

CLAUDE P. BRUTER

ÉNERGIE & STABILITÉ

ÉLÉMENTS DE PHILOSOPHIE NATURELLE ET
D'HISTOIRE DES SCIENCES

Éditeurs (de langue française) :

Les matroïdes Dunod, Paris, 1970

Sur la Nature des Mathématiques Gauthier-Villars, Paris, 1973

Topologie et Perception T.1 bases philosophiques et mathématiques 2ème édition 1985
T.2 aspects neurophysiologiques 1976
T.3 considérations socio-psychologiques et linguistiques
Maloine-Doin, Paris 1986

Les Architectures du Feu Flammarion, Paris, 1982

De l'Intuition à la Controverse Blanchard, Paris, 1987

Comprendre les Mathématiques Odile Jacob, Paris, 1996

La Construction des Nombres Ellipses, Paris, 2000

En tant qu'éditeur:

Modèles et Transformations Polytechnica, Paris, 1993

Mathematics and Art III Cassini, Paris, 2015

Mathematics and Art IV Cassini, Paris, 2018

Chez d'autres éditeurs européens :

Éléments de la Théorie des Matroïdes Lecture Notes 387 Springer, Berlin, 1974

Compreender as Matemáticas Instituto Piaget, Lisbon, 2000

En tant qu'éditeur:

Théorie des Matroïdes, Actes de la Rencontre Franco-Britannique 14-15 Mai 1970
Lecture Notes 211, Springer-Verlag 1971

Bifurcation Theory, Mechanics and Physics (avec A. Aragnol et A. Lichnerowicz)
D.Reidel Publ. Cy, Dordrecht, 1983

Mathematics and Art Springer, Berlin, 2002

Mathematics and Modern Art Springer Berlin, 2012

Avis au Lecteur

Le texte original de cet ouvrage, écrit sous Microsoft Word, n'est plus disponible. Sa conversion à l'époque en pdf a engendré parfois quelques défauts de notation. De la sorte, les points d'interrogation présents dans les formules mathématiques des pages 15, 37 et 75 devront chacun être remplacés par 2. Il se pourrait que le lecteur rencontre encore une ou deux fautes de frappe comme par exemple "ne" au lieu de "en". Je lui présente mes plates excuses. Nul doute toutefois qu'il se fera un plaisir de les corriger.

Un mot sur l'intérêt, dans ce texte, porté à la stabilité. Il vient d'abord de ma rencontre avec Thom. Je lui suis d'abord reconnaissant de m'avoir dirigé vers André Avez, disparu récemment, sans bruit de la part de la communauté mathématique, je lui rends ici hommage. En me donnant le sujet de ma seconde thèse¹, Avez m'a fait pénétrer dans la théorie des systèmes dynamiques; la notion de stabilité y occupe une place éminente. À cette époque, sous l'influence de la mode du structuralisme, la notion de stabilité structurelle occupait une place prépondérante dans les esprits. Thom, dans ses écrits, ne parle essentiellement que de celle-ci. J'ai senti la nécessité d'aller au delà de ce point de vue restrictif.

Mes lectures de Platon m'ont encouragé dans ce sens. Thom, dans ses écrits, ignore pratiquement Platon. Son philosophe favori est Aristote. J'ai, au contraire, été subjugué par le charme de Platon, sa sensibilité, sa pénétration, son style, son élévation. Thom cite Spinoza, «chaque chose ...». Il ignorait Platon qui avait formulé la même idée, mais de manière bien plus complète.

Permettez-moi de reprendre ici quelques lignes d'un article à paraître dans les actes du dernier colloque de l'Institut Collégial Européen et intitulé «De l'humanisme à la métamorphose»: «Le texte qu'avec votre permission j'entreprends alors de lire aujourd'hui s'inscrit dans une tradition qui remonte à la nuit des temps. La définition du terme tradition qu'affiche Wikipédia ne manque pas d'intérêt: «Dans son sens absolu, la tradition est une mémoire et un projet... le souvenir de ce qui a été, avec le devoir le transmettre et [je souligne ici ce dernier terme] de l'enrichir.» Dans ma vision des choses, la présence du phénomène « tradition » trouve ses racines dans le principe universel de stabilité. Ce principe, Platon est, je

crois, le premier à l'avoir énoncé. Je lui donne aujourd'hui cette formulation rapide plus générale: «Tout objet s'efforce de préserver son «Moi», à travers l'espace et à travers le temps». Un «Moi» entre guillemets, difficile à définir sinon comme une singularité qui peut se déployer différemment à travers l'espace et au cours du temps. L'objet ici, dans le sens très général donné à ce terme, est le souvenir du passé. Le maintenir, le transmettre, n'est-ce pas lui assurer une forme de stabilité spatio-temporelle ?

Cette activité de maintien et de transmission, que ne récusera pas l'historien, mais que l'on peut juger mortelle, n'est-elle pas conforme à l'observation première de Platon que je viens d'évoquer, et dont il nous fait part dans le Banquet : *«Car c'est encore ici, comme précédemment, le même principe d'après lequel la nature mortelle cherche toujours, autant qu'elle le peut, la perpétuité et l'immortalité, mais elle ne le peut que par la génération»* (Banquet 207 d).

La génération permet de transmettre. Platon n'évoque pas toutefois l'enrichissement, introduite dans la définition précédente de la tradition, nécessaire pour se maintenir, pour faire face aux *« facéties des tourbillons quelquefois cartésiens du ciel et de la vie »*. Facéties permanentes, diverses, aux visages multiples qui, elles aussi, s'enrichissent, et constamment.»

Gometz, le 19 Mai 2017

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS.....	2
Chapitre I LE POUVOIR DU MONDE SYMBOLIQUE..	5
Chapitre II L'ÉNERGIE.....	8
.. II.1 L'émergence du concept et du terme en physique....	9
II.1.1 <u>Des notions équivalentes au temps d'Aristote ?</u>	
II.1.2 <u>XIVe jusqu'à la fin du XVIIIe siècle</u>	
II.1.3 <u>XIXe siècle</u>	
II.2 Une propriété essentielle de l'énergie physique : l'invariance.....	30
II.2.1 <u>La conception des Anciens : une vision globale et immuable</u>	
II.2.2 <u>Introduction du point de vue local: l'équilibre, depuis Archimède jusqu'au XIXe siècle</u>	
II.2.3 <u>Le principe de la conservation de l'énergie</u>	
II. 3 Force et Energie.....	47
II.3.1 <u>Le regard local : la force</u>	
II.3.2 <u>La classification et la décomposition des forces</u>	
II.3.2.1 <u>L'aspect phénoménologique</u>	
II.3.2.2 <u>L'aspect formel</u>	
II.3.3 <u>Le point de vue global : l'énergie</u>	
Chapitre III LA STABILITÉ.....	62
III.0	
Introduction.....	63
III.1 La stabilité (relative) : le concept et le terme au cours de l'histoire	64
III.2 La stabilité absolue ou l'invariance.....	85
III.2.1 <u>Dans le monde observable</u>	
III.2.2 <u>Le cas de la physique théorique ou physique mathématique</u>	
III.2.3 <u>Mathématiques et invariance</u>	
III.2.4 <u>Sur l'invariance par symétrie comme critère de stabilité</u>	

III.3 Singularité, extrémalité et bifurcation, ou, les attributs de la stabilité.....	95
III.3.1 <u>La singularité et l'extrémalité</u>	
III.3.2 <u>La bifurcation et la restructuration</u>	
III.3.2.1 <i>L'idée de bifurcation</i>	
III.3.2.2 <i>Déstructuration et restructuration</i>	
III.3.2.3 <i>La rupture de symétrie en tant que bifurcation</i>	
III.3.2.4 <i>Sur l'inventaire et l'emploi des formes de bifurcation</i>	
III.4 Le caractère fonctionnel de la stabilité et les questions philosophiques attenantes.....	117
III.4.1 La question de la continuité	
III.4.2 <u>Un aspect fonctionnel de la stabilité : la stabilisation par création d'un organe de régulation</u>	
III.4.3 <u>Le principe métaphysique de stabilité</u>	
Chapitre IV PLATON	
un des fondateurs de la démarche scientifique.....	128
IV.0 Introduction.....	128
IV.1 Méthodes pour découvrir la cause et trouver l'explication.....	132
IV.1.1 <u>La vocation scientifique de Platon</u>	
IV.1.1.1 <i>La recherche de la cause</i>	
IV.1.1.2 <i>La recherche de la preuve : la démonstration</i>	
IV.1.2 <u>Les règles méthodologiques de Platon</u>	
IV.1.2.1 <i>Définir</i>	
IV.1.2.2 <i>Classifier</i>	
IV.1.2.3 <i>Le savant procède par synthèse et analyse, et recherche l'universel</i>	
IV.1.2.4 <i>La méthode hypothétique</i>	
IV.1.2.5 <i>La méthode analogique</i>	
IV.2 Quelques concepts apparaissant dans l'œuvre de Platon occupant une place éminente dans la philosophie naturelle de notre temps.....	156
IV.2.1 <u>De la Sensation à l'Empreinte, à la Représentation</u>	

IV.2.2	<u>Le Lieu, la Place, le Réceptacle : l'Espace</u>	
IV.2.3	<u>Le Mouvement</u>	
IV.2.4	<u>La Lutte, la Guerre : le Défi</u>	
IV.2.5	<u>La Stabilité : le Principe de Platon</u>	
IV.2.5.1	<i>Le principe</i>	
IV.2.5.2	<i>Finalité et extrémalité</i>	
IV.2.5.3	<i>Rareté et singularité versus densité</i>	
IV.2.5.4	<i>Tempérance, démesure, contraire, harmonie : régulation</i>	
IV.2.5.5	<i>Le changement d'état : l'instant, la bifurcation</i>	
IV.2.6	<u>Platon et la physique théorique</u>	
IV.2.7	<u>Le Hasard, la Nécessité, et les antinomies platoniciennes</u>	
 APPENDICE I.....		193
APPENDICE II.....		199
APPENDICE III.....		207
 BIBLIOGRAPHIES		
Chapitre I & II		210
Chapitre III		216
Chapitre IV.....		220

Avant-propos

Le contenu des enseignements est, en général, d'une qualité technique remarquable. Il présente pourtant souvent, à mon sens, au moins deux faiblesses de conception, liées entre elles, et qui semblent s'être de plus en plus profondément ancrées au cours de ces deux derniers siècles. La première faiblesse vient de la présence excessive de l'abstraction au dépens du réalisme et du pragmatisme, et donc au dépens de la simplicité et de l'accès à une première compréhension immédiate. Cet enseignement s'accompagne par suite, et également, d'une forme de présentation autoritaire et d'assujettissement au dogmatisme qui détournent l'esprit de la réflexion sur les fondements des sciences. Une expérience de Maxwell en témoigne : l'appendice 1 la relate. De ces défauts résulte probablement, si l'on se place d'un point de vue global, qu'à partir des années 1840 environ, la science française par exemple s'est montrée finalement moins profondément créative que ses autres consœurs européennes : si Newton est anglais, la formation d'Einstein est allemande ; l'histoire ne manque pas de souligner l'étendue des discussions d'ordre philosophique que le jeune Einstein eut avec ses mentors et avec ses amis. Dans ces deux écoles, la philosophie naturelle a toujours occupé une place à part entière, elle a contribué à rendre la pensée féconde, a servi de terreau fertile à l'éclosion des théories physiques modernes – théorie de la relativité, théorie quantique, théorie des cordes. En témoigne, par exemple, le nombre élevé d'articles très importants parus dans les journaux britanniques portant le terme *philosophical* dans leur titre, et l'on sait que l'ouvrage majeur de Newton s'intitule *Philosophiae*

naturalis principia mathematica (1687). Certes, cette expression de philosophie naturelle concerne plus particulièrement le règne physique¹. Mais son acception est plus étendue, moins contraignante que le terme physique. Elle est une porte ouverte sur l'enrichissement et l'approfondissement du savoir.

La pratique de cette philosophie naturelle était également très présente chez nos savants du XVIII^e siècle : l'œuvre encyclopédique de d'Alembert et de Diderot en porte largement témoignage. Il convient assurément de la réintroduire dans la formation scientifique d'aujourd'hui. Sans doute, depuis toujours, ici ou là, divers auteurs contribuent à maintenir la vitalité locale de la philosophie naturelle. Mais leur voix est pratiquement sans effet. Seul un enseignement officiel plus largement répandu, consistant, pourrait conduire à des résultats bénéfiques.

Le contenu de cet opuscule introductif apporte une fort modeste contribution à la réalisation d'un tel projet. L'aspect conceptuel y est privilégié par rapport à tout autre. Un premier chapitre, court, insiste sur le poids du symbolisme dans notre relation avec le monde.

Le thème que je n'aborde pas est celui de la nature de l'espace, mais il est bien sûr présent en filigrane. L'énergie en est un attribut essentiel : un chapitre lui est consacré. L'historique de la notion s'étend jusqu'au moment où le terme s'impose, peu après 1852.

Le second concept abordé ici, aussi important que le précédent, est celui de stabilité. Energie et stabilité entretiennent des rapports étroits. Ces deux concepts jouent un rôle majeur dans la représentation et la compréhension des phénomènes.

¹ Extrait du *Treatise on Natural Philosophy* [58] :

« PREFACE.

Les causes primordiales ne nous sont point connues ; mais elles sont assujetties à des lois simples et constantes, que l'on peut découvrir par l'observation, et dont l'étude est l'objet de la philosophie naturelle.- Fourier.

The term Natural Philosophy was used by NEWTON, and is still used in British Universities, to denote the investigation of laws in the material world, and the deduction of results not directly observed. ... »

L'ouvrage se conclut sur une présentation condensée de l'œuvre de Platon, où l'on voit apparaître, souvent encore en arrière-plan, les problématiques et les concepts fondamentaux de la science moderne, où l'on voit éclore les pratiques intellectuelles qui ont modelé son développement : une œuvre fondatrice et cruciale dans l'histoire de la pensée scientifique.

C.P. BRUTER

Gometz-le-Chatel, ce 22 Janvier 2006

(revu ce 1^{er} Juin)

Chapitre I

LE POUVOIR DU MONDE SYMBOLIQUE

A la recherche de la plus grande stabilité spatio-temporelle, les objets de la nature évoluent, s'efforçant de développer leurs facultés de sensation, de perception et de représentation de leur environnement, de mémorisation de ce qu'ils ont perçu, et d'analyse des représentations qu'ils ont forgées.

Rien n'est plus étonnant que l'imprégnation dans les esprits et l'efficacité opératoire du monde symbolique ainsi créé par l'homme, quel que soit l'objet de cette forme de représentation, qu'elle se rapporte aux composantes de l'univers physique, ou bien à celles des sociétés et des activités humaines. Dans toutes les activités de l'homme, le monde symbolique qu'il a édifié, le subjugue, le gouverne.

Il est remarquable également que ce phénomène ait été si peu mis en exergue, si peu étudié. Les Anglais ont quelque peu flirté avec lui qui, au XIX^e siècle, parlaient d'une « Algèbre symbolique ». Seul, à ma connaissance, et en se tenant au seul domaine de la physique, le grand épistémologue Pierre Duhem l'a évoqué en ces termes dans son livre *La théorie physique, son objet sa structure* [19]:

Donc, lorsqu'un physicien fait une expérience, deux représentations bien distinctes de l'instrument sur lequel il opère occupent simultanément son esprit ; l'une est l'image

de l'instrument concret qu'il manipule en réalité, l'autre est un type schématique du même instrument construit à l'aide de symboles fournies par les théories ; et c'est sur cet instrument idéal et symbolique qu'il raisonne, c'est à lui qu'il applique les lois et les formules de la Physique.

La mise en place de l'univers symbolique s'accomplit en deux grandes étapes. La première accompagne la gestation, souvent longue, des concepts. La seconde, plus brève, établit un symbolisme attaché à ces concepts, puis l'exploite.

Les racines de la première étape plongent dans le passé le plus lointain. Les écrits des Anciens révèlent parfois leur présence, souvent sous-jacente, encore masquée. Concepts encore très vagues, ils trouveront bien plus tard une manière d'incarnation en des formes et dans des situations précises. Une sorte de totipotence les caractérise, d'autant plus marquée qu'ils se veulent universels.

Dans le domaine de la connaissance scientifique du monde physique qui, principalement, nous occupera ici, deux concepts paraissent occuper une position dominante. Chacun d'eux est accompagné d'un petit cortège de concepts parents de grande qualité : ils dévoilent les facettes du concept fondateur ; ils le préfigurent souvent. Ils peuvent apparaître comme des spécialisations de ces concepts fondateurs.

Parmi ces derniers, l'énergie et la stabilité occupent une position centrale. Ils forment un couple inséparable. Si l'énergie semble se rapporter davantage à l'espace, à la matière, la stabilité paraît se rapporter plus au temps, à la durée. La stabilité possède la vertu d'être un principe dynamisant et organisateur. Platon, qui célébrait l'harmonie révélée par la proportion, aimait pratiquer ce type de formulation : la stabilité est à l'énergie ce que l'éthique est à la société.

L'énergie a beau être impalpable, le concept devient opératoire à travers les symbolismes qui le représentent. Un symbolisme peut avoir une signification

globale, comme par exemple la lettre **E**. Il acquiert un statut local et précis lorsqu'il se différencie et prend la forme du nombre. Pas davantage que la force, cette « entéléchie » comme l'avait bien qualifiée Leibniz, personne n'a vu davantage cette entité abstraite qu'on appelle un nombre. On n'en connaît que des représentations, différentes selon les civilisations. L'important est la sémantique qui lui est attachée. Si l'on se place du point de vue de l'inanimé qui, naturellement, a été le premier à être pris en considération, un nombre est en premier lieu un indicateur de présence spatiale et donc d'existence, il peut aussi désigner la position au sein d'un ensemble susceptible d'être ordonné, il peut aussi représenter la quantité : il désigne alors une qualité présente. Si l'on se place du point de vue de l'animé, un point de vue loin d'être encore bien assimilé par la grande majorité, le nombre représente une transformation, d'abord spatiale comme une translation, ou plus généralement comme une rotation accompagnée d'une dilatation, en bref comme une similitude : le nombre représente alors une qualité potentielle. Ce double statut, présent et potentiel, figure dans l'énergie : trois siècles de réflexion et d'expérimentation seront nécessaires avant qu'on ne parvienne à le mettre en évidence.

C'est l'histoire de cette émergence que nous allons tout d'abord suivre dans les pages qui suivent. Dans ce texte, nous dirons peu des biographies des savants qui sont mentionnés ; on les trouvera facilement sur Internet.

Chapitre II

L'ÉNERGIE

L'énergie est une donnée invisible que possèderaient tous les objets, et dont les physiciens ont affirmé l'invariance. On suit dans ce chapitre l'évolution des intuitions, des idées, des observations et des réflexions qui ont conduit à préciser cette notion.

L'étude des transformations du monde physique a été le vecteur clé de ce processus. On a commencé par étudier les transformations les plus évidentes, celles liées au simple transport spatial des corps : les mouvements, leurs causes, ou au contraire ce qui assure l'absence de mouvement par l'équilibre, sont les sujets d'étude sur lesquels se pencheront, entre autres, Aristote dans l'antiquité, Archimède, Buridan, Oresme, Galilée, Huyghens, Newton, et Lagrange au dix-huitième siècle. On assiste, au cours des siècles, à la montée de la formalisation : du discours littéraire, on passe à la représentation géométrique, support actif du raisonnement, puis, dans les derniers temps, à la représentation symbolique dans laquelle l'outil mathématique employé est l'analyse, qui traduit la géométrie dans le nombre.

A partir du dix-neuvième siècle, ce sont les transformations entre les différents modes d'expression du monde physique qui sont étudiées : on s'efforce de les représenter en faisant appel aux méthodes et avec les outils déjà éprouvés dans l'étude des déplacements des corps dans l'espace usuel. Les transformations de la chaleur en d'autres formes physiques ont tenu une grande place dans cette évolution.

Si, de tout temps, les hommes ont affirmé la pérennité globale de l'univers, c'est par l'étude locale des phénomènes de conservation qu'ils sont parvenus à démontrer ou à affirmer des énoncés généraux, parfois susceptibles d'une représentation mathématique précise. La conservation possible de l'*impetus*, de la quantité de mouvement, de l'énergie cinétique, du travail, de la puissance, qui sont des notions locales, définies et étudiées d'abord dans le cadre des déplacements spatiaux, débouche, autour des années 1840, sur la création d'une notion globale invariante, l'énergie.

