obtient ainsi des modèles différentiels assez complexes, sans doute mieux capables de rendre compte de l'émergence de situations nouvelles par bifurcations locales après variation d'un ou plusieurs paramètres T_k, et de saisir les influences mutuelles des différentes parties.

Les trajectoires que l'on obtient ne dépendent plus alors d'un seul paramètre temporel, mais de plusieurs d'entre eux, de sorte que les représentations mathématiques des évolutions ne sont plus de simples courbes, des variétés de dimension 1, mais plus généralement des variétés de dimension p.

Les mathématiciens étudient pour l'heure les propriétés de certains de ces modèles, mais il n'en n'existe pas, à notre connaissance, qui soient construits sur des bases expérimentales. On notera, une fois de plus, le décalage entre la date où la théorie mathématique prend corps, et celle où l'on parvient à l'usage pratique de cette théorie.

11. Enfin, dans aucun des modèles que nous avons décrits jusqu'à présent, n'apparaît l'écriture d'une contrainte d'optimalité liée à une moindre dépense d'énergie. Il s'agit certainement d'une lacune, souvent grave.

Une théorie où figure une telle contrainte parvient en général à de beaux succès. C'est le cas par exemple de la théorie des bulles de savon étudiée par J.E. Taylor [4], elle retrouve toutes les formes possibles des bulles. Il est très vraisemblable qu'une bonne théorie de certaines morphologies végétales devrait tenir compte de la présence d'une sorte de tension superficielle intracellulaire, et de la nécessité de minimiser les dépenses variées d'énergie que doivent faire les plantes pour persister dans leur être.

La complexité et le manque de maîtrise des phénomènes laissent peu d'espoir de voir apparaître, dès demain et dans le domaine biologique, des modèles aussi complets et fiables. Mais dans la mesure où leur construction est souhaitable et possible, il faut envisager l'avenir, aussi lointain soit-il, avec quelque optimisme. Alors aura-t-on vérifié, une fois de plus, l'influence déterminante d'un cadre de pensée théorique sur le développement de la science expérimentale.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C.P. BRUTER — Sur la modélisation, *Séminaire P. Samuel, Publ. Math. d'Orsay.* N° 86.74.16, chap. 2, 8-19.

[2] C.P. BRUTER — De l'usage des modèles, texte d'une conférence faite à Louvain, février 1978.

[3] C.P. BRUTER — The theory of catastrophes : some epistemological aspects, *Synthese* 39 (1978) 239-315, en Français : La théorie des catastrophes : défense et illustration, *Economie Appliquée,* Tome XXXII, n^{os} 2-3, 1979.

[4] J.E. TAYLOR — 1) The structure of singularities in soap-bubble-like and soap-film-like minimal surfaces.

2) The structure of singularities in solutions to ellipsoidal variational problems with constraints in R^3. *Annals of Math.* 103 (1976) 489-539 et 541-546.

DISCUSSION

J. DE PRINS : Je voudrais faire deux commentaires, et poser une question :

1) Le choix entre une description continue ou discontinue peut se faire au niveau du modèle. Même en utilisant un modèle continu, il est impossible de se donner un mode opératoire permettant une « mesure continue ». Autrement dit, la mesure sera nécessairement discrète.

2) La dérivée est du point de vue expérimental, une opération imprécise sinon impossible, dès que l'on admet la présence d'erreurs ou de bruit. Ceci n'empêche évidemment pas son utilisation dans un modèle, mais son emploi doit être évité dans la comparaison modèle-expérience.

3) Qu'entendez-vous par « intuition » ? Je peux en effet difficilement admettre que la force soit un concept intuitif.

C.P. BRUTER : J'ai exprimé, sur les deux premiers points, au cours de l'exposé oral, et dans l'exposé écrit, des positions voisines de celles de Monsieur DE PRINS. Je réponds maintenant à sa question.

Je serais très étonné que la notion d'effort n'existât pas dans toutes les langues. Lorsque nous courons, lorsque nous lançons, tirons, poussons, nos muscles travaillent, et la dépense énergétique est fonction du travail accompli. Tant que cette dépense n'atteint pas un certain seuil, le corps continue allègrement son exercice. Une fois ce seuil franchi, nous éprouvons, notamment après un effort prolongé d'intensité suffisante, une sensation de fatigue. C'est au cours de tels efforts prolongés que peuvent s'élaborer lentement la perception et les notions de force et de travail.