Son expression sous la forme ramassée d'un lagrangien, ou de l'action associée à ce lagrangien, est une donnée première pour l'étude, la compréhension et la description du monde physique. Son extension opératoire dans les autres domaines de la science reste un souhait, largement partagé.

II.1 L'émergence du concept et du terme en physique

II.1.1 Des notions équivalentes au temps d'Aristote ?

Nul ne peut définir de manière générale la notion d'énergie : le concept est devenu aujourd'hui totipotent, il se déploie et s'incarne en autant d'objets qu'il en existe dans la nature, en autant de types de forces que l'on en vient à postuler. N'entendons-nous pas parfois parler d'« énergie psychique », d'« énergie mentale »? Apparue au XIX^e siècle dans un contexte physique précis, la notion n'acquiert un statut proprement technique qu'à partir du moment où elle devient représentée par une expression mathématique acceptée comme valide par la communauté scientifique. Cette expression représente elle-même un nombre ou un ensemble numérique que l'expérience est, en principe, capable d'authentifier.

Si l'on remonte aux Anciens, le terme de « principe » (αρχη), introduit par Anaximandre [1](611-547), et fort apprécié tant par Platon (427-347) que par son élève Aristote (384-322), est peut-être celui qui préfigure le mieux celui d'énergie dans la mesure où il désigne également parfois la matière dans laquelle l'énergie peut s'incarner.

Une autre notion proche sans doute de celle actuelle d'énergie est celle de substance (ουσια) au sens où Aristote l'entend :

Mais ce qui, plus que tout, est le caractère propre de la substance, c'est, semble-t-il bien, que tout en restant identique et numériquement une, elle est apte à recevoir les contraires. (*Organon, catégorie, 5*) [4]

Et, en vérité, l'objet éternel de toutes les recherches, présentes et passées, le problème toujours en suspens : qu'est-ce que l'être ? revient à demander : qu'est-ce que la substance ? C'est cette substance, en effet, dont les philosophes affirment, les uns, l'unité, et les autres, la pluralité, cette pluralité étant conçue, tantôt limitée en nombre, et tantôt comme infinie. C'est pourquoi, pour nous aussi, l'objet principal, premier,

unique pour ainsi dire, de notre étude, ce doit être la nature de l'être pris en ce sens.
(*Méta.*, Z, 1). [3]

Mais deux autres termes doivent également être retenus : celui de puissance ($\delta\upsilon\nu\alpha\mu\iota\zeta$) et celui d'énergie ($\epsilon\nu\epsilon\rho\gamma\epsilon\iota\alpha$), pouvant être associés, le premier davantage à des capacités potentielles, le second davantage à des capacités actantielles et actuelles de transformation.

Ce sont ces deux derniers termes qui feront leur chemin dans l'esprit et dans le vocabulaire des physiciens.

Les premières notions physiques dont on a conservé encore le sens et l'emploi sont celles de « force » et de « puissance », présentes dans les écrits Aristote (*Phys.*, VIII, 10, 266). Mais pas davantage que l'énergie, nul n'a réussi à matérialiser la force ou la puissance.

On doit à Aristote et à Archimède (287-212) les premières analyses du mécanisme du levier. Toute la théorie de l'équilibre dans le monde physique est en germe dans leur étude. Elle sera présentée dans ses traits principaux au paragraphe II.2.2, lors de l'examen de la propriété fondamentale de l'énergie.

Le parallélogramme des forces n'apparaît timidement qu'en fin du seizième siècle et de manière claire au début du dix-huitième (voir le paragraphe II.2.2) ; on notera alors avec intérêt, dans le traité de *Mécanique* qui relève de l'école d'Aristote², la présence du parallélogramme de composition des vitesses (*Mech.*2. 848^b 13-26) [32] – rappelons que pour Aristote la force était proportionnelle à la vitesse. Il convient peut-être ici de citer Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) qui, s'il commet une petite erreur historique qui n'est pas de sa responsabilité, apporte ces renseignements intéressants sur le devenir de la

² Il aurait pu être écrit par Straton de Lamsaque, dit le Physicien, qui prit la direction la direction du Lycée en 289 avant J.C..

composition des vitesses – notons que cette composition précède celle des forces qui n'apparaîtra qu'à la fin du XVI^e siècle :

Sur l'art. 32. Le premier de tous les auteurs qui nous sont parvenus, qui se soit occupé de la composition des mouvements, c'est Archimède, quand il traite des spirales. Le premier qui s'en soit servi pour expliquer l'égalité de l'angle d'incidence avec l'angle de la réflexion, c'est Képler, dans ses *Paralipomena optica*, où il décompose le mouvement oblique en un mouvement perpendiculaire et en un mouvement parallèle. C'est lui que Descartes a suivi à cet égard, aussi bien ici que dans Dioptrique. Mais c'est Galilée qui, le premier, a montré l'ample usage qu'on peut faire de la composition des mouvements en physique et en mécanique.[42]

II.1.2 Du XIV^e jusqu'à la fin du XVIII^e siècle

Jean de Buridan (1295-1360) et Nicolas Oresme (1320-1382) vont apporter des éléments phénoménologiques nouveaux, introduire des outils géométriques de représentation des mouvements qui permettront la mise en place de la mécanique analytique, quatre siècles plus tard.

Née dans les cercles scientifiques du XIV^e siècle, la théorie de l'*impetus* sera précisée et renforcée par Buridan :

je crois qu'au mobile, le moteur n'imprime pas seulement le mouvement, mais, par voie de conséquence, un certain *impetus* ou une certaine force (*vis*) ou une certaine qualité (le nom qu'on lui donne importe peu). Cet *impetus* a pour nature de mouvoir ce à quoi il est imprimé, de même que l'aimant imprime au fer une vertu qui meut le fer vers l'aimant.[20]

Il remarque aussitôt cette propriété de l'*impetus* : « Plus le mouvement est vite, plus cet *impetus* se fait intense. » Par ailleurs « plus un corps contient de matière, plus il peut recevoir de cet *impetus*, et plus grande est l'intensité avec laquelle il peut le recevoir. » Il faudra attendre trois siècles pour que Christiaan Huyghens (1629-1695), savant de tout premier plan, donne de ce concept la représentation mathématique adéquate.

Buridan réfléchit sur la manière de définir la quantité de matière que nous désignons par la masse, et aboutit à cette conclusion que Isaac Newton (1643-1727) exprimera de manière plus ramassée au début de ses *Principia* [48]:

La quantité de matière est la mesure de cette matière obtenue en multipliant la densité par le volume. ...C'est cette quantité qu'en ce qui va suivre, je désignerai parfois sous les noms de corps et de masse.

Galileo Galilei (1564-1642), Galilée pour les intimes, un des grands penseurs de la physique, humble devant l'expérience qu'il pratique autant que faire se peut, appellera l'*impetus* « *impeto* ». René Descartes (1596-1650) lui donnera le nom de *quantité de mouvement*. C'est Huyghens donc qui introduira, sous la forme mv , la représentation mathématique de cette quantité de mouvement qu'en hommage à Descartes il nomme *motus quantitas*.

Il convient ici d'introduire une parenthèse sur la représentation géométrique dont l'importance est cruciale. On doit à Nicolas Oresme les introductions de la représentation dite cartésienne et de la géométrie analytique afin de représenter par ce biais, et de manière précise, les qualités, les propriétés des objets :

toute chose mesurable doit être imaginée à la manière d'une quantité continue...., toute intensité susceptible d'être acquise d'une manière successive doit être imaginée au moyen d'un ligne droite élevée verticalement à partir de chaque point de l'espace ou du sujet qu'affecte cette intensité. ... La mesure des intensités peut donc être convenablement imaginée comme la mesure des lignes... Et cette représentation s'étend, d'une manière universelle, à toute intensité imaginable, qu'il s'agisse de l'intensité d'une qualité active ou d'une qualité non active, que le sujet ou l'objet affecté tombe ou ne tombe pas sous les sens ...

Toute qualité linéaire est figurée à la manière d'une surface dressée verticalement sur la ligne sujette [à la qualité]. Soit donc AB la ligne qui est informée par la qualité... L'altitude de cette surface représente l'intensité de la qualité.[20]

Cet énoncé est tout à fait remarquable : il révèle qu'Oresme avait en tête la notion de ce que les mathématiciens appellent un espace fibré, une notion géométrique essentielle : elle sera définie en 1941³ par Charles Ehreshmann (1905-1979).

Les coordonnées cartésiennes, abscisses, ordonnées, ont été introduites par Oresme sous les noms de *longitudino* et de *latitudino* :

Et de même qu'en général la ligne qui représente la longueur de la surface d'un corps et la ligne qui en représente la largeur se coupent à angle droit, de même l'extension de la qualité, qu'on doit nommer sa latitude, se devra imaginer perpendiculairement à la ligne de longitude de la même qualité... [20]

Plus généralement, Nicolas Oresme conçoit également des représentations multidimensionnelles. Il a employé celle à deux dimensions pour comprendre le mouvement uniformément varié.

Probablement, la notion d'accélération était présente dans l'esprit de ses prédécesseurs comme par exemple Guillaume d'Ocagne (1300-1349) ; Oresme la formule en tout cas avec clarté :

toute vitesse est susceptible de devenir plus intense ou de s'atténuer ; ce par quoi elle devient continuellement plus intense se nomme accélération (*velocitatio*) ...[elle] se produit tantôt d'une manière uniforme, tantôt d'une manière difforme, et ceci de diverses façons. [20]

Déjà connu en son temps dans un cas particulier, Oresme donne une démonstration géométrique claire de l'énoncé suivant qui sera retrouvé par Galilée – la formulation est ici celle de Pierre Duhem [20] :

³ Dans une note aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Charles Ehreshmann et Jacques Feldbau (assassiné par les nazis), tome 213, p.762-764.

lorsqu'un mobile se meut, pendant un certain temps, d'un mouvement uniformément varié, le chemin qu'il parcourt est égal à celui qu'il parcourrait en un mouvement uniforme, de même durée, dont la vitesse serait égale à celle qui est prise en l'instant moyen du premier mouvement.

Oresme d'ailleurs à un moment s'exprime ainsi :

Il est donc évident qu'une qualité ou une vitesse uniformément difforme quelconque se trouve égalée à une qualité ou à une vitesse uniforme.

Les mathématiciens rapprocheront ces énoncés de celui du théorème dit « des accroissements finis » ou encore « de la moyenne », énoncé près de quatre cent cinquante années plus tard⁴.

Il convient d'insister sur le rôle tenu par la géométrie euclidienne comme *outil symbolique de représentation* des données spatio-temporelles et des qualités des objets. Jusqu'à Newton, Leibniz et Jean Bernoulli, en passant par Oresme, Albert de Saxe (XIV^e siècle sans autre précision actuelle), Galilée, Simon Stevin, Pierre Simon de Fermat (1601-1665), Huyghens, elle sert de support à la construction de schémas, de dessins permettant de donner des explications détaillées, présentées sous la forme de démonstrations, des faits, des comportements, des évolutions. Les théorèmes de Pythagore et de Thalès standard sont pratiquement les seules propriétés employées pour aboutir aux conclusions, souvent obtenues à la suite d'analyses fouillées.

Huyghens, comme on l'a déjà annoncé, traduit en termes mathématiques, de la manière la plus simple qui soit, sous la forme mv , la *quantité de mouvement* ou *impulsion* dont Buridan avait énoncé les propriétés

⁴ Il a fallu attendre l'année 1690 pour que Michel Rolle (1652-1719) en propose une première version dans un cas particulier. Lagrange, un siècle plus tard, en 1797, lui donnera sa forme actuelle : soit $f(t)$ la position d'un cavalier sur une route, représentée à l'aide de la fonction f de la variable temps t , supposée continue et dérivable sur l'intervalle temporel $[a,b]$: la dérivée $f'(t)$ représente la vitesse de ce cavalier. Il existe un instant $\underline{t}$, à l'intérieur cet intervalle $[a,b]$, pour lequel la dérivée-vitesse $f'(\underline{t}) = M$ vérifie cette propriété : la distance parcourue sur la route par le cavalier entre les instants a et b vaut M fois la valeur de la distance temporelle $b - a$: $f(b) - f(a) = M(b - a)$.

phénoménologiques. Mais il fait bien davantage en introduisant, dans les années 1650, par le procédé géométrique il faut le rappeler, la quantité mv^2 à laquelle il ne donne pas de nom spécifique ; il lui arrive d'utiliser l'expression « *vis motus* » pour la nommer. Le premier article, posthume (publié en 1703), où apparaît cette découverte a été rédigé vers 1652 ; il porte le titre de *De Motu corporum ex percussione*⁵[34]. L'influence de l'ouvrage de Galilée, *Discorsi e Dimostrazioni matematiche intorno à due nuoue Scienze attenenti alla Mecanica & i Movimenti Locali* [26], publié à Leyde en 1638, tant dans le sujet que traite le hollandais Huyghens, que dans ses démonstrations, est manifeste – Galilée s'y intéresse à la question du choc entre deux projectiles (cf la citation qui sera donnée plus loin), et y démontre notamment le fait que, dans la chute d'un corps, la distance parcourue est proportionnelle au carré du temps mis à la parcourir.

Seul au début, le terme « *potentia* » employé par Leibniz se réfère à cette quantité mv^2 . L'expression « *vis viva* », « force vive », qu'il introduit par ailleurs avec un sens différent, après discussions entre Leibniz et les Cartésiens, sera cependant bientôt employée pour la désigner⁶. Le coefficient $\frac{1}{2}$ qui, en général, précède aujourd'hui mv^2 , a été utilisé de manière systématique par le mécanicien Gaspard-Gustave Coriolis (1792-1843) en 1829, mais on le rencontre auparavant dans le traité de *Mécanique Analytique* [39] (1788) de Lagrange (1736-1813) (à la page 337 : « quantité T qui exprime la somme de toutes les quantités $\frac{1}{2} m (\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt})$ relativement aux différents corps. »).

Au moins jusqu'au milieu du XIX^e siècle, si ce n'est encore aujourd'hui, on continuera à appeler « force vive » la quantité mv^2 . L'appellation d'*énergie cinétique* lui sera ensuite donnée par William Thomson, futur Lord Kelvin of

⁵ On trouvera une première analyse de ce travail dans l'Introduction à l'ouvrage de Michel Fichant, *La Réforme de la Dynamique* [24].

⁶ On pourra suivre l'évolution des idées de Leibniz dans l'ouvrage précité de Fichant.

Largs (1824-1907), et Peter Guthrie Tait (1831-1901), auteur avec Thomson du fameux *Treatise on Natural Philosophy* (Cambridge, 1879) [58], en fait, un beau traité de mécanique générale.

L'emploi du terme « énergie » dans un sens physique précis figure, pour la première fois peut-être, en 1717 sous la plume de Jean Bernoulli (1667-1748), dans une lettre à Varignon (1654-1722) [7]:

$F > C_p$ fait ce que j'appelle l'énergie

L'énergie, en ce sens, de Bernoulli évalue en fait le travail de la force F – ce terme *travail* sera introduit en 1828 par Coriolis – le travail est à ses yeux le concept fondamental ; Coriolis sera suivi un moment dans cette voie par le mathématicien Victor Poncelet (1788-1867). Notons que le travail est bien une forme de l'énergie : il en est une forme locale, au sens où la différentielle d'une fonction est une forme locale de cette fonction.

L'emploi du terme énergie sera long à s'implanter, à s'imposer. Ainsi, il n'apparaît qu'une seule fois dans le traité précité Lagrange, près de 70 années donc après Bernoulli, et dans un sens encore non précis ; dans l'introduction, p.20, Lagrange écrit :

Galilée entend par moment d'un poids ou d'une puissance appliquée à une machine l'effort, l'action, l'énergie, l'*impetus* de cette puissance... .[39]

Dans ces lignes, Lagrange reprend les termes de celles écrites par Galilée dans l'article 217 de ses *Discorsi* précités:

Et puisque nous reconnaissons que l'*impetus*, l'énergie, le moment ou la tendance au mouvement d'un corps mobile est aussi grande que la force ou la résistance minimale suffisante pour l'arrêter ...

Dans la suite de son texte, Galilée emploie à nouveau et à plusieurs reprises le terme *energia*, par exemple lorsqu'il écrit :

pour déterminer la force et l'énergie du choc [*forza ed energia della percossa*] ...

Le physicien anglais Thomas Young (1773-1829), dans son traité de philosophie naturelle, emploiera également le terme d'énergie pour désigner la force vive : peut-être a-t-il lu Galilée et Lagrange ? Il serait bien sûr étonnant qu'il ne l'ait point fait. Les britanniques feront parfois référence à Young comme étant le premier qui, à leurs yeux, aurait employé le terme « énergie » ...

Pierre Simon de Laplace (1749-1827) introduit en 1785⁷ le concept de potentiel ; il est précisé par le « prince des mathématiques », Carl Friedrich Gauss (1777-1855), dans sa *Théorie générale du magnétisme terrestre* (1839) [28]. Gauss, également astronome, aura travaillé sur l'électromagnétisme avec le physicien Wilhelm Weber (1804-1891)⁸. Bien qu'il note également par *V* la fonction potentiel, il est peu probable qu'il ait eu connaissance de l'essai [32] de l'étonnant George Green (1793-1841), fils de boulanger et autodidacte : en 1846, W. Thomson fera réimprimer cet essai, d'abord publié à compte d'auteur en 1828. Partant notamment des travaux de Poisson en électricité et en magnétisme, Green y présente notamment son important théorème, et y définit en toute clarté le terme potentiel et les propriétés des fonctions potentielles :

⁷ Ce renseignement est donné dans un ouvrage récent de J.-C BOUDENOT & J.-J. SAMUELLI *H.A. Lorentz (1853-1928) La naissance de la physique moderne*, Ellipses, Paris, 2005, p. 231, excellent ouvrage. On le trouve également sous la plume de Thomson et Tait, à l'article 501 de leurs *Essays on Natural Philosophy* (à ne pas confondre avec le *Treatise*) : « This function [potentiel] was introduced for gravitation by Laplace, but the name was first given to it by Green, who may almost be said to have created the theory, as we now have it. Green's work was neglected till 1846, and before that time most of its important theorems had been re-discovered by Gauss, Chasles, Sturm, and Thomson. » Laplace connaissait le traité de Daniel Bernoulli (*Hydrodynamica sive de viribus et motibus fluidorum commentarii*, 1738) qui, inspiré par la terminologie de Leibniz, introduit, par exemple, la notion de « *potentia absoluta* ».

⁸ Cf la publication de 1840, *Allgemeine Lehrsätze ...* : « Zu bequemern Handhabung der dazu dienenden Untersuchungen werden wir uns erlauben, dieser *V* mit einer besondern Benennung zu belegen, und die Gösse das *Potential* des Massen, worauf sie sich bezieht, nennen. » [29].

It is well known, that nearly all the attractive and repulsive forces existing in nature are such, that if we consider any material point p , the effect, in a given direction, of all the forces acting upon that point, arising from any system of bodies $\mathcal{S}$ under consideration, will be expressed by a partial differential of a certain function of the co-ordinates which serve to define the point's position in space. The consideration of this function is of a great importance in many inquiries, and probably there are none in which its utility is more marked than in those about to engage our attention. In the sequel we shall often have occasion to speak of this function, and will therefore, for abridgment, call it the potential function of the system $\mathcal{S}$.

Cependant, au temps où Green et Gauss publient leurs travaux, on n'emploie toujours pas le terme énergie. Mais l'heure approche.

II.1.3 Le XIX^e siècle

Le terme énergie n'apparaît pas semble-t-il dans les traités de physique jusqu'au milieu du XIX^e siècle. Ainsi, par exemple, le traité fondateur⁹ de Sadi Carnot (1796-1832) portant sur les machines à vapeur¹⁰ [16], paru en 1824, utilise la terminologie de « puissance motrice ».

Cependant, dès la fin du XVIII^e siècle, les progrès dans l'observation et dans l'expérimentation permettent de mettre en évidence de très nombreux échanges et transformations entre les diverses expressions des mondes chimique et physique ; le travail de Sadi Carnot qui vient d'être mentionné, où est établie la liaison entre le « calorique » et la « puissance motrice », en est l'une des illustrations. Carnot est peut-être le premier à avoir compris et formulé le principe de conservation de l'énergie : je renvoie sur ce point à la citation de Poincaré donnée l'Appendice I.5 et qui le concerne.

⁹ « Les droits de Carnot à notre reconnaissance sont d'un ordre excessivement élevé » énonce Tait dans sa quatrième conférence [55].