La mécanique du corps est de nature électrique et chimique. La mécanique chimique est la moins fine et la plus facilement perceptible et représentable. Pour cette mécanique, comme je l'ai rappelé au cours de l'exposé, les forces sont proportionnelles aux vitesses de transport des produits chimiques. (C'est dans cette propriété qu'il faut vraisemblablement trouver l'origine des affirmations estudiantines selon lesquelles les forces sont proportionnelles aux vitesses, proposition fausse en mécanique newtonienne).

Naturellement, la perception de ces forces est très discrète. Il faut se mettre à une écoute très attentive du corps pour en déceler parfois l'activité interne et locale. Comme tous les instruments de mesure, nous ne réagissons qu'aux différences : différences entre états énergétiques, différences de tensions. La notion de force elle-même est souvent conçue comme le gradient d'une énergie (potentielle). Dans la mesure où notre système nerveux, en parallèle avec le reste de notre corps, établit par sa fonction régulatrice une simulation, une représentation de notre milieu interne, il est naturel qu'au niveau inconscient, si ce n'est au niveau conscient, se constituent les notions d'énergie et de force.

Dans la mesure où une énergie, une force, ne sont guère matérialisables autrement que par des artéfacts à la Lord Kelvin, et restent difficiles à saisir par les sens, on comprend que les notions correspondantes, dont les origines sont obscures et très lointaines, aient mis tant de siècles à prendre forme dans notre pensée. Il est piquant, par ailleurs, de voir les plus matérialistes d'entre nos savants manier avec une parfaite innocence de pareilles entéléchies.

Selon le Robert, le terme intuition est employé dans le sens suivant : « sentiment plus ou moins précis de ce qu'on ne peut vérifier, de ce qui n'existe pas encore ». Cette définition est à peu près satisfaisante. Le « ce qui n'existe pas encore » mérite bien sûr d'être précisé en ajoutant « dans le monde des réalisations matérielles et au niveau conscient ». L'intuition établit la présence de quelque chose au niveau subconscient où les contours de l'objet sont peu apparents, les propriétés peu visibles.

Quant au « sentiment » dont parle Robert, il est l'expression de toute une activité mentale de représentation qui ne peut s'exprimer tant qu'un niveau d'élaboration satisfaisant n'est pas atteint. Lorsque ce niveau est atteint, l'objet mental correspondant est dans un état de stabilité suffisant pour être saisi, son état énergétique avoisine un maximum, l'état d'équilibre atteint par l'objet est ressenti par le corps qui a tendance à se placer dans un état d'équilibre semblable, traduit et exprimé par notre sensibilité physiologique sous la forme d'un affect.

A. PACAULT : Ne vouliez-vous pas dire qu'en plus des contraintes ou éventuellement des conditions initiales introduites dans les équations différentielles, il serait souhaitable d'introduire des conditions d'invariance ou d'extrémums ? Or, c'est une méthode qui a été déjà très efficace en physique.

C.P. BRUTER : En effet, les modèles différentiels dont j'ai donné la liste sont définis par des équations locales. Lorsque le milieu est « homogène » pour ces équations locales, le problème auquel elles correspondent admet, dans le cas d'équations aux dérivées partielles, une sorte de formulation duale, dite variationnelle, qui exprime la valeur locale d'une énergie définie sur tout le milieu et que minimise la solution du problème.

Dans le cas biologique, la situation est souvent très complexe. Une contrainte globale, par exemple minimiser sur un domaine donné un vecteur énergétique, induit, selon l'équilibre qui règne entre les composantes de ce vecteur, des variations des paramètres associés à des milieux locaux ; ces variations peuvent engendrer des bifurcations de dynamiques qui les représentent, bifurcations qui correspondent à des modifications dans les compositions et dans les activités de ces milieux.

Il sera sans doute utile un jour de formuler les problèmes en utilisant les langages du calcul variationnel, de la théorie du contrôle optimal (cf. l'exposé de Ekeland), et celui de la théorie des jeux différentiels. En particulier, les problèmes de régulation peuvent parfois se formuler dans le langage variationnel : on en revient alors à une forme globale, analogue à une énergie, dont il s'agit de préserver la constance sur le milieu défini par un ensemble de données topologiques et de contraintes métriques. On retrouve ici ce qu'on pourrait appeler le problème du finalisme sous forme restreinte, problème sur lequel on ne pourra pas très longtemps rester aveugle.

J. DEMONGEOT : L'introduction de plusieurs paramètres temporels, indépendants ou fonctionnellement liés, permet-elle de construire des modèles rendant compte de la liaison éventuelle, évoquée par M. Queiroz dans son exposé, entre rythmes rapides et rythmes lents (de la glycolyse par exemple) ? De tels modèles existent-ils déjà ?

C.P. BRUTER : La réponse à la première question est positive, à la seconde négative (à ma connaissance). Il est probable que les modèles les plus faciles à construire seront des modèles couplant deux activités s'exerçant dans des milieux spatialement bien distincts et éloignés : par exemple, on pourra peut-être coupler sans trop de difficultés une activité de production hormonale dans le cerveau avec un mécanisme contrôlé en partie par l'action de l'hormone spécifiée.

De toute façon, l'étude mathématique des systèmes différentiels dépendant de paramètres multidimensionnels n'est pas très avancée. Le cas multidimensionnel étudié à l'heure actuelle sous le nom de feuilletage est une généralisation du cas unidimensionnel des champs de vecteurs sans singularité ; or ce sont les singularités qui sont les plus intéressantes, puisqu'en leurs voisinages les morphologies dynamiques changent souvent de propriétés. L'étude des feuilletages avec singularité n'a été enterprise que récemment (en particulier par Malgrange).

R. THOM : Où figurent dans les trois facteurs de différenciation sociale, l'inertie sociologique et l'hérédité biologique ?

C.P. BRUTER : La réponse à cette question pourrait être étayée par d'abondants exemples. Il faut ici résumer.

L'inertie sociologique, comme l'hérédité biologique, sont présents dans chacun des facteurs qui pèsent sur la différenciation sociale. Examinons le cas du facteur d'activité.

Toutes les sociétés ont donné une place importante, dans tous les domaines, au principe de la course. Ainsi, récompenses, choix et promotions, souvent à travers des concours, ont en partie pour fondement la rapidité d'exécution du postulant.

Les régimes humoral et hormonal d'un sujet sont, en majeure partie, imposés par les tendances de son hérédité biologique. Les médecins reconnaissent certains types de tempérament. (Naturellement, à travers ces régimes physiologiques, certaines indolences peuvent se manifester, à la suite de traumatismes affectifs, de déséquilibres diététiques, de réactions aux variations climatiques, et ne peuvent être mises sur le compte de l'hérédité.)

Il faut bien sûr tenir compte de la spécificité des activités, bien qu'il existe entre elles une certaine corrélation : une simple allusion aux héros d'Astérix suffit pour illustrer ce propos. Naturellement, selon les cas et les circonstances, l'inertie sociologique comme le facteur biologique peuvent au contraire être des freins à la différenciation sociale.

Les deux autres facteurs de différenciation sont passibles du même traitement. Je me propose de reprendre la question dans un autre texte. (Sur quelques facteurs de la différenciation socio-économique, *Economie Appliquée*, Tome XXXII, n^{os} 2-3, 1979).

L. BAILLAUD : Au début de votre exposé vous avez énoncé une relation entre le caractère vrai d'une idée et sa durée. Il arrive souvent que la relation aille dans l'autre sens : plus une idée est ancienne, et plus on la considère comme vraie. Un argument fréquemment invoqué en faveur de l'astrologie est que ses fondements remontent à la nuit des temps (or l'astrologie, qui traite des relations entre la marche rythmée des astres et le système biologique humain n'est pas loin d'être une forme de science des rythmes biologiques : force est de constater qu'il y a plus d'adeptes de l'astrologie que de membres du Groupe d'Etude des Rythmes Biologiques !). En science même, cela dépend des domaines ; dans certains cas le chercheur a tendance à considérer comme vraies les idées dont il a été imprégné à un certain âge, et, au cours des décennies un chapitre pourra donner en permanence l'impression de reposer sur des bases établies 10 ou 20 ans plus tôt ; parfois la situation est plus simple : Emberger pouvait parler d'une pure et simple « promotion à l'ancienneté » des théories scientifiques. (Notez que mon commentaire ne se veut pas trop affirmatif !)