¹⁰ Notons que S. Carnot mentionne dans cet ouvrage une invention de Niepce qui préfigure le moteur à explosion. Huyghens avait également pensé à un usage voisin.

Cette question de la transformation du « calorique » en puissance mécanique ou autre va notamment occuper une place très importante dans l'esprit des physiciens à partir des années 1840.

En particulier, James Prescott Joule (1818–1889) met en évidence en 1841 l'effet thermoélectrique qui porte son nom, et, en 1842 [36], vérifie par l'expérience, tout comme Robert Mayer, la conservation de l'énergie et l'équivalence entre énergie mécanique et énergie thermique¹¹. Mais ce seront d'abord les chercheurs qui s'intéressent également au vivant, qu'ils aient donc reçu une formation supplémentaire en médecine ou en physiologie, qui, parmi les premiers, ressentent la nécessité de parvenir à établir des synthèses conceptuelles permettant d'unifier les nombreux et divers phénomènes physiques et physico-chimiques.

Toute une génération de ces savants, le plus âgé est né en 1814, le plus jeune en 1824, va concourir à introduire et à développer le concept d'énergie. Les principaux acteurs de cette saga se nomment : Julius Robert von Mayer (1814-1878), James Prescott Joule, William Rankine (1820-1872), Hermann von Helmholtz (1821-1894), Rudolf Clausius (1822-1888), et William Thomson. Le physicien et mathématicien américain Josiah Willard Gibbs (1839-1903) a été en partie formé par l'école précédente.

Mayer, Helmholtz et Clausius sont allemands, Joule, Rankine et Thomson britanniques. Ils sont tous physiciens, mais la formation première de Mayer et de Helmholtz est en médecine et en physiologie.

L'influence d'Emmanuel Kant (1724-1804), à travers ses *Premiers principes métaphysiques de la science de la nature* (1786), est présente dans ces travaux : Helmholtz le cite en note dans l'édition de 1881 de son texte fondateur. Kant, s'appuyant en partie sur les travaux des mécaniciens de son temps, tente d'établir les bases phénoménologiques des sciences de la nature. L'époque est à

¹¹ Joule et Mayer ont chacun revendiqué la priorité dans l'établissement de cette équivalence. On peut lire les courriers qu'ils se sont adressés, rédigés en excellent français, dans [47].

l'étude du mouvement mécanique : c'est plus généralement par le mouvement qu'il entend fonder sa vision du monde. Mais Kant connaît aussi les Anciens, l'œuvre des mathématiciens et des philosophes de son temps. La substance dont il parle n'est pas sans rappeler celle d'Aristote. Et pour Leibniz qui précède Kant, la notion de force est primordiale ; Leibniz s'exprime ainsi dans le *Specimen Dynamicum* :

J'ai suggéré ailleurs que les choses corporelles contiennent quelque chose d'autre que leur extension, en vérité quelque chose d'antérieur avant l'extension, à savoir la force de la nature implantée en toute chose par le Créateur.[43]

Chez Kant également, la notion de force est très présente. Kant les classe soit en forces d'attraction ou de répulsion, l'amour et la haine d'Héraclite, soit en forces vives et « forces mortes »¹². Ce faisant, il ne fait encore que reprendre la distinction et la terminologie de Leibniz. Kant insiste par ailleurs sur son théorème IV, « la loi mécanique de l'égalité de l'action et de la réaction », empruntée par exemple à Newton.

La notion de force est donc très présente dans l'esprit des philosophes et savants du XVIII^e siècle. Citons encore par exemple également ce texte de Georges-Louis Leclerc, comte de Buffon (1707-1788), dont on admirera l'ampleur de la prescience :

Les vrais ressorts de notre organisation ne sont pas ces muscles, ces veines, ces artères, ces nerfs, que l'on décrit avec tant d'exactitude et de soin ; il existe, comme nous l'avons dit, des forces intérieures dans les corps organisés, qui ne suivent point du tout les lois de la mécanique grossière que nous avons imaginée, et à laquelle nous voudrions tout réduire : au lieu de connaître ces forces par leurs effets, on a tâché d'en écarter jusqu'à l'idée ; on a voulu les bannir de la philosophie : elles ont reparu

¹² Jean Bernoulli utilise en 1723 la même terminologie : « La force vive est celle qui réside dans un corps, lorsqu'il est dans un mouvement uniforme ; & la force morte, celle que reçoit un corps sans mouvement, lorsqu'il est sollicité & pressé de se mouvoir, ou à se mouvoir plus ou moins vite, lorsque ce corps est déjà en mouvement. » [7]

cependant, et avec plus d'éclat que jamais, dans la gravitation, dans les affinités chimiques, dans les phénomènes de l'électricité...[14]

De manière apparemment indépendante, plusieurs auteurs simultanément, Mayer et Helmholtz en particulier, vont développer des idées, des théories qui vont avoir un impact profond sur le développement de la physique. Ils n'utilisent encore que le terme de « *kraft* », de « *force* », dans un sens très général, à la manière de Leibniz, Kant ou Buffon. Notons que ce terme « *kraft* », souvent correspond davantage à celui de puissance ou d'énergie.

Le texte de Mayer date de 1841 ; il s'intitule, dans sa traduction française, *Sur la détermination quantitative et qualitative des forces* [46]. Remplaçons force par énergie ; Mayer, d'inspiration vitaliste, y présente la loi de conservation de l'énergie. Le médecin puis chimiste Wilhelm Ostwald (1853-1932), dans son ouvrage sur l'énergie [49], commente ainsi l'apport de Mayer :

Ce qui, dans l'œuvre de Mayer, est le plus important du point de vue de l'étude d'ensemble que nous faisons ici, c'est qu'il conçoit les forces, c'est-à-dire, dans notre langage, l'énergie, comme une substance. La force est pour lui une réalité, un être d'une espèce déterminée et particulière ; son indestructibilité et son incréabilité sont des marques de sa réalité.

Le premier historique de la notion d'énergie a été présenté par Tait au cours de conférences faites en 1876 et traduites en français en 1886 [55]. Cet historique porte presque exclusivement sur la première moitié du XIX^e siècle ; Tait n'y ménage pas ses critiques à l'égard de Mayer. Il mentionne par ailleurs deux autres auteurs, qui, toujours dans les années 1840, n'ont pas eu la même audience que Mayer ou Helmholtz. Il s'agit d'une part de Karl Friedrich Mohr (1806-1879) : son « mémoire date de 1837 – cinq ans avant le travail de Mayer – et il contient tout ce que celui de Mayer offre d'exact, mais présenté sous une forme bien supérieure », écrit Tait. Le second auteur est le danois Ludwig A. Colding (1815-1888) : il avait l'idée du principe de conservation dont d'ailleurs

il fit part au physicien Hans Christian Oersted (1777-1851), et auquel il s'employa à donner un contenu expérimental solide. « Ceci montre, qu'au moins jusqu'à un certain point, il avait anticipé sur Helmholtz, dont je vais maintenant faire connaître les grands services rendus à cette branche de la science » écrit à nouveau Tait.

C'est en effet le texte de Helmholtz, *Ueber die Erhaltung der Kraft* (1847) [33], traduit en français par Pérard sous le titre de : *Mémoire sur la conservation de la force* (1869), qui aura une grande audience, auprès des britanniques notamment. D'une grande culture, influencé tant par Kant que sans doute par Leibniz et Lagrange, Helmholtz, s'emploie à fonder une théorie phénoménologique et mécaniste des phénomènes physiques, à l'intérieur de laquelle s'inscrirait la physiologie. Le terme « force » est pris, comme chez les auteurs précités, dans un sens physique général et dans une optique d'unification des sciences. Helmholtz refuse le vitalisme. Il s'intéresse notamment, dans ses débuts, à la production de la chaleur musculaire dans le corps, et vise à établir une théorie physico-chimique, étayée par une mathématique rigoureuse, décrivant les phénomènes qui apparaissent. Mais c'est un cadre général qu'il souhaite établir, capable en premier lieu de rendre compte des phénomènes du monde physique :

la tâche des sciences physiques consiste donc finalement à ramener les phénomènes de la nature à des forces invariables, attractives et répulsives, dont l'intensité dépend de la distance.

Il reprend la notion de « *force morte* » de Leibniz puis de Kant, sous le nom de « *force de tension* » :

Appelons *forces de tension* les forces qui tendent à mouvoir le point m, tant qu'elles n'ont pas encore produit le mouvement, par opposition à ce que la mécanique appelle *force vive*.

Ces forces ont donc une nature potentielle, ce que justifie l'adjectif « potentielle » proposé plus tard par Rankine pour nommer l'énergie correspondante¹³.

On notera par ailleurs ici l'absence, en ces temps, de consensus terminologique concernant le terme force, employé parfois dans son sens actuel, parfois avec la signification d'une impulsion ou quantité de mouvement (on dit aussi parfois aujourd'hui impulsion) mv : Laplace n'écrit-il pas dans son *Exposition du Système du Monde*¹⁴ [40] (la première édition date de 1796) que :

la force est le produit de la masse d'un point matériel, par la vitesse qu'elle lui ferait prendre, s'il était libre. (p.186)

Ajoutons l'emploi du terme force vive pour désigner mv^2 . On conçoit que Mayer et Helmholtz aient pu songer à employer ce terme de force dans un sens beaucoup plus général, pour désigner une notion physique capable d'ubiquité, dotée d'aussi belles propriétés que celles du caméléon : la force peut changer d'apparence, elle peut revêtir l'habit électrique, magnétique, mécanique ou chimique sous mille formes. Elle peut se diluer en chaleur, et inversement, parvenir en partie à reprendre l'une des incarnations précédentes. L'étude de ces transformations sera l'un des principaux sujets de recherches des physiciens du XIX^e siècle, conduisant à la mise en place de la thermodynamique. Il n'est pas impossible que les conceptions de Straton, le possible auteur du traité aristotélien de mécanique, aient préfiguré celles de nos physiciens allemands.

¹³ Dans un article de 1867 *On the phrase "potential energy" and on the definitions of physical quantities* Rankine écrit : « Until some years afterwards I was not aware of the fact, that the idea of a phrase equivalent to "potential energy", in its purely mechanical sense, had been anticipated by Carnot, who, in an essay on machines in general, employed the term "force vive virtuelle", of which "potential energy" might be supposed to be almost a literal translation. »

¹⁴ Dans ce traité en cinq volumes, Laplace y expose en termes accessibles à tous ses idées sur un certain nombre de problèmes physiques. L'*Exposition* sert notamment d'introduction à son grand ouvrage, plus technique, son *Traité de Mécanique Céleste*, traité en 5 volumes dont les deux premiers parurent en 1799.

Mais, en définitive, c'est Thomson, aidé par Rankine, qui, indépendamment de ses collègues allemands, l'emportera, choisissant à juste titre un autre terme, celui d'énergie.

Les premiers travaux de Thomson, nommé à 22 ans professeur à l'Université de Glasgow, sont de nature mathématique, quoique relatifs à la physique mathématique (les premiers travaux portent sur les séries de Fourier et l'étude de la conduction de la chaleur)¹⁵ ou à la géométrie différentielle¹⁶. Dès cette première époque, Thomson étudie en particulier la théorie de Carnot¹⁷, et consacre plusieurs mémoires *On the dynamical theory of heat*, publiés par les *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*. Le cinquième, lu le 15 décembre 1851 et qui paraît en 1852, est intitulé : *On the Quantities of Mechanical Energy contained in a Fluid in Different States, as to Temperature and Density* [57]. C'est l'article fondateur.

Il y fait l'éloge du riche traité d'Helmholtz dans une note rajoutée au texte original de cet article :

si je l'avais connu à l'époque, j'aurais eu l'occasion de m'y référer sur ce point [l'effet Peltier] et sur de nombreux autres points de la théorie dynamique de la chaleur, la théorie mécanique de l'électrolyse, la théorie de l'induction électromagnétique, et la théorie mécanique des courants thermoélectriques.

Helmholtz, de son côté, présentera l'article de Thomson en ces termes :

[il y] développe les relations mutuelles entre le volume, la température, la pression, la chaleur spécifique et la quantité de travail moléculaire (énergie mécanique) ...

L'«énergie mécanique» est en substance cela même que l'on nommait antérieurement

¹⁵ *On Fourier's Expansions of functions in trigonometrical series*, in Cambridge Math. Journal, May 1841.[57]

¹⁶ *On orthogonal isothermal surfaces*, in Cambridge Math. Journal, May 1843, *Elementary demonstration of Dupin's theorem*, in Cambridge Math. Journal, May 1844. [57]

¹⁷ *An account of Carnot's theory of the motive power of heat,...*, in Trans. Edinburgh Royal Soc., 1849 et Annales de Chimie, XXXV, 1852. [57]

la quantité de chaleur (libre et latente) contenue dans le corps, ou son équivalent mécanique ...

L'influence de Carnot est très présente ; elle transparaît dans l'explication précise donnée par Thomson de ce qu'il qualifie lui-même d' « unqualified term, *mechanical energy* »:

« l'énergie mécanique d'un corps dans un état donné » dénotera la valeur mécanique des effets que le corps produirait en passant, de l'état où il se trouve, à l'état standard, ou encore la valeur mécanique de l'action totale qui serait requise pour amener le corps, de l'état standard, à l'état où il se trouve.

Ainsi, comme chez Carnot, la valeur de cette énergie ne dépend que de l'état initial et de l'état final du système.

Tenant compte du phénomène de dissipation possible et fréquent de l'énergie mécanique par émission de chaleur, Thomson élargit la même année sa conception en supprimant l'adjectif mécanique, ne conservant que le terme énergie.

Entre en scène, maintenant, Rankine, grand ingénieur mais aussi, en tant que physicien, l'un des principaux fondateurs de la thermodynamique. Toujours en 1852, il lit, devant la British Association of Belfast, un premier texte, court, ignoré apparemment des cosmologistes contemporains, mais qui pourrait en étonner quelques-uns. Il a pour titre *On the reconstruction of the mechanical energy of the universe* [52], et a été publié dans le *Philosophical Magazine* de la même année. Je ne résiste pas au plaisir de citer les deux premiers et les deux derniers paragraphes de ce texte dans sa langue originale.

The following remarks have been suggested by a paper by Professor William Thomson of Glasgow, on the tendency which exists in nature to the dissipation of indefinite diffusion of mechanical energy originally collected in stores of power.

The experimental evidence is every day accumulating, of a law which has long been conjectured to exist, – that the different kinds of physical energy in the universe are mutually convertible; that the total amount of physical energy, whether in the form of visible motion and mechanical power, or of heat, light, magnetism, electricity, or chemical agency, or in other forms not yet understood, is unchangeable ; the transformations of the different portions from one of those forms of power into another, and their transference from one portion of matter to another, constituting the phenomena which are the objects of experimental physics.

...

Thus it appears, that although, from what we can see of the known world, its condition seems to tend continually towards the equable diffusion, in the form of radiant heat, of all physical energy, the extinction of the stars, and the cessation of all phenomena; yet the world, as now created, may possibly provided within itself with the means of reconcentrating its physical energies, and renewing its activity and life.

For aught we know, these opposite processes may go on together; and some of the luminous objects which we see in distant regions of space may be, not stars, but foci in the interstellar ether.

Il poursuit ses réflexions sur l'énergie, et lit un an plus tard, devant la Philosophical Society de Glasgow, un texte intitulé *On the General Law of the Transformation of Energy* [53]. Ce texte commence ainsi :

ACTUAL, or SENSIBLE ENERGY is a measurable, transmissible, and transformable condition, whose presence causes a substance to tend to change its state in one or more respects. By the occurrence of such changes, actual energy disappears, and is replaced by

POTENTIAL or LATENT ENERGY; which is measured by the product of a change of state into the resistance against which that change is made.

Selon Helmholtz qui rend compte de cet article :

Ces deux dernières définitions sont quelque peu obscures, parce que M. Rankine a voulu éviter là toute hypothèse sur la nature de la force agissante. Au demeurant, les expressions appropriées ont été choisies. Elles concordent

avec celles que le rapporteur a antérieurement désignées par *force vive* (énergie actuelle), et *quantité des forces de tension* (énergie potentielle).

Rankine reprend et approfondit ses idées dans un texte remarquable lu devant la même société en 1855. Il est intitulé *Outlines of the Science of Energetics* [54]. Dans les articles courts et très solides I à VI de ce texte, à mettre entre les mains de tous les étudiants tout comme l'ouvrage précité de Duhem [19], Rankine définit notamment en toute clarté ce qu'est une théorie physique. Voici les titres de ces articles :

Section I. – What constitutes a Physical Theory.

Section II. – The Abstractive Method of forming a Physical Theory distinguished from the Hypothetical Method.

Section III. – The Science of Mechanics considered as an Illustration of the Abstractive Method.

Section IV. – Mechanical Hypotheses in Various Branches of Physics.

Section VI. – Advantages and Disadvantages of Hypothetical Theories.

La suite du texte s'applique à définir de manière axiomatique une science de l'énergétique, et donc en premier lieu les termes de cette science, termes sur lesquels on pourrait réfléchir à nouveau. Les voici selon Rankine : *Substance. Property. Mass. Accident. Effort, or Active Accident* (The term « *effort* » will be applied to every cause which varies, or tends to vary, an accident. This term, therefore, comprehends not merely *forces* or *pressures*, to which it is usually applied, but all causes of variation in the condition of substances.). *Passive Accident. Radical Accident. Effort as a Measure of mass. Work. Energy, Actual and Potential* (The term “*energy*” comprehends every state of a substance which constitutes a capacity for performing a work.)

Rankine propose ensuite quelques axiomes, et en déduit quelques propriétés essentielles. Et voici le contenu de la section XX, ses *Concluding Remarks* :

It is to be observed, that the preceding articles are not the results of a new and hitherto untried speculation, but are the generalised expression of a method of reasoning which has already been applied with success to special branches of physics.

In this brief essay, it has not been attempted to do more than to give an outline of some of the more obvious principles of the science of energetics, or the abstract theory of physical phenomena in general; a science to which the maxim, true of all science, is specially applicable – that its subjects are boundless, and that they never can, by human labours, be exhausted, nor the science brought to perfection.

On appréciera, au regard de l'histoire, la largeur de vue de Rankine, son ouverture d'esprit.

La vision globale et générale que partagent Thomson et Rankine s'impose dans le milieu des physiciens. Leur terminologie facilite les tentatives d'extension de leurs concepts à des domaines d'étude autres que ceux qui relèvent de la seule physique.

On assiste alors en ces années, en gros, et en particulier de 1850 à 1870, à la naissance de la thermodynamique, en même temps qu'on essaie de préciser ce que pourrait être une notion d'énergie propre à chaque objet physique et qu'on appellera son *énergie interne* U (l'objet est vu comme une réunion de particules possédant chacune une énergie cinétique propre et une énergie d'interaction avec ses voisines). Gibbs introduit en 1873 la notion d'énergie utilisable (*available energy*)¹⁸ ; Helmholtz donnera le nom d'*énergie libre* à une

¹⁸ Je reproduis ici une note de Duhem [21] : « Maxwell semble avoir montré le premier que l'effet utilise d'une modification isothermique ne pouvait jamais dépasser la diminution d'une certaine grandeur qu'il appelait à tort *Entropie*. (J. CLERK MAXWELL, *Theory of Heat*, p. 186, Londres, 1871). La notion générale et le nom d'énergie utilisable (*Available Energy*) ont été introduite en Physique par Gibbs, sans qu'il donnât, d'ailleurs, la définition analytique de cette grandeur (J. WILLARD GIBBS, *On a Representation by Surfaces of the Thermodynamic Properties of Substances* (*Transactions of the Connecticut Academy of Art and Sciences*, vol. II, 1873, p. 400). Maxwell, en la quatrième édition de sa *Theory of Heat*, a adopté le nom de *Available Energy* ; d'une manière semblable, Hermann von Helmholtz a donné à la grandeur $F = U - F(\Theta) S$ le nom d'*énergie libre* (*frei Energie*) et à la grandeur $U - F = F(\Theta) S$ le nom d'*énergie liée* (*gebundene Energie*).

expression voisine ; elle porte aujourd'hui également et parfois les noms d'*enthalpie libre* ou de *potentiel de Gibbs*¹⁹.

Wilhelm Ostwald en particulier, que nous avons déjà rencontré, prix Nobel de chimie en 1909, bien au courant des développements de la physico-chimie, placé au contact d'autres disciplines, éprouve la nécessité de donner une emprise plus vaste au terme énergie ; dans son volume intitulé *Energie* [49], il prend en considération les notions d'« énergie psychique » et d'« énergie sociologique ». Mais le caractère global du concept d'énergie, la prodigieuse richesse et subtilité des interactions, n'ont pas encore permis de dégager un formalisme précis qui permettrait de mettre en avant un emploi très efficace de ce concept. Il n'en reste pas moins que l'objectif de la science étant l'universel, sont à prendre en considération bienveillante toutes les notions et tous les actes de pensée qui vont dans cette direction.

On notera que, s'il existe une définition de l'énergie interne physique, on ne trouve pas de manière explicite la définition correspondante de ce que pourrait être une énergie externe. Sans doute faut-il la concevoir comme l'énergie apportée par l'environnement à l'objet, énergie qui peut le mettre en mouvement, l'enrichir en quelque façon. Quant à cette énergie interne, elle ne concerne encore que des milieux et des quantités physiques, comme par exemple une agitation interne à la Boltzman (1844-1906) induisant une température locale. Or, de manière plus générale, l'énergie interne est notamment liée à la constitution de l'objet à travers ses composants et leur activité réciproque, à travers sa structure, et qui déterminent en partie ses capacités fonctionnelles ; elle dépend aussi des capacités mnémoniques de l'objet, de la connaissance qu'il a de son entourage, des représentations qu'il a établies. Aussi, lorsqu'on envisage le cas d'un objet en général, le travail à accomplir pour donner une

¹⁹ De manière générale, en physico-chimie, ce potentiel a pour expression $G = U + PV - TS$ (U est l'énergie interne, celle qui permettrait de créer le système à température et volume constants ; S est l'entropie, P la pression, T la température, V le volume : PV représente le travail nécessaire pour faire occuper au système le volume V sous la pression P, TS est l'apport d'énergie de l'extérieur au système).

forme opératoire précise au concept d'énergie paraît sans limite. On ne saurait, pour cette raison, se décourager et ne rien entreprendre.

II.2 Une propriété essentielle de l'énergie physique : l'invariance

II.2.1 La conception des Anciens : une vision globale et immuable

Depuis la plus haute antiquité, règne dans l'esprit des physiciens la notion la plus extrême de stabilité, celle d'éternité, de conservation absolue. Les hommes avaient alors sous les yeux un ciel, des sociétés, un monde qui paraissaient immuables. Ils exprimaient leur intuition de la pérennité de manière symbolique, à travers les attributs invariables de leurs dieux²⁰.

Les conceptions de la physique reposent sur deux socles conceptuels, formant un couple inséparable, l'un de caractère local, l'autre de caractère global et entre lesquels doit exister, en arrière-plan, une sorte de dualité à faire surgir : le premier, représenté par Démocrite, met en avant une description atomiste, analytique de l'univers ; le second, représenté par Anaximandre, le disciple et successeur de Thalès qui, selon Théophraste (*Opinions des Physiciens*)[1], aurait introduit la notion et le terme de principe, se rapporte à un corps de doctrines sur le fonctionnement global de l'univers.

C'est ainsi que Platon s'inspirant sans doute d'Anaximandre, crée un ensemble de principes abstraits qui modèlent le monde, et qui, par nature, sont immuables. Il s'exprime là-dessus dans le *Timée*, avec plus de clarté peut-être dans *Phèdre* (245 d-e) (28) :

... un principe ne provient de rien Puisque, d'autre part, ce principe est quelque chose d'inengendré, il est forcément aussi quelque chose d'incorrupible Ainsi donc, si ce qui se meut soi-même est principe de mouvement, il n'est pas possible, ni que cela s'anéantisse, ni que cela commence d'exister, sinon ce serait un affaissement

²⁰ Je rejoins ici C.G. Jung (cf l'Appendice II.1). Je dois à Jacques Viret la lecture tardive de l'œuvre aussi riche que sensée de ce psychologue.

du ciel tout entier, de la génération toute entière Or, à présent qu'a été expliquée l'immortalité de ce qui se meut par soi, personne n'hésitera à dire que là est la réalité de l'âme, que cette notion même est la notion de l'âme. Tout corps, en effet, auquel il appartient d'être mû du dehors, est un corps inanimé, tandis que celui auquel il appartient d'être mû par lui-même et du dedans, est un corps animé. Mais, si c'est bien ainsi qu'il en est et que ce qui se meut soi-même ne soit autre chose que l'âme, alors, nécessairement, l'âme doit être quelque chose d'inengendré, aussi bien que d'immortel. [50]

La démonstration est spécieuse puisqu'elle fait appel à un principe impalpable, créé de toute pièce, et par nature invariable. Cela dit, on appréciera la prudence de Platon, les réserves qu'il introduit dans la fin de son exposition : « Mais, si c'est bien ainsi qu'il en est ... ».

A travers la mise en forme des propriétés de la fonction d'énergie physique, nous allons retrouver cette intuition ou cette conviction d'une pérennité pour le moins apparente, qu'exprimeront au cours des âges des physiciens aussi divers qu'Héraclite (576 – 480) [1]:

Ce monde-ci, le même pour tous, nul des dieux ni des hommes ne l'a fait. Mais il était toujours, est, sera, feu éternel s'allumant en mesure et s'éteignant en mesure

que Galilée : « *Niente si muta* », il ne manque pas aussi de rappeler « ... le raisonnement d'Aristote, très subtil et concluant, par lequel on prouve l'incorruptibilité du ciel. », ou que Lavoisier : « *Rien ne se perd, rien se crée* » - mais, par ces mots, Lavoisier ne reprend-il pas Kant lorsqu'il écrit [38], à propos de la mécanique :

On emprunte à la métaphysique générale ce principe comme fondement que, dans toutes les modifications de la nature, aucune substance ni ne se crée, ni ne se perd.

L'attitude des physiciens à la recherche de lois exprimant des rapports de causes à effets, des comportements, tous invariants, procède de cette antique philosophie.

II.2.2 Introduction du point de vue local : l'équilibre, depuis Archimède jusqu'au XIX^e siècle

Dans le traité de *Mécanique* dont il a été fait mention en fin du paragraphe II.1.1, il est observé, de manière assez synthétique, qu'un levier est en équilibre statique quand les deux bras sont identiques et que les poids portés en leurs extrémités sont égaux, ou lorsque les poids en ces extrémités sont inversement proportionnels aux longueurs des bras. Selon Mach, « Un autre passage du même écrit témoigne d'un pressentiment du principe des déplacements virtuels sous une forme très indéterminée. »

Après tous ceux qui se sont occupés d'optique géométrique et qui ont fondé la géométrie euclidienne, il convient bien sûr de considérer également Archimède comme un des premiers physiciens théoriciens. Le travail d'un tel physicien consiste à concevoir une ou plusieurs représentations symboliques des phénomènes qu'il observe, permettant de formaliser des relations de causes à effets, et de rendre compte avec assez d'exactitude des différentes modalités que présentent ces phénomènes, par l'introduction éventuelle d'hypothèses supplémentaires nouvelles, et par le seul examen des propriétés des représentations. La mathématique est évidemment l'outil privilégié de ces représentations.

A travers sa théorie du levier, les traités d'Archimède (*Aequi-ponderantibus*, *Planorum aequilibris*) [2] donnent une première formalisation de la mécanique statique et pérenne où figure ce point singulier qui est le point d'appui du levier. Comme on le savait certainement longtemps avant Aristote, l'équilibre est atteint lorsque les forces p_1 et p_2 exercées de part et d'autre du

point d'appui sont dans un rapport inversement proportionnel à celui des longueurs l_1 et l_2 qui les séparent de ce point. On est ici en présence de quelques attributs et manifestations de la stabilité, de la permanence : présence d'un point singulier autour duquel se déploie une machine physique invariante dans son principe et dans son organisation, et en lequel les forces, ici leurs moments s'équilibrent.

La théorie d'Archimède, analysée par Lagrange et par le physicien allemand Ernst Mach, déjà cité, dans son livre *Die Mechanik in ihrer Entwicklung* (paru en français sous le titre *La mécanique, exposé historique et critique de son développement* [45]), est, sur le plan formel, implicitement construite autour de la notion de symétrie, déjà présente d'ailleurs, chez Aristote. Il y a équilibre lorsqu'il y a symétrie. Mach ne le dit pas, mais c'est bien ainsi qu'il advient dans la réalité : si la symétrie est rompue par l'inégalité des longueurs ou des poids, il convient de la rétablir en modifiant les longueurs l_1 et l_2 des bras (respectivement les valeurs p_1 et p_2 des poids) si les valeurs des poids (respectivement les longueurs de bras) sont inégales. C'est ce à quoi procède Archimède de manière progressive puis synthétique pour conclure que l'équilibre est atteint lorsque les moments $l_1 p_1$ et $l_2 p_2$ sont égaux.

La problématique de l'équilibre des forces en mécanique statique sera reprise par l'école italienne avec notamment Leonardo da Vinci (1452-1519) qui, dit E. Mach, « semble avoir le premier reconnu l'importance de la notion générale de moment statique », et avec Galilée bien sûr. Cette problématique trouvera sa conclusion finale au XIX^e siècle dans les traités de Möbius (1790-1868) (*Der barycentrische Calcul*, 1827, et *Lehrbuch der Statik*, 1837), ouvrages écrits sous la suggestion formulée par Lazare Carnot (1753-1823) dans sa *Géométrie de Position* (1803). Mais auparavant il faut citer : Simon Stevin qui, dans son traité paru en 1586 (*De Beghinselen der Weegconst*), introduira dans un cas particulier la notion de parallélogramme des forces sous le nom de

triangle des forces ; Newton qui, dans les *Principia* énonce (en latin) la manière dont les forces se composent,

Corollary I : *A body, acted by two forces simultaneously, will describe the diagonal of a parallelogram in the same time as it would describe the sides by those forces separately.*

puis l'apport de Jean Bernoulli dans la lettre à Varignon déjà citée :

En tout équilibre de forces quelconques, en quelque manière qu'elles soient appliquées, et suivant quelques directions qu'elles agissent les unes sur les autres, ou médiatement ou immédiatement, la somme des énergies affirmatives sera égale à la somme des énergies négatives prises affirmativement.

C'est encore dans cette même lettre que Jean Bernoulli introduit l'expression de « *vitesse virtuelle* » qui est en fait un déplacement virtuel :

ces avancements ou reculements qui sont ce que j'appelle *vitesse virtuelle* qui ne sont autre chose que ce dont chaque ligne de tendance augmente ou diminue par le petit mouvement.

Dans ses *Propositiones variae mechanico-dynamicae* (1726) [8], se plaçant du point de vue axiomatique comme il le dit lui-même, il reprend de manière précise la construction du parallélogramme des forces, et aborde la question de l'équilibre local des forces d'un système mécanique en mouvement, considérant des forces immatérielles (*Vires immateriales*) qui animent les objets acquérant des vitesses virtuelles. De fait, à cette époque, force et mouvement restent liés. Sans doute Jean Bernoulli, sur la considération du parallélogramme des forces, a-t-il eu des discussions avec son second fils Daniel²¹ (1700-1782) : celui-ci rédige la même année 1726 un article où il entend asseoir la vérité de

²¹ Le père devint très jaloux de la notoriété de son fils ; voir par exemple la citation le concernant page iii de mon ouvrage : *De l'intuition à la Controverse*, Blanchard, Paris, 1987, citation extraite d'un ouvrage de L.G. du Pasquier : *Euler et ses Amis*, Hermann, Paris, 1927.

cette construction, moins sur des bases factuelles, physiques, que sur des bases abstraites. Cet article a été analysé, d'une part par les historiens modernes [9], sans toutefois noter l'influence d'Archimède dans la démarche de Daniel Bernoulli, et d'autre part par Lagrange qui écrit ceci :

15. On a cherché depuis à rendre le principe de la composition des forces indépendant de la considération du mouvement, et à l'établir uniquement sur des vérités évidentes par elles-mêmes. Daniel Bernoulli a donné le premier, dans les *Commentaires de l'Académie de Pétersbourg*, tome I^{er} [publié également en 1726 !], une démonstration très ingénieuse du parallélogramme des forces, mais longue et compliquée, que d'Alembert a ensuite rendue un peu plus simple dans le premier Volume de ses Opuscules.

Cette démonstration est fondée sur ces deux principes :

1^o Que, si deux forces agissent sur un même point dans des directions différentes, elles ont pour résultante une force unique qui divise en deux également l'angle compris entre les deux directions lorsque les deux forces sont égales, et qui est égale à leur somme lorsque cet angle est nul, ou à leur différence lorsque l'angle est de deux droits ; 2^o que des équi-multiples des mêmes forces, ou des forces quelconques qui leur soient proportionnelles, ont une résultante équi-multiple de leur résultante ou proportionnelle à cette résultante, les angles demeurant les mêmes. [²²]

Ce second principe est évident en regardant les forces comme des quantités qui peuvent s'ajouter ou se soustraire.

A l'égard du premier, on le démontre en considérant le mouvement qu'un corps, poussé par deux forces qui ne se font pas équilibre, doit prendre, et qui, étant nécessairement unique, peut être attribué à une force unique agissant sur lui dans la direction de son mouvement. Ainsi l'on peut dire que ce principe n'est pas tout à fait exempt de la considération du mouvement.

...

On a ensuite traduit en Analyse le fond de cette démonstration, et on lui a donné différentes formes plus ou moins simples, en considérant la résultante comme fonction des forces composantes et de l'angle compris entre leurs directions. (*Voir le second tome des mélanges de la Société de Turin, les Mémoires de l'Académie des*

²² On reconnaît ici la présence des axiomes importants de la théorie des espaces vectoriels.

Sciences, de 1769, le sixième Volume des *Opuscles* de d'Alembert, etc.) Mais il faut avouer qu'en séparant ainsi le principe de la composition des forces de celui de la composition des mouvements, on lui fait perdre ses principaux avantages, l'évidence et la simplicité, et on le réduit à n'être qu'un résultat de constructions géométriques ou d'Analyse. [38]

Ce que vient de dire Lagrange sur la genèse intellectuelle du principe de la composition des forces est révélateur, conforme à ce que nous savons déjà de l'histoire de ce principe, et instructif : ce qu'on gagne en formel, on le perd en compréhension ; le nombre, la formule et le calcul masquent les mécanismes à l'œuvre dans la réalité sous-jacente. Ceux qui les conçoivent pour la première fois les devinent sans doute, mais ceux qui en font ensuite usage et les apprennent restent assez souvent aveugles, et ne forment pas leur esprit à la recherche des causes profondes²³.

Ouvrons à ce propos ici une parenthèse pour apprécier le progrès accompli depuis le XIV^e siècle dans la représentation symbolique des notions introduites. Ces dernières le sont toujours d'abord de manière littéraire. On pense à un phénomène, on l'explicite, on le définit, on lui donne un nom, on le nomme de manière à être entendu par autrui. L'analyse et la réflexion sont alors celles du physicien. Dans une seconde étape, la mise en œuvre d'une représentation géométrique permet de donner au concept sa valeur opératoire : le physicien se fait mathématicien « appliqué ». Ce n'est que dans un troisième temps, à la fin d'un processus qui, parfois, a pu s'étaler sur des siècles, qu'un symbole est attribué au concept : on a vu, par exemple, qu'il a fallu attendre Huyghens pour représenter la masse par la lettre m ! On aborde alors une

²³ Compte tenu du sérieux dont ici Lagrange vient de faire preuve, l'anecdote suivante ne manque pas alors de sel. Je pensais un moment rassembler des copies des illustrations et des documents originaux en géométrie différentielle. J'ai eu la chance de tomber sur des manuscrits de Lagrange, qui dormaient dans les Archives de la bibliothèque de l'Ecole Nationale Supérieure des Ponts et Chaussées : presque chaque feuillet portait un petit dessin qui avait servi de support à Lagrange pour établir ses démonstrations. Or Lagrange écrit dans son Avertissement de 1811 : « On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnements géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche régulière et uniforme... »

dernière phase, où l'on manipule les symboles, phase plus anonyme, de portée plus générale, plus algorithmique, plus abstraite, élaborée encore par le physicien théoricien, mais qui, de plus en plus rapidement, va faire appel et souvent laisser la place au mathématicien dit « pur », lequel, bien souvent, en vient à ignorer les longs et patients efforts accomplis par les générations antérieures pour poser le problème et forger les outils qui peuvent mener à sa solution.

Dans l'étude de l'équilibre des corps, Lagrange, qui connaît bien les phases précédentes, aborde la troisième en formalisant davantage que Bernoulli le fait que l'équilibre est obtenu lorsque le système satisfait aux conditions du *principe du levier généralisé*, plus traditionnellement désigné par *principe des travaux virtuels* :

Soit O un point d'un corps de masse m au repos, il est point d'équilibre si est nulle la somme des moments $m F_i \delta u_i$, où F_i est la force qui déplacerait O le long d'une trajectoire virtuelle u_i , δu_i évaluant l'élément de déplacement virtuel de O.

Lorsque le corps, de masse m , est en mouvement, apparaît également, selon la loi adoptée par Newton, la force en O due à l'accélération, soit, dans la direction k , $m \frac{d^2}{dt^2}(u_k)$. Le moment de cette force est $(m \frac{d^2}{dt^2}(u_k))\delta u_k$ auquel lui correspond l'élément différentiel de l'énergie cinétique locale $\frac{1}{2} m (\frac{d}{dt}(u_k))^2$. L'équilibre instantané de O est alors caractérisé par le fait qu'est nulle la somme de tous les moments des forces qui s'exercent sur O :

$$0 = \mathbf{S} \ m [F_i \delta u_i + (\frac{d^2}{dt^2}(u_k))\delta u_k],$$

S désigne ici le symbole de sommation adopté par Lagrange.

Il convient de souligner ici, d'une part, l'usage tout à fait conscient par Lagrange de la statique pour traiter de la dynamique :

Cette manière de rappeler les lois de la Dynamique à la Statique ... ([39] p. 256)
et d'autre part, que ce procédé est d'emploi tout à fait général en théorie des systèmes dynamiques : en considérant le mouvement en chaque point de manière instantané, on le fige, ce qui permet de l'observer à loisir et d'en voir au mieux les propriétés.

L'intégration de l'équation précédente donne, selon les notations de Lagrange,

$$\mathbf{V} + \mathbf{T} = \mathbf{H} \text{ où } \mathbf{H} \text{ est une constante.}$$

($\mathbf{V}$ résulte de l'intégration des forces « mortes » ou potentielles F_i – ce sont des fonctions qui, par exemple, ne dépendent que du lieu où s'exercent ces forces, $\mathbf{T}$ résulte de l'intégration des forces « vives »).

Ainsi, Lagrange aboutit à une *équation générale de conservation de l'énergie* dans le cadre de mécanique physique qui l'occupe, un fait qu'il ne commente pas. Il reste dans le cadre de la mécanique, et ne saurait le dépasser.

En cas de choc de deux « corps durs », le premier terme de la somme est nul ; de l'intégration immédiate du second résulte la constance de l'énergie cinétique dans ce cas. Lagrange retrouve ici, de manière simple mais il aura fallu un bon siècle pour dégager et assimiler les mécanismes en jeu, ce premier énoncé de conservation d'une énergie, en germe chez Galilée, mais clairement formulé par Huyghens, et obtenu par lui après des considérations d'ordre

physique diverses²⁴ et par des constructions géométriques parfois longues. Huyghens écrit, dans son article précité relatif au choc de deux « corps durs »,

Hypothèse V : Lorsque, de deux corps durs qui se rencontrent, il arrive que, après le choc, l'un d'eux a conservé tout son mouvement, l'autre également n'aura rien perdu ou gagné en mouvement.

d'où Huyghens déduit :

Proposition XI : Dans le cas de deux corps qui se rencontrent, ce que l'on obtient en prenant la somme de leurs grandeurs multipliées par les carrés de leurs vitesses sera trouvé égal avant et après la rencontre : savoir lorsque les rapports des grandeurs et des vitesses sont donnés en nombres ou en lignes.

Alors que ces textes seront posthumes, il s'exprime ainsi dans une lettre de 1669 au *Journal des Savants* [35]:

La somme des produits faits de la grandeur de chaque corps dur, multipliée par le carré de la vitesse, est toujours la mesme avant et après les rencontres.

Lagrange ne donne pas de nom aux quantités globales $\mathbf{H} = \mathbf{T} + \mathbf{V}$ et $\mathbf{L} = \mathbf{T} - \mathbf{V}$; on les appelle aujourd'hui respectivement le *hamiltonien* et le *lagrangien* du système mécanique. Une transformation dite de Legendre²⁵ permet de passer du lagrangien à l'hamiltonien.

Ces quantités seront envisagées sous un angle plus fonctionnel par Hamilton (1805-1865), dans ses deux publications des années 1834 et 1835 [31]. Ces fonctions représentent des énergies locales, $\mathbf{H}$ étant appelée aujourd'hui l'*énergie totale* ; $\mathbf{L}$ est souvent appelée l'*énergie lagrangienne*.

²⁴ Michel Fichant en dit ceci : « La base axiomatique de la théorie du choc de Huyghens se ramène donc à la conjonction du principe d'inertie, du principe dit de Toricelli et du principe de relativité [propre à Huyghens] » [24]

²⁵ Au point (q, p, L) d'un premier espace, on fait correspondre les points $(p, q, H = qp - L)$ d'un second espace (la transformation est dite involutive : en la répétant on retrouve l'espace d'origine).

Quelle que soit la fonction représentative choisie, deux termes la composent : la force vive $T = \frac{1}{2} m v^2$, liée à la masse et au seul mouvement par l'intermédiaire de la vitesse, appelée aujourd'hui, rappelons-le, le *moment* ou l'*énergie cinétique*, et, dépendant des forces extérieures, V , l'*énergie potentielle* (Hamilton a fini par lui donner le nom de « fonctions de forces », appellation en gestation chez Laplace).

On retiendra que ces fonctions, ces lagrangiens, sont, de nos jours, les *outils princeps* utilisés en physique théorique – comme par exemple ceux qui apparaissent dans les ouvrages [17] [19] ; l'appendice II.2 donne quelques exemples de lagrangiens élémentaires. De ces lagrangiens ou hamiltoniens, on déduit les comportements locaux, ainsi que les potentialités de transformations internes des milieux, comme il apparaîtra dans le chapitre suivant sur la stabilité. Pratiquer la physique théorique est un art, dont la valeur réside dans la pertinence des fonctions d'énergie lagrangienne ou hamiltonienne qu'on y établit. Adaptées aux problèmes qu'ils étudient, les mathématiciens utilisent également d'autres fonctionnelles qu'ils appellent énergie : il n'y a pas (encore ?) de définition formelle d'une fonctionnelle générale ainsi nommée.

II.2.3 Le principe de la conservation de l'énergie

Les prémisses de la Renaissance se situent vers la fin du treizième siècle et au début du quatorzième. Les potentialités et les aptitudes à la mobilité s'accroissent : mobilité sur mer avec les progrès accomplis dans la construction, la manœuvre et le pilotage des navires, mobilité dans la guerre avec l'arrivée de la poudre à canon et l'emploi des armes à feu²⁶. Nul doute que ces progrès techniques finissent par avoir une incidence sur les données de l'observation et

²⁶ Extrait du site de Wikipédia : un manuscrit anglais de 1326 intitulé *De Notabilitatibus, Sapientia, et Prudentiam Regum*, rédigé par Walter de Milemete, chapelain du roi Édouard II d'Angleterre, à l'intention et pour l'éducation du futur roi Édouard III fait état de ces premières armes.

sur les conséquences qu'on en peut tirer. Les textes de Galilée sont sur ce point très révélateurs.

Ces données s'accompagnent ainsi de nouvelles réflexions sur la nature et sur les propriétés du mouvement. Nous avons vu qu'apparaissent la perception et la prise en compte de l'accélération, de la notion de masse. Albert de Saxe et Oresme s'intéressent à la question de la chute des corps. Albert y fait jouer un rôle au centre de gravité.

Il faudra attendre un siècle supplémentaire, pour que Simon Stevin et Galilée étudient chacun de leur côté la chute des corps et avancent de nouvelles réflexions sur la dynamique. On notera que Galilée en particulier s'occupait activement de la conception et de la construction des navires, d'où l'idée peut-être d'expériences de physique sur les bateaux en mouvement, pouvant être réalisées à l'aide de lanceurs de projectiles très divers. Stevin et Galilée énoncent notamment le principe de l'invariance des lois de la physique par rapport au mouvement uniforme. Galilée l'énoncera de deux manières :

Pourvu que le mouvement soit uniforme et ne fluctue pas de-ci de-là, vous n'apercevrez aucun changement dans les effets nommés, et aucun d'entre eux ne vous permettra de savoir si le navire avance ou bien s'il est arrêté.

Par conséquent, un navire en mouvement sur la mer calme est l'un de ces mobiles qui avancent sur une surface qui ne descend ni ne monte : il est donc disposé, si tous les obstacles accidentels et externes étaient supprimés, à se mouvoir sans cesse et uniformément avec son impulsion, une fois qu'il l'a reçue. *Dialogo* (284)

Tout corps continuera dans son mouvement [uniforme] de ligne droite *ad eternam* s'il n'est soumis à aucune force

Albert Einstein (1879-1955) formulera [22] ainsi ce principe :

On sait que la loi fondamentale de la mécanique de Galilée-Newton, connue sous le nom de loi d'inertie, est exprimée dans les termes suivants : Un corps suffisamment éloigné d'autres corps persiste dans son état de repos ou de mouvement rectiligne

uniforme. ... Un système de coordonnées dont l'état de mouvement est tel que, relativement à lui, la loi d'inertie reste valable, est appelé « systèmes de coordonnées galiléen ».

Toujours dans le même « paragraphe » 284, Galilée écrit :

La pierre tombe toujours au même endroit du navire, que celui-ci soit à l'arrêt ou avance à n'importe quelle vitesse. Le même raisonnement valant pour le navire et pour la Terre, si la pierre tombe toujours à la verticale au pied de la tour, on ne peut rien en conclure quant au mouvement ou au repos de la Terre.

et quelques lignes plus loin :

La conclusion ultime à laquelle vous faites allusion, c'est sans doute que, si son mouvement lui a été imprimé de façon indélébile, la pierre n'abandonnera pas le navire, mais le suivra, pour tomber finalement au même endroit que lorsque le navire est à l'arrêt

Si on lit bien le principe galiléen, on voit qu'il contient également celui-ci, à nouveau présenté ici dans une formulation d'Einstein [23] :

Etant donné deux systèmes de coordonnées en translation uniforme l'un par rapport à l'autre, les lois auxquelles sont soumis les changements d'état des systèmes physiques restent les mêmes, quel que soit le système de coordonnées auxquels ces changements sont rapportés.

Bien avant Einstein, Isaac Newton (1643-1727), dans ses *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687), aura rassemblé sous forme de « lois » les principes d'invariance qui fondent sa théorie. Ils constituent les première et dernière de ses trois lois. La première loi, ou principe d'inertie, dit ceci :

Everybody continues its states of rest, or of uniform motion in a right line, unless it is compelled to change that state by forces impressed on it.

(Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui, et le contraigne à changer d'état)²⁷.

Le paragraphe précédent nous a rappelé l'introduction par Huyghens de la conservation de la force vive en cas de choc de deux corps durs, et son hypothèse V énonçant l'égalité de l'action et de la réaction dans cette situation.

C'est également ce principe qu'adoptera Newton dans l'énoncé de sa troisième loi :

To every action there is always opposed an equal reaction ; or, the mutual action of two bodies upon each other are always equal, and directed to contrary parts.

(L'action est toujours égale et opposée à la réaction ; c'est-à-dire, que les actions de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales, et dans des directions contraires).²⁸

Il précise sa pensée dans cet énoncé qui a frappé Thomson et Tait ([57], article 263) et que celui-ci a repris dans sa deuxième conférence [55] – dans les lignes qui suivent on doit entendre par « vitesse », la composante de la vitesse du point d'application de la force dans la direction de cette force :

Si l'action d'un agent est mesurée par le produit de sa force et de sa vitesse, et si la réaction de la résistance est mesurée de même par les vitesses de ses différents parties, multipliées par leurs différentes forces, celles-ci pouvant provenir du frottement, de la cohésion, du poids, ou de l'accélération, l'action et la réaction dans toutes les combinaisons des machines seront toujours égales et contraires.

La dérivée de $\frac{1}{2} mv^2$ est $mv'v$, v' étant l'accélération, soit $f v$: nul, semble-t-il, n'a fait remarquer que la formulation littéraire de Newton est ainsi la généralisation sous forme différentielle, locale, d'un énoncé de conservation de la force vive à la Huyghens, et auquel Leibniz donnera au contraire la forme

²⁷ Traduction de l'original écrit en latin, Madame du Chastellet, 1756.

²⁸ Traduction, Madame du Chastellet, 1756

globale que l'on va rencontrer quelques lignes plus loin. On peut considérer à bon droit Newton comme l'inventeur du calcul différentiel : la découverte qu'on lui doit du lien entre la force et l'accélération ne viendrait-elle pas en partie justement de cette formulation locale de la force vive, en partie aussi de la sensibilité de Newton à réalité du monde physique : le corps ne perçoit-il pas cette force lorsqu'il est soumis à l'accélération prise par un véhicule en mouvement irrégulier, un cheval, une calèche, un ascenseur ? Ce qui fonde par ailleurs encore davantage l'originalité de la pensée de Newton est d'avoir compris le produit $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ comme un produit scalaire.

Le contexte scientifique au milieu duquel Mayer et Helmholtz, et tous les autres auteurs, énoncent, vers la même époque, leur loi de conservation, n'est pas connu avec assez de précision et de complétude. Quelles furent les lectures de nos protagonistes, quelles idées circulaient-elles dans leur milieu commun, à l'époque où ils ont écrit, à peu de temps d'intervalle, leur traité ? Le grand psychologue Carl Gustav Young (1875-1961), écrit avec juste raison que *« l'idée de l'énergie et de sa conservation doit être une idée originelle qui sommeille dans l'inconscient collectif. »* [37] (cf l'appendice II.1). Sans doute ignorait-il le fait, qui mérite éclaircissement, que les protagonistes de cette conception aient été si nombreux au même moment, tout en s'exprimant en des termes voisins.

Les prémisses de leurs énoncés se rencontrent également chez Descartes, qui, faussement certes mais le premier en date, énonce un principe de conservation se rapportant au monde physique :

36. Que Dieu est la cause première du mouvement, et qu'il en conserve toujours une égale quantité dans l'univers. ([18], seconde partie)

Ces prémisses sont aussi chez Huyghens, qui énonce la juste conservation de l'énergie cinétique en cas de choc de deux corps durs, et qui aura une grande influence sur Leibniz. Leibniz n'écrit-il pas, par exemple :

Eadem semper potentia est in Universo ([41], p. 440)

Il voit ainsi également, dans le phénomène de conservation de la force vive montré par Huyghens, la manifestation d'un principe général. En excellents termes avec Huyghens et Jean Bernoulli, réfutant Descartes, Leibniz aura couché dans un premier texte intitulé *De corporum concursu* [24], rédigé en 1678, ses réflexions sur la notion de force et sur celle de conservation. Il reviendra sur ces questions à de nombreuses reprises, se répétant, jusqu'à ses deux derniers écrits plus spécifiques sur le sujet, datés de 1695 (*Specimen Dynamicum* [43], et *De ipse Natura...*(*De la nature en elle-même, ou de la force inhérente aux choses créées et de leurs actions* [42])). Voici comment il s'exprime dans un texte de 1692, rédigé contre Descartes et les cartésiens [42] :

Sur l'art. 36. Qu'il se conserve toujours la même quantité de mouvement dans l'univers, c'est la plus célèbre théorie des cartésiens. Cependant ils n'en ont pas donné de démonstration ; car la raison tirée de la constance de Dieu est tellement faible que cela n'échappera à personne. En effet, même si la constance de Dieu est absolue et s'il ne change rien sinon les lois d'un ordre établi depuis longtemps, la question se pose cependant de savoir ce que Dieu a décidé de conserver dans la série des changements : si c'est la quantité de mouvement, ou bien quelque autre chose différente, comme par exemple la quantité des forces. J'ai démontré que c'est cette quantité des forces qui se conserve, qu'elle est différente de la quantité du mouvement, et qu'il arrive très souvent que cette dernière subit un changement, alors que la quantité des forces reste égale.

Il est une autre manifestation de l'invariance dans le domaine de la physique qui aurait pu également inciter Helmholtz et Mayer à avancer leurs énoncés généraux. On est en effet souvent conduit à adopter une variante faible

de l'idée d'invariance sous la forme du principe selon lequel le travail total accompli par une force $F(s)$, lors d'un déplacement le long d'un chemin paramétré par s et joignant deux points a et b , est indépendant du chemin choisi. C'était, entre autres, à travers la position spatiale du piston d'une machine à vapeur, ou bien la valeur de la température ²⁹, le point de vue de Sadi Carnot³⁰ repris par W. Thomson comme par Clausius, l'un des principaux fondateurs de la thermodynamique. On trouvera dans l'Appendice II.4 une application de ce principe à l'établissement de lois dites de réciprocité.

Si toutefois l'on se réfère aux seuls mécaniciens Newton et Lagrange, Mayer et Helmholtz avaient certes bien des suggestions et des raisons pour proposer une loi de conservation de l'énergie. Elle est présentée en ces termes par Helmholtz :

La somme des forces vives et des forces de tension présentes est donc toujours constante. Sous cette forme, nous pouvons désigner notre loi sous le nom de *principe de conservation de la force*.

Notons que la priorité de Mayer a été reconnue par Helmholtz lui-même. Est-ce la raison pour laquelle Henri Poincaré (1854-1912), dans son traité de *Thermodynamique* [51] ne fait pas référence à Helmholtz mais à Mayer ? Quant aux scientifiques britanniques, ils étaient sans doute bien préparés à accepter une telle conception. Dès 1853, dans le texte précité intitulé *On the General Law of the Transformation of Energy*, Rankine écrit sans autre forme de procès :

The law of the *Conservation of Energy* is already known – viz., that the sum of all the energies of the universe, actual and potential, is unchanged.

²⁹ S. Carnot écrit : « La puissance motrice de la chaleur est indépendante des agents mis en œuvre pour la réaliser ; sa quantité est fixée uniquement par les températures des corps entre lesquels se fait en dernier résultat le transport du calorique. »

³⁰ Carnot, entre autres, est cité par Helmholtz .

II. 3 Force et Energie

II.3.1 Le regard local : la force

L'homme a probablement toujours eu une intuition globale du monde mise en balance avec une appréhension locale des phénomènes. Cependant, la primauté historique appartient à cette dernière. La raison en est toute simple : pour assurer sa pérennité, l'individu devait avant tout développer une capacité de sensibilité au monde extérieur, d'analyse des multiples phénomènes locaux qui adviennent à son entour et dont les effets peuvent être bénéfiques, il faut alors en tirer parti, ou maléfiques, il faut alors y prendre garde. Dans les religions primitives, le global est représenté un dieu, mais ce global présente encore un caractère local car ce dieu n'est pas universel, mais associé à une fonction particulière, à un effet local. Dans le domaine des sciences, c'est toujours l'exemple particulier, le local, qui sert d'appât à l'étude du cas général : par exemple, les mathématiciens ont entrepris de résoudre des équations polynomiales d'abord dans les cas élémentaires, équations du premier degré dans l'ensemble $\mathbf{Z}$ des entiers, dans celui $\mathbf{Q}$ des rationnels, voire dans l'ensemble $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ des entiers modulo p , etc, avant de s'attaquer aux cas plus généraux ; ainsi, dans le domaine de la physique qui va nous occuper, la balance puis le levier ont été les premiers outils d'étude du mécanisme général de l'équilibre.

La notion de force permet de conceptualiser des effets locaux et variés. Une fois, qu'avec assez de précision, un type de force a pu être reconnu, on a pu songer à lui affecter une représentation symbolique adaptée à la traduction de ses effets. La procédure a été relativement simple à mettre en œuvre dans le domaine physique : y sont présents des types de phénomènes particulièrement stables comme la gravitation, l'électromagnétisme, qui participent de manière universelle à la constitution de l'univers, et donc auxquels nous sommes sensibles à des degrés divers. L'observation et l'analyse de ces phénomènes au

cours des siècles, la construction de procédés et d'appareils dits de mesure ont permis de bâtir les théories physiques de base que nous connaissons.

Se fondant d'abord sur l'analogie, on a cherché ensuite à assouplir et à élargir ces théories, à les déployer pour les rendre aptes à intégrer en leur sein des phénomènes qu'on n'avait pu encore prendre en compte.

Basées sur l'intuition, la sensibilité, l'expérimentation, la notion de force dans un sens général manque de précision ; on comprend d'Alembert qui souhaitait bâtir l'édifice de la mécanique sur la notion clairement définie de vitesse, et en éliminer la notion de force. De fait, les sciences ont progressé chaque fois qu'une notion devenait mesurable et représentable par des nombres. C'est le cas, par exemple, de la physico-chimie lorsqu'on est parvenu à évaluer des concentrations, des flux, des vitesses de réaction. Rappelons que les nombres forment un vaste ensemble symbolique doté de propriétés internes très riches et qu'on peut abondamment manipuler selon des règles strictes.

Il faut insister sur les rôles premiers et fondateurs des concepts, de la représentation théorique. Ces concepts sont ensuite décantés par l'expérience, rendus opératoires par la mesure. La théorie conceptuelle, souvent floue en ses débuts, acquiert petit à petit de la consistance et de la solidité en devenant déductive ; elle peut alors devenir une théorie appliquée apte à conforter les fondements théoriques, à apporter de nouveaux outils pratiques d'expérimentation. De nouvelles découvertes faites avec ces nouveaux outils peuvent conduire à dépasser la théorie initiale, à en fonder de plus pertinentes et de plus vaste ampleur.

Je reprendrai ici, à propos de la notion de force, quelques-unes des considérations qui figurent dans la première partie de *Topologie et Perception* [11]³¹, consacrée à l'exposé de données premières en philosophie naturelle ; seront mis entre crochets d'éventuels nouveaux commentaires.

³¹ Le contenu des trois tomes de l'ouvrage apportent un premier développement à ces considérations.

Définition : On dit qu'un objet O , localisé dans l'espace-temps, est soumis à une *force* f , si on peut observer, sur une durée brève, une modification dans la forme, la structure interne, la trajectoire de l'objet considéré. On appelle *champ de forces* la totalité des forces de même nature qui s'exercent dans l'espace-temps.

[La force n'est pas a priori unidimensionnelle. De la même façon, le temps se rapporte à un espace pluridimensionnel doté d'une métrique non uniforme. La question de la définition de la durée n'est pas tranchée quelle que soit l'éventualité.]

...

3. On observe ainsi une grande variété de champs de forces : gravifiques, électromagnétiques, nucléaires, morphogénétiques. Cet inventaire est loin d'être complet.

Ces exemples nous conduisent à énoncer le postulat suivant :

OBSERVATION PREMIÈRE 3 (OP 3) : *La Nature est tapissée d'objets appelés champs de forces.*

Précisons les propriétés de ces champs de forces. D'abord certaines forces sont plus puissantes que d'autres, bien que de même nature.

OBSERVATION PREMIÈRE 4 (OP 4) : *Les champs de forces sont hiérarchisés.*

L'origine, la nature de ces champs physiques ou morphogénétiques est un profond mystère. Ils agissent et se propagent on ne sait trop pourquoi. Nous avons parfois réussi à identifier certains champs de forces, à les différencier de leur totalité. Conceptuellement cependant, aucun progrès n'a été accompli depuis le jour où l'homme a perçu l'existence du Logos, de l'Ame, des Idées.

...

OBSERVATION PREMIÈRE 6 (OP 6) : *Les forces archétypales sont des forces de répulsion, de capture, d'annihilation.*

...

On peut imaginer un espace indifférencié de champs de forces, comme il existe un espace ambiant au départ indifférencié, et qui en serait en quelque sorte le dual. Au fur et à mesure que les objets se complexifient, l'espace des champs de forces se

différencie. Nous sommes convaincu que ces faits seront un jour démontrés avec grande clarté. Pour renforcer leur importance, érigeons-les en observations premières.

OBSERVATION PREMIÈRE 13 (OP 13) : *Tout objet est source de champs de forces.*

OBSERVATION PREMIÈRE 14 (OP 14) : *Toute complexification permet de déployer de nouveaux champs de forces.*

...

Toutes les forces ne sont pas aussi simples à décrire que les forces archétypales mais elles en sont dérivées.

Ainsi les forces de pression sont issues des forces archétypales de répulsion et de capture. Le réveil exerce des forces de pression mécanique sur la couverture du livre qui le porte. Ces forces de pression sont la résultante des forces gravifiques de capture exercées par la terre sur le réveil, et sur le livre, et des forces de cohésion internes qui maintiennent en forme les alliages constituant les différentes parties mécaniques du réveil. Quand il sonne, cet objet exerce alors des forces de pression « acoustiques » sur le tympan. Les aiguilles du réveil produisent sur la rétine un effet optique parfois transformé en actes moteurs (prendre le réveil pour le mettre à l'heure, ou se lever brusquement pour partir).

Les forces de cohésion sont également dérivées des forces de capture et de répulsion. La force de cohésion est une caractéristique interne d'une foule, d'une tribu, d'une société. Une « foule » de molécules d'eau à l'état vapeur est moins cohérente qu'une foule de molécules d'eau à l'état liquide, ou de glace. La société des manchots est plus unie que celle des chats. A ces notions de cohésion sont liées les notions de diffusion et de pénétration. Il est plus difficile de pénétrer dans du fer que dans de l'eau, il est plus facile de mélanger deux gaz que deux liquides.

Notons combien il est difficile de définir avec précision l'ensemble des forces dont un objet est la source : tout dépend des qualités du récepteur susceptible de les déceler, de sa distance vis-à-vis de la source. Cependant,

THÉORÈME 1.7: *L'évolution des objets s'accompagne d'une perception et d'une connaissance accrue des divers champs de forces.*

...

OBSERVATION PREMIÈRE 16 (OP 16) : *Les forces qui participent à la composition d'un objet ne peuvent dépasser un certain seuil.*

[Il s'agit ici moins d'une observation première que d'une remarque de bon sens de justification aisée]

...

Définition : Un objet est un ensemble de forces de valeurs finies, coordonnées entre elles par un système de régulation, de sorte que, livré à lui-même dans son substrat naturel, il présente des qualités observables de stabilité.

La question pratique est constamment posée de la détermination et de la représentation opérationnelle de ces forces. Dans le monde physique, ont été être évaluées jusqu'à présent trois types de données : les corporelles comme le nombre d'éléments, la densité, la masse, les données de transformations spatio-temporelles telles que les vitesses de propagation, les accélérations, et les données d'émissions liées à des transformation internes comme les fréquences, les intensités et taux de quantité corporelle émise, les occurrences et les vitesses de leur émission.

Le fossé paraît aujourd'hui difficilement franchissable qui sépare le monde physique de l'univers social. On a par exemple envie de dire que le tribun charismatique possède une force persuasive et attractive sur le bon peuple : celui-ci vient adhérer aux vues du tribun, s'attache à sa personne, peut être fasciné par elle. Le langage commun emploie également les termes de pouvoir, d'emprise pour nommer ce phénomène. Quels sont les facteurs physiques qui contribuent à lui donner sa place et son importance ? Comment définir le contenu sémantique du discours prononcé par le tribun, comment définir, pour chaque élément pertinent et actif du discours, le système de la dynamique cérébrale du tribun qui, comme par résonance, va éveiller un comportement analogue dans le cerveau de l'auditeur, comment évaluer le degré de similitude entre les deux systèmes dynamiques par lequel on pourrait estimer la qualité de l'adhésion de l'auditeur à l'orateur ? Comment parvenir à représenter ces éléments d'appréciation par le nombre, et ceux-ci sont-ils pertinents ?

A peu près 2000 années séparent Aristote de Lagrange : les progrès que nous accomplissons dans la compréhension et dans la représentation du monde sont plutôt lents à l'échelle de notre quotidien, rapides à l'échelle des temps géologiques. Dans 2000 ans encore, l'humanité sera-t-elle parvenue à mieux appréhender ces questions, si ce n'est à leur apporter de bonnes réponses ?

II.3.2 La classification et la décomposition des forces

II.3.2.1 *L'aspect phénoménologique*

La classification des forces a-t-elle jamais été formellement abordée ? Leibniz en a fait une première tentative dans *Specimen Dynamicum* [43]. Si l'on se place du point de vue opératoire, le point de vue empirique a prévalu, tant l'analyse est difficile. On a fait appel, pour distinguer les forces, à deux critères principaux : le premier se rapporte aux données physiques et complexes à l'origine des forces, le second concerne leurs effets dynamiques. Autant le premier critère donne lieu à une description riche mais confuse, autant le second paraît simple quoique efficace : on n'a pratiquement retenu alors que deux types de forces élémentaires, l'amour et la haine, l'attraction et la répulsion.

Pour aller plus loin dans l'établissement d'une typologie des forces, tenir compte d'un critère fonctionnel serait sans doute utile ; pour quelles raisons immédiates ou lointaines, pour atteindre quels objectifs à court ou à long terme, une force se déploie-t-elle ? Elle n'est plus alors unidimensionnelle, elle n'est plus alors, en général, la simple résultante géométrique au sens classique de ses composantes. Quels sont alors les éléments de structure interne qui permettent, favorisent, ou restreignent ce déploiement ? On se retrouve ici face à un champ immense et inexploré d'observation et d'analyse.

La question qui se pose également est celle des propriétés des fonctions ou des classes de fonction qui seraient susceptibles de les représenter. Les

premières tentatives de réponse qui ont été apportées, telles que celles que l'on va décrire, laissent le champ libre à l'imagination, confortée par l'observation.

II.3.2.2 *L'aspect formel*

Si les forces peuvent être représentées par des vecteurs, une classification opérée par la voie mathématique pourrait-elle apporter un nouvel éclairage qui se révélerait pertinent, utile dans la pratique ? La question vaut assurément d'être posée et étudiée.

Rappelons tout d'abord que l'introduction progressive de la notion d'espace vectoriel trouve son origine dans les diagrammes de composition des vitesses et des forces, ceux des vitesses remontant à l'époque d'Aristote, ceux des forces devenant explicites au début du XVIII^e siècle. La formalisation mathématique de ces diagrammes conduisant à la théorie des espaces vectoriels a été l'œuvre des mathématiciens du siècle suivant, Bellavitis en 1835 (*Annali dellescience del regno Lombardo-Veneto*, **5**, 244-259), Möbius en 1843 (*Mechanik des Himmels*) et Grassmann³² (*Lineale Ausdehnungslehre* [30]) en 1844 (suivi d'un article indépendant de Saint-Venant en 1845 (*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **21**, 620-625)). Grassmann utilise le terme de « grandeur » qui peut être une force ou une vitesse.

Par ailleurs, en théorie des systèmes dynamiques, sont étudiées les propriétés des ensembles possibles de trajectoires que font les objets en mouvement – la traînée d'un avion matérialise par exemple sa trajectoire. En chaque point de l'espace à l'intérieur duquel se meut l'objet, est supposée connue sa vitesse. L'ensemble de ces vecteurs vitesses forme ce qu'on appelle un *champ de vecteurs* (vitesses) sur l'espace considéré. On établit que la donnée du vecteur vitesse, en chaque point de l'espace de parcours, ou encore la donnée du champ de vecteurs, permet de reconstituer l'ensemble des trajectoires.

³² Grassmann lui-même donne ces références dans l'introduction à l'édition de son ouvrage faite en 1862.

Dans les années 1970, un mathématicien hollandais de grande qualité et qui a fréquemment séjourné à l'IHES, Floris Takens (1940-), a entrepris de classer ces champs différentiables par un procédé purement mathématique dit de stratification. Malheureusement, une telle classification en strates ne s'est avérée réalisable que pour les petites dimensions (inférieures à 5) de l'espace sur lequel opèrent ces champs. J'ai suggéré qu'on pourrait peut-être parvenir à établir une classification plus large et plus réaliste, en se fondant sur des critères plus en rapport avec les propriétés du monde physique.

De fait, on peut montrer, globalement en dimension 2, localement en toute dimension [12], que tout champ de vecteurs différentiable est somme de deux champs particuliers, l'un de type conservatif, le second de type gradient ; en l'absence de singularités, l'énoncé général local s'étend globalement³³. Ces deux notions de champs ont été élaborées par les mathématiciens à partir de données du monde physique qu'ils ont généralisées. Un exemple de système dynamique de type conservatif est celui de la mécanique classique de Newton-Lagrange : l'énergie de l'objet qui se meut le long d'une trajectoire reste constante. Le comportement de particules électriquement chargées dans un champ électrostatique fournit un exemple de système dynamique gradient : le long de chaque trajectoire, le champ de forces électriques faiblit continûment.

Un tel énoncé, qui relève des mathématiques, n'implique en aucune façon que la réalité physique lui soit toujours conforme, c'est-à-dire, par exemple, qu'une force soit automatiquement la composée de deux forces des types précédents, parfaitement reconnaissables par l'expérience. Dans bien des cas hors de la simplicité physique, le complexe de forces qui opère se compose de forces de capture et de forces de répulsion ; un tel complexe pourra en certains cas porter le nom de *Morse-Smale*, être appelé en d'autres termes hyperbolique.

³³ On regarde d'abord ce qu'il advient le long de chaque trajectoire, puis ensuite sur une trajectoire infiniment proche de la précédente, puis sur un tube entourant la trajectoire initiale, etc.

On peut faire rentrer les champs de vecteurs précédents dans ce dernier cadre conceptuel.

II.3.3 Le point de vue global : l'énergie

Nous avons déjà rencontré, par exemple avec Ostwald, des auteurs qui s'attachent à étendre le champ sémantique du concept d'énergie, quand bien même son usage opératoire serait encore souvent imprécis. Les sciences humaines ont tenté de s'approprier le concept, mais le chemin à parcourir est long pour parvenir à établir des théories dans ces domaines faisant appel de manière efficace aux concepts d'énergie et de force et débouchant sur des applications pratiques. Sous la plume du philosophe Henri Bergson (1859-1941) ou du psychologue Jung, l'emploi de ces termes n'est suivi d'aucune déduction opératoire. Ainsi par exemple, en dehors de son titre, *L'énergie spirituelle*, recueil d'essais et de conférences publié en 1919, le mot énergie n'apparaît jamais dans le cours de cet ouvrage de Bergson. On ne saurait pourtant faire fi des intuitions de ces grands esprits. De fait, la théorie de métaphores mathématiques introduite à la fin des années 1970 par René Thom (1923-2002) sous le nom de théorie des catastrophes [56] a débouché sur la construction de nombreux modèles d'intelligibilité dans tous les domaines des sciences humaines. Le dernier en date est celui de Jacques Viret, intitulé *Topologie et Psychologie* [59]. J'ai participé à ce courant avec un grand plaisir : entrer dans ces modèles éveille la très agréable sensation de comprendre des situations et des phénomènes au sein desquels semblait régner jusqu'à présent une obscure confusion. L'accomplissement de cet acte d'intelligibilité est sans doute une première étape significative vers la création et la meilleure maîtrise de techniques, tout au moins de procédures et de protocoles en sciences humaines. Dans cette théorie métaphorique, joue un rôle essentiel, par ses propriétés, la notion d'*énergie potentielle*, quand bien même elle serait difficile sinon impossible à mesurer dans les situations présentes.

Déjà, en physique, l'énergie est une entéléchie ; on atteint ici un nouveau degré dans l'abstraction. Il m'a paru alors nécessaire, et agréable pour l'esprit, d'asseoir ces différentes possibilités d'emploi du terme énergie au sein d'une construction plus générale. C'est la voie que j'ai suivie dans [11] :

Si nous revenons à l'Observation Première 13, on peut dire aussi :

OBSERVATION PREMIÈRE 13 *bis* (OP 13') : *Tout objet possède une fonction d'énergie.*

Cette fonction d'énergie s'exprime à l'aide d'une intégrale dépendant des forces qui composent l'objet, et prise sur le domaine spatio-temporel Ω occupé par cet objet.

Ω doit être considéré comme [contenant également] le domaine environnant l'objet, et sur lequel celui-ci a prise. On peut concevoir plusieurs Ω ; mais la famille des Ω ainsi établie comporte certainement une plage optimale à l'intérieure de laquelle se situe ce que Laurence Sterne, par Tristram Shandy interposé, nomme avec pertinence « la sphère d'influence » de l'objet, $\Omega^\wedge$. $\Omega^\wedge$ sert de variété-base au système dynamique fibre D_t qui représente l'état de l'objet à l'instant t , compte-tenu de cet environnement.

Des considérations exposées à la suite de ces premières lignes, on pourra reprendre celles-ci :

Un schéma d'interprétation développé dans le cours du texte à partir de cette idée fait penser à la célèbre formule d'Einstein qui relie l'énergie E à la fréquence ν de photons : le rapport E/ν est égal à la constante de Planck h . Si l'on se donne une certaine différence d'énergie ΔE , la Nature, qui a horreur du saut par trop discontinu, transforme le support de ce saut de manière à réduire la valeur de la discontinuité ; la variation d'énergie étant « jugée » trop brutale, l'objet support est brisé en ν fractions semblables les unes aux autres, de sorte que la fonction d'énergie qui présentait un saut initial de hauteur ΔE , est presque « lissée », approchée par une fonction en escalier présentant de nombreuses petites marches de hauteur voisine. Dans le cas

physique auquel nous venons de faire allusion, la hauteur de chaque marche est h . Lorsqu'on entre dans le domaine du vivant, les phénomènes sont d'une régularité moins mécanique. Si l'on considère une chaîne métabolique qui part de M (énergie V_M) pour aboutir en M' (énergie $V_{M'}$), le saut $\Delta E = V_M - V_{M'}$ est « lissé » par toute une série d'états intermédiaires, de nature enzymatique et souvent oscillophore : le passage d'un état au suivant se fait d'une manière légèrement discontinue, la différence d'énergie δE entre ces deux états caractérisant en somme la déformation que subit l'état initial par l'effet de δE . Qu'ils agisse de la chaîne de transmission synaptique, du cycle du sommeil, ou du cycle de la glycolyse, la nature géométrique et sans doute physique du phénomène est probablement la même dans son tréfonds.

Revenons à la microphysique. On peut convenir d'attacher à l'atome d'hydrogène une certaine fonction-potential, dont les diverses marches, en nombre égal à la codimension de la singularité géométrique source, correspondraient aux différentes raies d'émission lumineuse (ou encore aux différentes valeurs propres de l'équation d'onde de Schrödinger). Les marches auraient alors plutôt la forme de petites cuvettes, dans le creux desquelles repose une sorte de liquide. L'effet d'un apport extérieur d'énergie conduit à étendre le bassin de la cuvette tout en diminuant sa hauteur : de la sorte, une part du liquide tombe d'une plage sur l'autre ; la perte d'énergie potentielle par effet de la chute apparaît sous forme d'énergie lumineuse. Naturellement, quelque peu aveuglés par l'étendue des lacs, nous ne faisons pas attention à la cascade par laquelle transite le fluide ; surtout, le phénomène de chute est trop rapide pour être saisi par les sens et la perception, enfin, le fait qu'en tombant une masse fluide se fragmente en gouttelettes très fines, accroît encore la difficulté d'une observation possible. Finalement, le phénomène apparaît comme bien quantifié et discret : ce n'est qu'une illusion.

On ne manquera pas de reprocher à toutes les considérations précédentes, le vague et l'imprécision naïve. Sans doute, pour certains, vaut-il mieux ne pas avoir d'idée du tout, plutôt que de présenter des notions aux contours encore mal définis ; entre la vie et la mort, chacun fait son choix.

Après cette digression où il est affirmé que la Nature a horreur, sinon du vide, tout au moins de l'excès, revenons un instant sur la notion classique d'énergie.

Le lagrangien de la mécanique classique, $L(q, q', t)$, est une expression analytique qui lie le temps t , à la position q et à la vitesse q' de chaque particule. Le lagrangien du mathématicien généralise ce lagrangien en prenant en compte les dérivées d'ordre supérieur de $q(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots)$.

Les dérivées partielles du lagrangien ont pour *signification physique* la force d'une part, l'impulsion $p = mw$ d'autre part :

- la i -ième composante de la **force** F est $F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$,
- la i -ième composante de l'**impulsion** p est $p_i = mv_i = \frac{\partial L}{\partial q_i'}$.

L'application du principe de moindre action – cf l'Appendice II.3 – conduit à retrouver la règle de Newton :

$$F = m \gamma = m \frac{d}{dt}(v) = \frac{d}{dt}(mv) = \frac{d}{dt}(p)$$

qui s'écrit donc encore, composante par composante :

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i'} \right) = 0 \text{ (équation d'Euler-Lagrange).}$$

Dans l'écriture classique de L , et de nombreux autres lagrangiens utilisés en physique [17] [18], l'accélération n'apparaît pas : en d'autres termes, cette accélération n'altère en aucune façon les propriétés autres que dynamiques du système. Toutefois, dans les théories où l'on prend en compte la gravité, qui est liée à la courbure scalaire de l'espace, les dérivées secondes de la métrique apparaissent dans le lagrangien ($S = \int R d\omega$ avec $R = g^{ik} R_{ik} = g^{il} g^{km} R_{iklm}$) puisque cette courbure en dépend. Il se pourrait aussi qu'il faille considérer des lagrangiens plus généraux, associés à des systèmes où une accélération forte

aurait quelque effet sur des paramètres entrant dans la définition du lagrangien – par exemple lorsque l'accélération déformerait l'objet et par suite modifierait les pertes d'énergie causées par des frottements.

Les positions et vitesses des éléments du système sont, à chaque instant, celles qui, selon le principe de moindre action de Fermat-Maupertuis, rendent minimale, au cours d'un déplacement effectué entre les instants t et t' , la **dépense d'énergie globale S** nécessaire pour effectuer ce déplacement :

$$S = \int_t^{t'} L(q, q', t) dt .$$

S , l'intégrale du lagrangien³⁴ par rapport au temps, est appelée aujourd'hui l'*action*. Hamilton lui avait donné le nom de « fonction principale » [31].

Lagrange montre, le calcul est très classique, qu'on peut déterminer ces positions et ces vitesses à partir de la connaissance des seules dérivées partielles de L . Ainsi, sous la contrainte d'extrémalité, ici de minimalité, la connaissance de la donnée globale permet d'établir celle des états locaux. Ce fait est révélateur de l'extrême stabilité et de la cohésion interne des champs et des phénomènes physiques en présence.

Une telle donnée synthétique est évidemment particulièrement satisfaisante pour l'esprit qui, par instinct, recherche l'économie, et qui, par intuition, parce qu'il porte en lui tout le passé des mondes physique, chimique et intellectuel, éprouve constamment le sentiment d'une profonde unité, d'une profonde cohérence dans les réalisations de la nature.

D'ailleurs, l'analogie serait sans doute fondée qui établirait des parallèles entre les dieux et des énergies locales représentées par des symboles, entre un

³⁴ On trouvera une première étude historique sur les conditions dans lesquelles Lagrange a été amené à concevoir sa méthode dans l'ouvrage de Wilton B. FILHO [25], qui, par ailleurs, ne traite pas la question importante de la stabilité. On rencontre dans l'ouvrage le fait important que l'opérateur δ introduit par Lagrange commute avec l'opérateur d . Ce fait a été clairement justifié par Lazare Carnot dans ses *Réflexions sur la Méthode du Calcul infinitésimal* (1797) (articles 95 à 105) [15]. Notons qu'il n'y a pas de symbole particulier pour indiquer la déformation d'un opérateur quelconque.

dieu unique s'imposant à l'univers, et une énergie globale gouvernant l'état de cet univers. Certes, l'on reste dans le domaine de la représentation symbolique ; mais la situation psychologique de l'homme est radicalement différente : alors qu'autrefois il implorait les dieux, pratiquait les sacrifices et parfois de sa propre personne pour rendre ces divinités attentifs à nos souffrances, nous en délivrer, alors qu'il s'en remettait à leur bon vouloir pour fixer notre destin, voici que, maintenant, il devient capable d'en comprendre les caprices ou leurs devenir, de les orienter dans leurs démarches, et même très localement, de jouer avec leurs personnes, et de les plier à son service. L'homme devient un Prométhée, un Faust. Mais on sait ce qu'il advint de ces héros symboliques : on veut croire que la leçon en sera tirée.

Le lien entre espace physique et énergie a été évoqué dans l'avant-propos à cet ouvrage. Il apparaît à travers la définition formelle de l'énergie globale : une intégrale sur un lieu Ω . Dans les cas simples, la métrique de l'espace détermine l'énergie locale – une métrique représente, en effet, un travail [13]. Sans aucun doute de manière un peu courte, élémentaire, et quant au fond peu nouvelle, on définira donc l'espace physique comme un lieu imprégné d'énergie plus ou moins concentrée. Les physiciens l'ont parfois appelé « éther », ils le désignent souvent aujourd'hui du nom de « vide ». Comme on le découvrira dans le dernier chapitre, la question de la nature de l'espace a été posée par Platon. De nombreux chapitres de la *Physique* d'Aristote lui sont consacrés. La question reste pendante. L'appropriation de toutes les manifestations de l'espace par l'homme reste le grand projet de son aventure.

On ne peut quitter ce chapitre sans revenir sur la et les questions implicitement soulevées dans le premier : quel est le statut de l'ensemble des connaissances que nous avons accumulées et que nous cherchons à accroître, quel est celui de l'univers symbolique que nous avons bâti, version moderne du

monde platonicien des Idées, et qui s'incarne dans nos réalisations matérielles, dans nos actes, dans nos jugements, dans notre personnalité ? Les notions de force et d'énergie sont-elles pertinentes pour désigner les qualités et les effets de cet immense univers de données, potentiellement capables d'informer, c'est-à-dire de façonner le monde, par notre intermédiaire, par les truchements des outils conceptuels et matériels que nous avons créés, de l'organisation de nos sociétés, de nos personnes ? Pourra-t-on rendre compte avec précision, en termes d'énergie, de la constitution d'un objet, élaborée au cours de milliers d'années, organisée en noyaux et en strates à la fonction précise, parviendra-t-on à décrire, en ces mêmes termes, la chaîne compliquée d'efforts, de dépenses de toute nature, matérielles et conceptuelles, qui, au fil des ans et des siècles, ont accompagné la constitution de cet univers ? Comment évaluer l'intérêt, la puissance opératoire d'un concept, d'un énoncé général, d'une recommandation ? Quels jeux de contraintes en limitent les effets, ou bien au contraire, quels éléments de catalyse les amplifient ? Quels pourraient être les invariants associés à leur propre ensemble, ceux des transformations qu'elles induisent, et peut-on alors prolonger à cet univers les invariances du monde physique ?

Chapitre III

LA STABILITÉ

There is scarcely any question in dynamics more important for Natural Philosophy than the stability or instability of motion.
Thomson & Tait ([47], 346)

Les objets n'existent que pour autant ils présentent des propriétés de stabilité. Le phénomène universel de la mise en place de la stabilité est encore mal compris.

De manière un peu caricaturale et dans le monde physique, la stabilité se présente sous deux formes, l'une absolue, l'autre relative.

L'invariabilité caractérise la forme absolue de la stabilité. Elle a, de tout temps, été prise en considération. Dans le monde physique, elle s'exprime à travers l'énoncé de lois universelles, de principes de conservation. Dans le monde symbolique, notamment des mathématiques, elle se traduit d'abord par la recherche et par la mise en exergue d'invariants divers, associés à des énoncés partout vrais.

La stabilité au sens ordinaire est la forme relative de cette notion. Elle intéresse l'humanité à travers l'avenir du système solaire, sur lequel on a commencé à se pencher au dix-huitième siècle. Les progrès de l'astronomie et dans la recherche des causes des mouvements conduisent à effacer de l'esprit la croyance en un monde rigide, fixe, immuable. Dans ce cadre, Lagrange entreprend le premier un examen assez général des conditions analytiques de stabilité. Ces conditions seront pleinement développées par Liapounoff à la fin du dix-neuvième siècle, raffinées par la suite, surtout après les apports de Poincaré. Si au départ, on traite de la stabilité de position, celle des points singuliers, des points d'équilibre, on en vient rapidement à examiner la stabilité de trajectoires et d'ensembles de trajectoires, d'objets formels : on débouche alors sur la notion de stabilité structurelle introduite en 1937.

L'étude de la stabilité relative dans le monde symbolique des mathématiques se développe également à la fin du dix-neuvième siècle, lorsque apparaissent des propriétés qui ne sont que presque partout vraies. Ce chemin de la pensée conduit à la définition récente de la notion de prévalence.

La présence de symétries est l'une des manifestations extérieures de la stabilité, parmi les plus visibles. Chaque objet possède des jeux de symétrie interne plus ou moins extériorisés. Les transformations qui respectent des symétries forment des ensembles auxquels on a donné le nom de groupes. Ces groupes sont différents selon le régime de symétries qu'ils représentent. Passer d'un groupe à un autre, par bifurcation selon les uns, par brisure de symétrie selon les autres, peut refléter un changement de nature. Les physiciens utilisent ce langage pour décrire l'univers des particules.

Ces études font apparaître un certain nombre de concepts importants inséparables de celui de stabilité : singularité, extrémalité, bifurcation. Les lieux de bifurcation sont du plus grand intérêt pour la connaissance des modifications de structures et de morphologies.

Platon est le premier philosophe connu pour avoir énoncé le principe selon lequel tout objet s'efforce de conserver sa stabilité spatiotemporelle, principe métaphysique qui semble jouer un rôle dominant comme moteur de l'évolution et de la structuration.

III.0 Introduction

« Ces électrons occupent des états quantiques tels que le « nuage électronique » autour du noyau atomique a une symétrie sphérique. Les calculs démontrent que cette structure électronique est extrêmement stable : l'énergie est inférieure à celle de toute autre configuration. »

« Les satellites de la série TIROS tournaient sur des orbites situées entre 700 et 900 kilomètres d'altitude et fournissaient des images de la surface de la Terre avec une précision d'environ un kilomètre. Ils étaient stabilisés par spin – en tournant sur eux-mêmes – si bien que la caméra n'avait pas la Terre dans son champ de vision en continu »

« A basse altitude, jusque vers 1800 mètres environ, le manteau neigeux contient des couches humides et consolidées par regel. Sa stabilité est donc assez bonne. »

« Processus de stabilisation des cristaux liquides en biologie »

« Vladimir Poutine, qui a inauguré l'Année de la Russie en Chine, s'est d'ailleurs inquiété du caractère « *instable* » de la relation commerciale sino-russe »

« Il en ressort que des travaux épidémiologiques de qualité et convergents montrent la grande stabilité de ces troubles pendant l'enfance et l'adolescence et le risque de marginalisation grave à l'adolescence avec désocialisation, échec des apprentissages, violence à l'égard d'eux-mêmes et des autres. »

« L'instabilité de la vie au travail appelle la construction de nouvelles trajectoires sociales »

« La stabilité politique du Bénin est mise en cause par un conflit sur le calendrier électoral ».

Ces quelques citations à la Prévert, trouvées presque toutes dans les journaux quotidiens et dans les grandes revues de vulgarisation scientifique, témoignent de l'universalité d'emploi de la notion de stabilité.

Est dressé d'abord, dans ce chapitre, un historique *ramassé* sur les formes de conceptualisation de cette notion. Il ne s'agit pas bien sûr ici de dresser un historique exhaustif et détaillé sur le plan mathématique ; mais peut-être les spécialistes trouveront-ils parfois dans ce texte des compléments à leur propre étude. On observera ici en premier lieu que la conceptualisation de la notion de stabilité fut d'abord le fait de ceux qu'on appelait autrefois les « géomètres », et qui n'étaient pas simplement mathématiciens.

L'invariance est l'une des formes de la stabilité qui joue également un grand rôle en physique et en mathématiques : elle est désignée ici sous le vocable de stabilité absolue, en opposition à la forme relative de stabilité qu'est la stabilité ordinaire.

Les deux formes de stabilité partagent le même cortège de concepts attenants – singularité, extrémalité, bifurcation – d'un intérêt tout particulier pour la compréhension des phénomènes. Je m'attarderai en particulier sur ce phénomène si important de la bifurcation, entrevu à la fin du dix-neuvième siècle seulement. Ce paragraphe s'appuie en grande partie sur trois textes parus il y déjà quelques années [12], [13], [14].

J'insiste enfin sur le caractère fonctionnel du concept de stabilité : il lui confère une dimension métaphysique et une capacité d'implications rarement prises en compte.

III.1 La stabilité (relative) : le concept et le terme au cours de l'histoire

L'émergence véritable du concept de stabilité est *récente*. Dans les temps anciens, comme pendant la période protégée de l'enfance, la prise de conscience des fluctuations du monde n'imprègne pas encore la pensée. Le monde est immuable : la notion de stabilité absolue correspond à cette permanence. Il faudra attendre le développement de l'astronomie, la formalisation de la mécanique par Lagrange, les constructions artificielles de l'homme, leur lot de défaillances et

d'échecs immédiats, pour que, petit à petit, la prise en considération de la stabilité, qualifiée ici de relative, devienne indispensable, que la notion prenne corps, se précise, et fasse l'objet de travaux conséquents. Elle sera formalisée dans le cadre de la représentation du monde physique, et c'est dans ce cadre que nous allons nous maintenir dans ces premiers paragraphes.

Le terme « stable » apparaît certes, parfois, dans les écrits de Platon (cf le chapitre suivant) ou d'Aristote, mais non, m'a-t-il semblé, chez les philosophes et savants qui les ont précédés. Platon et Aristote auront longuement disserté sur le mouvement. Mais n'ayant peut-être jamais construit de leurs mains une chaise bancale, n'étant point expérimentateurs, ayant toujours admiré la merveilleuse course des astres dans le ciel étoilé, l'étude de la stabilité des mouvements ne leur est point apparue nécessaire.

L'œuvre de nos deux grands philosophes restera souveraine jusqu'à Galilée : le contenu du *Dialogo* atteste de la connaissance que Galilée a de Platon, et surtout, l'ampleur des références à Aristote témoigne de la place de premier plan qu'on lui accordait encore.

Cependant, chez les mécaniciens comme pouvait l'être Leonardo da Vinci, apparaît la préoccupation liée à l'instabilité. Dans son *Trattato della Pittura* [49], le CAP. CCLXIII, ayant pour titre *Ponderatione de corpi che non si muovono* (Pondération des corps qui ne bougent pas), commence par ces mots :

Le ponderationi overo bilichi degl'huomini si dividono in due parti, cioè semplice, e composto (La pondération ou équilibre instable des hommes se divisent en deux parties, à savoir la simple et la composée).

Galilée, avons-nous rappelé, était aussi féru de construction navale et de mécanique. Au cours de la première journée de son *Dialogue* [23], en fin du paragraphe 17, il fait tenir à Salviati ce propos qui renvoie à Platon :

Or, pour pouvoir bâtir résolument, il faudrait que les premiers principes et les fondements soient assurés, fermes et stables

« fermes et stables », nous retrouverons quelques lignes plus loin ces deux adjectifs sous une autre signature. Le terme « stabilité » apparaît dans cette traduction dans les seconde et quatrième journée du dialogue : le contexte laisse entendre que stabilité est employé dans le sens d'immobilité. Mais l'introduction par Galilée, en fin de la quatrième journée, de ses remarques sur les effets de petites variations des données est des plus intéressantes.

Les termes « stabilité » ou « instabilité » n'apparaissent pas encore dans la monumentale Encyclopédie de Diderot et de d'Alembert (parution du premier tome, 1751, fin de la rédaction du dernier tome, 1765). Cependant la problématique a été soulevée à l'époque de sa parution. En 1761 par exemple, d'Alembert publie un ouvrage *d'Opuscules mathématiques ou mémoires ...*[2]. Il écrit dans le troisième, *Recherches sur les oscillations d'un corps quelconque qui flotte sur un fluide* :

lorsqu'un corps est en équilibre sur un fluide, & qu'on le déplace un peu de cet état, on peut voir par les calculs précédens, si l'état d'équilibre étoit *ferme*, comme l'appelle M. Daniel Bernoulli, c'est-à-dire, si le corps reviendra de lui-même à cet état. Car il n'y a qu'à examiner si les oscillations du corps doivent très petites, ou si elles ne le seront pas. Dans le premier cas il reviendra, ou tendra à revenir à son premier état ; dans le second cas, il culbutera. V. l'ouvrage cité [*Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides*, 1752] Art. 125, & le *Traité de Dyn.* Art. 147, seconde édition. (Première édition : 1743)³⁵

Dans ce passage du huitième chapitre de l'ouvrage précité (ou « mémoire » intitulé *Remarques sur quelques questions concernant l'attraction*) d'Alembert fait allusion à un « géomètre Italien » dont il conviendrait de trouver le nom, et

³⁵ Je n'ai pas pu retrouver le texte de Bernoulli auquel d'Alembert fait allusion : la publication de la totalité des œuvres de Daniel Bernoulli est encore en chantier.

qui pourrait être un des premiers à avoir posé le problème de l'étude de la stabilité :

Cependant un géomètre Italien, qui a du nom dans les Mathématiques, l'a attaquée par cette considération, que si le noyau intérieur était aplati, & qu'on dérangeât le fluide extérieur de son état d'équilibre, il n'y reviendrait jamais, au lieu qu'il y reviendrait de lui-même si le noyau étoit allongé ; d'où il conclut que cette dernière hypothèse est la seule à pouvoir rendre raison de l'équilibre. Je pourrais d'abord répondre que dans toutes les recherches qu'on faites jusqu'ici sur la *Figure de la Terre*, il n'a jamais été question que de l'état d'équilibre ; & que jusqu'à ce Géomètre, on n'avait point encore pensé à y ajouter cette condition, que le fluide dérangé de lui-même, se rétablisse de lui-même.

Certes, depuis Newton qui traitait la lune comme une masse fluide, on s'est interrogé sur les conséquences que certaines variations des données pouvaient avoir sur les formes et les durées de mouvements particuliers. Cependant les effets du dérangement des équilibres n'ont point encore soucie tous ces grands esprits qui précédèrent notre géomètre. D'Alembert non plus n'étudiera pas cette question. Rendons-lui par ailleurs ici cet hommage. Il a été en quelque sorte un des tout premiers à avoir mis en œuvre ce que les physiciens appellent parfois le principe de correspondance, cette forme d'illustration de la méthode analogique³⁶, qui consiste, dans une discipline donnée, en une extension des principes opératoires utilisés à un certain stade de développement de la discipline pour traiter un nouveau stade de développement, plus général que le précédent. D'Alembert a étendu aux points mobiles le principe des travaux virtuels, qui est l'outil d'étude de l'équilibre des points immobiles. Dans la même veine, il a rendu variables les constantes d'intégration de systèmes différentiels

³⁶ Voici ce qu'en dit Heisenberg en 1930 : « L'expression la plus générale du principe de correspondance de Bohr consiste en ceci : Il existe, entre la théorie des quanta et la théorie classique appropriée à la représentation employée, une analogie qualitative qui subsiste jusque sans les détails. Cette analogie ne sert pas seulement de guide pour trouver les lois formelles, sa valeur particulière réside bien plus en ce qu'elle fournit également l'interprétation physique des lois trouvées. » in W. HEISENBERG *Les principes physiques de la théorie des quanta*, Gauthier-Villars, Paris, 1972

particuliers pour obtenir alors les solutions de systèmes différentiels plus généraux. L'arrêt n'est qu'une situation particulière, singulière, du mouvement. Les lettres échangées entre d'Alembert et Lagrange témoignent de la profonde admiration de ce dernier envers d'Alembert. Lagrange a brillamment mis en application ces conceptions pénétrantes de d'Alembert.

En 1777, Laplace publie un premier mémoire, *De l'équilibre ferme des plantes* (tome 9, p.230) où apparaît sous sa plume le terme de stabilité :

On peut même dire généralement que, dans cette recherche, la considération de la stabilité de l'équilibre est inutile, puisqu'il n'y a point vraisemblablement d'équilibre ferme absolu et que la stabilité est toujours relative à la nature de l'ébranlement primitif.

Dans ce mémoire, « équilibre ferme » signifie constant, mais dans un sens encore vague. Il révèle en tout cas qu'à cette époque, la question de la stabilité était bien présente dans les esprits. Laplace la traite effectivement dans des cas particuliers.

Mais elle est examinée, pour la première fois dans sa généralité sur le plan mathématique, par Lagrange dans son traité de 1788. Tout le traitement analytique moderne est davantage qu'en puissance dans ce texte fondateur. Nous reviendrons sur ce sujet dans le paragraphe III.

Lagrange ne propose aucune définition formelle de la notion de stabilité, il forge cependant les outils mathématiques qui permettront plus tard de la donner. Cette notion semble alors faire partie des concepts naturels dont chacun possède la connaissance immédiate.

Selon la célèbre formule d'Aristote, « l'inanimé précède l'animé ». Lagrange commence par traiter la question de la stabilité des situations en équilibre et immobiles avant d'aborder la question de la stabilité des mouvements.

Dans la section III de la première partie de son ouvrage, consacrée à la statique, Lagrange s'intéresse, dans son paragraphe V, aux « propriétés de l'équilibre ». Voici les lignes où il emploie pour la première fois le terme de stabilité :

nous allons maintenant démontrer que, si cette fonction est un minimum, l'équilibre aura de la stabilité, en sorte que, le système étant d'abord supposé dans l'état d'équilibre et venant ensuite à être tant soit peu déplacé de cet état, il tendra de lui-même à s'y remettre en faisant des oscillations infiniment petites : qu'au contraire, dans le cas où la même fonction sera un maximum, l'équilibre n'aura pas de stabilité, et qu'étant une fois troublé, le système pourra faire des oscillations qui ne seront pas très petites, et qui pourront l'écarter de plus en plus de son premier état. [page 71]

L'examen de l'équilibre des poulies lui permet de donner une illustration de la théorie qu'il élabore, et il conclut, c'est Lagrange qui impose l'italique dans l'écriture des termes :

27. Maintenant il est clair que, comme le poids tend à descendre le plus qu'il est possible, l'équilibre n'aura lieu, en général, que lorsque la valeur de u qui exprime la descente du poids depuis la poulie fixe sera maximum et que, par conséquent, celle de Π sera un minimum ; et l'on voit en même temps que, dans ce cas, l'équilibre sera *stable*, parce qu'un petit changement quelconque dans la position du système ne pourra que faire remonter le poids, lequel tendra à redescendre et à remettre le système dans l'état d'équilibre.

Mais nous avons vu que, pour l'équilibre, il suffit que l'on ait $d\Pi = 0$ et, par conséquent, $du = 0$, ce qui a lieu aussi lorsque la valeur de u est un minimum, auquel cas le poids, au lieu d'être le plus bas, sera, au contraire, le plus haut. Dans ce cas, il est visible qu'un petit changement dans la position du système ne pourra que faire descendre le poids, qui alors ne tendra plus à remonter, mais à descendre davantage et à éloigner de plus en plus le système du premier état d'équilibre ; d'où il suit que cet équilibre n'aura point de *stabilité* et qu'étant une fois troublé, il ne tendra pas à se rétablir.

Notons que, dans son étude, Lagrange fait apparaître les formes quadratiques pour lesquelles il donne le procédé, parfois attribué à Gauss, permettant de les réduire à une somme de carrés.

Stabilité apparaît à nouveau dans la seconde partie de l'ouvrage qui traite de la dynamique. On retiendra les lignes suivantes :

10. Au reste, entre ces deux états de stabilité et non stabilité absolue, dans lesquels l'équilibre, étant tant soit peu dérangé d'une manière quelconque, tend à se rétablir de lui-même ou à se déranger de plus en plus, il peut y avoir des états de stabilité conditionnelle [ici commence la page 387] et relative, dans lesquels le rétablissement de l'équilibre dépendra du déplacement initial du système. Car si, quelques-unes des valeurs de $\sqrt{k}$ sont imaginaires, les termes correspondants dans les valeurs des variables contiendront des arcs de cercle, et l'équilibre ne sera pas stable en général ; mais, si les coefficients de ces termes deviennent nuls, ce qui dépend de l'état initial du système, les arcs de cercle disparaîtront, et l'équilibre pourra encore être regardé comme stable, du moins par rapport à cet état particulier.

11. Lorsque toutes les valeurs de $\sqrt{k}$ sont réelles et inégales et que, par conséquent, l'équilibre est stable, les expressions de toutes les variables seront composées d'autant de termes de la forme

$$E \sin (t\sqrt{k} + \varepsilon)$$

qu'il y a de variables.

Il poursuit quelques lignes plus loin, analysant plus profondément que d'Alembert les observations de Daniel Bernoulli et se montrant, après celui-ci, précurseur de Fourier :

Daniel Bernoulli avait remarqué cette composition d'oscillations simples et isochrones dans le mouvement d'une corde vibrante chargée de plusieurs petits poids, et il l'avait regardée comme une loi générale de tous les mouvements qui peuvent avoir lieu dans un système quelconque de corps. Un seul cas, comme celui des cordes vibrantes, ne suffisait pas pour établir une telle loi ; mais l'analyse que nous venons de donner établit cette loi d'une manière certaine et générale et fait voir que, quelques

irrégulières que puissent paraître les petites oscillations qui s'observent dans la nature, elles peuvent toujours se réduire à des oscillation simples, dont le nombre sera égal à celui des corps oscillants [indépendants, Lagrange l'a énoncé plus haut] dans le même système.

C'est une suite de la nature des équations linéaires auxquelles se réduisent les mouvements des corps qui composent un système quelconque, lorsque ces mouvements sont très petits.

12. Si les valeurs des quantités $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$, $\sqrt{k''}$, ... sont incommensurables, il est clair que les temps des oscillations seront aussi incommensurables et que, par conséquent, le système ne pourra jamais reprendre sa première position.

Mais, si ces quantités sont entre elles comme nombre à nombre et que leur plus grande commune mesure soit μ , on verra facilement que le système reviendra toujours au bout d'un temps $\theta = 2\pi/\mu$, π étant l'angle de 180° . Ainsi θ sera le temps de l'oscillation composée de tout le système.

Quittons Lagrange³⁷ pour revenir à Laplace. Il publiera plus tard deux autres mémoires, intitulés : *Sur la stabilité de la figure de la mer* (t.11, p 527), et *De la stabilité de l'équilibre des mers*. Dans les pages précitées de son *Exposition du système du monde* de 1796, il reprend d'abord les termes de Galilée ou ceux de Lagrange, rappelle en termes simples comment, selon celui-ci, l'on procède pour établir l'équilibre, donne la caractérisation phénoménologique de ce qu'il entend par équilibre « ferme et stable », distingue à son tour deux modes de stabilité, l'absolue et la relative, également deux modes d'équilibre, le stable et le non stable, dont il donne un procédé pour les distinguer :

i) [les conditions de l'équilibre]

En concevant la position de chaque point du système, déterminée par trois coordonnées rectangles, la somme des produits de chaque force, par la quantité dont

³⁷ L'erreur suivante, qui ne figure pas dans la première édition, est mise en exergue par Thomson et Tait dans les dernières éditions de leur *Treatise on Natural Philosophy*, article 343 m : « It is remarkable that both Lagrange and Laplace fell into the error of supposing that equality of roots necessarily implies terms in the solution of the form $t e^t$ (or $t \cos pt$), and therefore that for stability the roots must be unequal. This we find in the *Mécanique Analytique*, Seconde Partie, section VI. ... The error of Lagrange and Laplace was pointed out and corrected by Weierstrass in 1858. »

le point qu'elle sollicite s'avance dans sa direction, lorsqu'on fait varier infiniment peu le système, sera exprimée par une fonction linéaire des variations des coordonnées de ses différents points ; ces variations ont entre elles des rapports résultant de la liaison des parties du système ; en réduisant donc, au moyen de ces rapports, les variations arbitraires au plus petit nombre possible, dans la somme précédente qui doit être nulle pour l'équilibre, il faudra, pour qu'il ait lieu dans tous les sens, évaluer séparément à zéro le coefficient de chacune des variations restantes, ce qui donnera autant d'équations qu'il y aura de ces variations arbitraires. Ces équations réunies à celles que donne la liaison des parties du système renfermeront toutes les conditions de son équilibre.

ii) [équilibre stable]

Il existe deux états d'équilibre très-distincts. Dans l'un, si l'on trouble un peu l'équilibre, tous les corps du système ne font que de petites oscillations autour de leur position primitive ; et alors l'équilibre est *ferme* ou *stable*.

iii) [deux modes de stabilité]

Cette stabilité est absolue, si elle a lieu quelles que soient les oscillations du système : elle n'est que relative, si elle n'a lieu que par rapport aux oscillations d'une certaine espèce.

iv) [deux modes d'équilibre]

Dans l'autre état d'équilibre, les corps s'éloignent de plus en plus de leur position primitive, lorsqu'on les en écarte. On aura une juste idée de ces deux états [le stable et l'autre], en considérant une ellipse placée verticalement sur un plan horizontal. Si l'ellipse est en équilibre sur son petit axe, il est clair qu'en l'écartant un peu de cette situation, par un petit mouvement sur elle-même, elle tend à y revenir en faisant des oscillations que les frottements et la résistance de l'air auront bientôt anéanties. Mais si l'ellipse est en équilibre sur son grand axe, une fois écartée de cette situation, elle tend à s'en éloigner davantage, et finit par se renverser sur son petit axe. La stabilité de l'équilibre dépend donc de la nature des petites oscillations que le système, troublé de manière quelconque, fait autour de cet état. Pour déterminer généralement de quelle manière les divers états d'équilibre stable, ou non stable, se succèdent, considérons une courbe entrante placée verticalement dans

une situation d'équilibre stable. Dérangée un peu de cet état, elle tend à y revenir ; cette tendance varie à mesure que l'écartement augmente, et lorsqu'elle devient nulle, la courbe se retrouve dans une situation nouvelle d'équilibre, mais qui n'est point stable, puisque la courbe, avant d'y arriver, tendait encore vers son le premier état. Au delà de cette dernière situation, la tendance vers le premier état, et par conséquent vers le second, devient négative jusqu'à ce qu'elle redevienne encore nulle ; et alors la courbe est dans une situation d'équilibre stable. En continuant ainsi, on voit que les états d'équilibre stable et non stable se succèdent alternativement, comme les *maxima* et les *minima* des ordonnées des courbes. Il est facile d'étendre le même raisonnement aux divers états d'équilibre d'un système de corps.

Il faudra attendre près d'un siècle pour que soient accomplis des progrès significatifs dans l'étude de la stabilité. Pendant cette période transitoire, la question de la stabilité des corps célestes, comme d'ailleurs des corps fluides, reste la motivation principale pour cette étude. La majorité des mathématiciens du XIX^e siècle auront publié au moins un article sur ces sujets. Le titre de cette publication en 1856 de J.C. Maxwell est par exemple significatif : *On the stability of the motion of the Saturn's ring* [33], un sujet d'étude traité alors depuis près d'un siècle.

Cependant, dès les années 1840 la construction d'appareillages au fonctionnement régulier conduit à poser des questions de contrôle et de stabilité. L'une des premières études est liée encore à l'astronomie. George Biddel Airy (1801-1892), alors astronome royal, confronté au problème de la régulation du mouvement d'un télescope en compensation de celui qui accompagne le mouvement de la terre, publie en 1851 un premier article *On a method of regulating the clock-work for equatoreal* [1]. Maxwell, qui rencontre également un problème de stabilisation du mouvement d'un solénoïde en rotation, publie en 1868 une article sur la régulation, *On the governors* [34]. La technique employée par Maxwell dans son article sur les anneaux de Saturne est la linéarisation des systèmes d'équations différentielles, appelés plus brièvement systèmes

différentiels, qui donnent les équations du mouvement : ce procédé sera largement utilisée dans les travaux du siècle suivant. Au cours d'une discussion à la London Mathematical Society en 1868, Maxwell pose le problème de trouver un critère de stabilité pour les systèmes différentiels d'ordre quelconque.

W. K. Clifford (1848-1879) donne une réponse [21] qui sera exploitée par Edward John Routh (1831-1917). Routh était familier avec les travaux d'Airy (dont il épousa la fille) et de Maxwell. Il aborde le problème de la stabilité dans un premier ouvrage paru en 1860. Celui qu'il publie en 1877 est le premier traité qui dans son titre se réfère à la stabilité : *A treatise on the stability of a given state of motion* [42]. Il y reprend l'exposé d'un critère, dit critère de Routh, qu'il a présenté en 1874 ; on en dira un mot plus loin. Dans ce traité, alors qu'apparaît le terme « instabilité », la notion de stabilité est un peu précisée pour la première fois par l'intermédiaire d'une évaluation des perturbations. Ces perturbations sont désignées par des lettres x, y &c. :

The quantities $x, y, z, \&c.$ are said to be *small* when it is possible to choose some quantity numerically greater than all of them, which is such that its square can be neglected. This quantity may be called the standard of reference for small quantities.

If, after the disturbance, the co-ordinates $x, y, z, \&c.$ remain always small, the undisturbed motion is said to be *stable* ; if, on the other hand, any one of the co-ordinate's become large, the motion is called *unstable*.

It is clear that the same motion may be stable for one kind of disturbance and unstable for another. But it is usual to suppose the disturbance *general*, so that if the motion can be made unstable by any kind of disturbance (provided it is small) it is said to be unstable. On the other hand, it will be called stable only when it is stable for *all* kinds of small disturbances.

Plus loin dans son texte, Routh précise la notion de fermeté : l'emploi du terme « ferme », on l'a vu, remonte au moins à Galilée ; la traduction littérale anglaise est « steady », au sens de permanent :

Assuming that x , y , &c. remain small, we may neglect their squares, and thus the resulting equations will be linear in x , y , z , &c. The coefficients of x , $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, y , $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ &c. in these equations may be either constants or functions of the time. In the former case the undisturbed motion is said to be *steady* for these co-ordinates, in the latter *unsteady*. ... We may therefore define a steady motion to be such that the same change of motion follows from the same initial disturbance at whatever instant the disturbance is communicated to the system.

Peu de temps après la publication de ce premier traité, paraîtront d'autres ouvrages faisant appel aux mêmes techniques : *Treatise on natural Philosophy* (1876) de Thomson et Tait [47], *De la stabilité du mouvement* (1882) de M. Joukovsky [27].

Dans ces textes, la géométrie à l'arrière-plan des formules analytiques n'est pas exploitée. Henri Poincaré (1854-1912) la fait apparaître dans une série de quatre mémoires publiés entre 1881 et 1886, et dont l'annonce en quelque sorte est faite en 1880. Ils sont consacrés à l'étude des *Courbes définies par des équations différentielles* [39]. Poincaré crée ainsi la théorie de la dynamique qualitative. Dans cette théorie, on étudie les propriétés des trajectoires associées aux mouvements réels ou supposés des objets, ou bien qui représentent les évolutions de certaines des propriétés de ces objets. Deux résultats sont, entre autres, à l'origine de sa motivation pour créer cette théorie. Le premier est celui de Bruns établi en 1877 : pour déterminer quantitativement les trajectoires de n corps, chacun exerçant sur les autres des forces obéissant à la loi de Newton, il n'est d'autre méthode que de passer par des développements en série. Le second résultat paru en 1889, pour lequel il obtint un premier prix suédois, est de Poincaré lui-même : ces séries divergent, n'ont point de limites finies. Il ajoute cependant :

Néanmoins, l'argument ci-dessus ne suffit pas à établir ce point en toute rigueur.

En effet, Andreï Kolmogorov (1903-1987) et Vladimir Arnold (1937-) montreront qu'il est des cas où la convergence est effective, et, récemment, Alain Chenciner a étudié la stabilité effective de certains problèmes à trois et quatre corps.

C'est dans le troisième mémoire publié en 1885 que Poincaré donne ses définitions de la stabilité et de l'instabilité.

Nous dirons que la trajectoire d'un point mobile est stable, lorsque, décrivant autour d'un point de départ un cercle ou une sphère de rayon r , le point mobile, après être sorti de ce cercle ou de cette sphère, y rentrera une infinité de fois, et cela, quelque petit que soit r . C'est ce qui arrive dans les trois premiers exemples.

Elle sera instable si, après être sorti de ce cercle ou de cette sphère, le point mobile n'y rentre plus. C'est ce qui arrive dans les deux derniers exemples.

...

L'instabilité est donc la règle, et la stabilité l'exception.

Le problème relatif à seulement trois corps, déjà abordé au dix-huitième siècle, n'est toujours pas entièrement résolu. Dans le mémoire qu'il lui consacre [38], publié en 1890 et à nouveau couronné par le prix de S.M. le roi Oscar II de Suède, Poincaré fait apparaître une notion plus locale de la stabilité, dont il attribue la paternité à Siméon Denis Poisson (1781-1840) :

Nous avons défini plus haut la stabilité en disant que le point mobile P doit rester à distance finie ; on l'entend quelquefois dans un autre sens. Pour qu'il y ait stabilité, il faut que le point P revienne au bout d'un temps suffisamment long sinon à sa position initiale, du moins dans une position aussi voisine que l'on veut de cette position initiale.

C'est dans ce dernier sens que Poisson entendait la stabilité.

Dans sa notice biographique, Poincaré commente ainsi ce mémoire :

Je n'ai pu résoudre rigoureusement et complètement le problème de la stabilité du système solaire, en entendant ce mot dans un sens strictement mathématique. L'emploi des invariants intégraux m'a cependant permis d'atteindre certains résultats partiels, s'appliquant surtout au problème dit restreint où les deux corps principaux circulent dans des orbites sans excentricité, pendant que le corps troublé a une masse négligeable. Dans ce cas, si on laisse de côté certaines trajectoires exceptionnelles, dont la réalisation est infiniment peu probable, on peut démontrer que le système repassera une infinité de fois aussi près que l'on voudra de sa position initiale. C'est ce que j'ai appelé la stabilité à la Poisson.³⁸

On notera que l'une des techniques utilisées par Poincaré, tant dans ses travaux en dynamique qualitative qu'en topologie, remonte à Léonard Euler et à Laplace : on relira ici la fin de son texte précité. Cette technique, également employée par Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) et Leopold Kronecker (1823-1891), consiste, ici pour l'étude de la stabilité des mouvements périodiques et quasi-périodiques, à utiliser la méthode du stéthoscope : on suit un trajet ayant la forme d'une ellipse, plus généralement d'une boucle, trajet le long duquel on examine les propriétés de l'objet mathématique. Poincaré emploiera cette méthode pour définir l'application de retour, pour généraliser l'index de Kronecker, et définir le groupe fondamental d'une variété différentiable.

Jacques Hadamard³⁹ (1865-1963) et surtout George David Birkhoff (1884 - 1944) [6], à qui l'on doit le vocable de « *systèmes dynamiques* », prolongeront de manière conséquente les travaux géométriques de Poincaré en dynamique qualitative. Birkhoff introduit, entre autres, les notions de points alpha et oméga

³⁸ Cette appellation pourrait bien être de Poincaré qui écrit « à la Poisson » et non pas « de Poisson » ; je n'ai trouvé aucune définition de cette stabilité dans ce que, jusqu'à présent il est vrai, j'ai pu lire Poisson (seulement ses publications parues dans le Journal de l'Ecole Polytechnique(1809, 1831) et la première édition de son traité de mécanique). Des éléments de phrase de Poisson peuvent par contre suggérer la notion de stabilité décrite par Poincaré, comme par exemple celui-ci, tiré de son traité de mécanique : « Le point matériel reprendra la même vitesse toutes les fois qu'il reviendra au même point de cette circonférence ... »

³⁹ Une propriété des mouvements sur une surface, *Comptes Rendus Ac. Sc.*, t.122 (1896) p.983 et : Sur certaines propriétés des trajectoires en Dynamique, *J. Math. Pures et Appliquées*, 5^e série, t.3 (1897).

limites, d'ensemble errant, celle de *mouvements récurrents* qui généralisent les mouvements périodiques, et leur associe une notion de stabilité :

Du point de vue que j'adopte, un mouvement *stable* est un mouvement qui, à partir d'un certain moment et ultérieurement, n'approche jamais indéfiniment près de certaines positions singulières ; je démontre qu'il existe nécessairement un ou plusieurs mouvements récurrents dans le voisinage infinitésimal d'un mouvement stable. [6]

Se référant également aux mémoires précédents de Poincaré sur les courbes définies par des équations différentielles, Alexandre Liapounoff (1857-1918) publie à Kharkow en 1892 son mémoire sur la stabilité où il développe l'emploi des méthodes analytiques déjà utilisées par ses prédécesseurs, notamment par Lagrange. Ainsi, les exposants que l'on dit de Liapounoff sont déjà présents chez Lagrange mais pas de manière aussi explicite certes, de même que la fonction dite de Liapounoff, non croissante le long des trajectoires, n'est autre que la fonction de forces qui apparaît chez Lagrange, comme le dit Liapounoff lui-même. Celui-ci a su généraliser l'emploi de ces outils.

Alors que la définition de la stabilité donnée par Poincaré est géométrique et synthétique, celle de Liapounoff est d'apparence plus numérique, plus précise : les définitions sont en fait très voisines si l'on veut bien remplacer les sphères par des ellipsoïdes, guère plus généraux. Voici ce que nous dit Liapounoff, explicitant par des symboles certains éléments de la définition de Routh : il note par q la position d'un mobile, par q' sa vitesse ; q comme q' possède k composantes. Lorsque le système n'est pas perturbé, $q(t) = f(t)$. Si l'on introduit une perturbation ε , la position devient :

$$q(t) = f(t) + \varepsilon.$$

La situation générale est a priori celle où $q(t) = f(t) + \varepsilon$ pour laquelle on considère n fonctions $Q_j(q(t), q'(t))$ de ces données. En l'absence de perturbations, cette fonction est notée $F_j(f(t), f'(t))$.

Nous nous occuperons exclusivement des cas où la solution de la question considérée ne dépend pas du choix de l'instant t_0 dans lequel se produisent les perturbations. C'est pourquoi nous adopterons ici la définition suivante :

Soient $L_1, L_2, \dots, L_n$ des nombres positifs donnés. Si pour toutes les valeurs de ces nombres, quelques petites qu'elles soient, on peut choisir des nombres positifs

$$E_1, E_2, \dots, E_k \quad E'_1, E'_2, \dots, E'_k,$$

tels que, les inégalités

$$|\varepsilon_j| < E_j, \quad |\varepsilon'_j| < E'_j, \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

étant remplies, on ait

$$|Q_1 - F_1| < L_1, \quad |Q_2 - F_2| < L_2, \quad \dots, \quad |Q_n - F_n| < L_n,$$

pour toutes les valeurs de t qui dépassent t_0 , le mouvement non troublé sera dit stable

PAR RAPPORT AUX QUANTITÉS $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$; dans le cas contraire, il sera dit, par rapport aux mêmes quantités, instable.

Le contenu du mémoire de Liapounoff, traduit et publié en 1907 dans les Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse [32], deviendra rapidement le manuel de référence pour l'étude pratique de la stabilité (cf [7]). Depuis Lagrange, en passant par Routh, une bonne part des études de stabilité fait appel aux connaissances sur les racines des polynômes. Le critère de Routh permet d'établir si les parties réelles des racines d'un polynôme sont positives, le système est alors instable. Un critère voisin sera donné en 1895 par Adolf Hurwitz (1859-1919), en réponse à un ingénieur qui devait résoudre un problème de stabilité de turbines hydroélectriques [26].

Le traité d'énergétique [22] de P. Duhem paru en 1911 expose la plupart des techniques développées par Lagrange, Routh, Poincaré ou Liapounoff, et les emploient dans l'étude de divers milieux physiques où il faut notamment tenir compte de la production de chaleur. Duhem rappelle dans cet ouvrage qu'Hadamard avait, indépendamment de Liapounoff, énoncé le critère d'instabilité d'un point singulier caractérisé par l'existence d'une fonction de

forces positive croissante le long des trajectoires au voisinage du point singulier, et qui se situe dans le prolongement des observations de Lagrange.

Les grands traités d'analyse de la première moitié du XX^{ème} siècle incluront un chapitre sur la stabilité, et les très nombreux travaux d'affinage sur ce thème prolongeront pour partie ceux de Liapounoff.

Les résultats de Liapounoff et les études théoriques en dynamique qualitative trouveront leurs premières applications auprès de l'école russe de physiciens et d'ingénieurs travaillant, dans les années 1920, autour du physicien L. I. Mandelstam, à l'époque de la radioélectricité naissante.

En 1937 apparaît, sous la plume d'Alexandre Andronov⁴⁰ (1901-1952) et de Lev Pontrjagin (1908-1988)⁴¹, la notion de stabilité globale d'un système dynamique, et donc d'un ensemble de trajectoires [3]. Ces auteurs appellent de tels systèmes « grossiers ». Dans sa traduction parue en 1949 d'un ouvrage d'Andronov consacré à la théorie des oscillateurs, Solomon Lefschetz (1884-1972), créateur du terme « topologie », les qualifiera de « *structurellement stables* », une terminologie maintenant consacrée. La définition des auteurs russes est plutôt dans le style de Liapounoff. La définition moderne est dans le style de Poincaré faisant suite au développement de la topologie qui diffuse de nouveaux termes comme celui d'homéomorphisme, lequel désigne une correspondance bijective et bicontinue entre deux domaines. Une manière de comprendre la stabilité structurelle est la suivante : le système est structurellement stable si en déformant légèrement par un homéomorphisme, sans en altérer ainsi les propriétés fondamentales, le domaine où s'accomplit le mouvement, on peut modifier, un tantinet également, les équations du mouvement de sorte que l'allure générale de l'ensemble des trajectoires, bien que peut-être localement différentes dans leur forme mais non point dans leurs

⁴⁰ Il développa la théorie du contrôle ; lire à son sujet l'article de Chris Bissel <http://ict.open.ac.uk/reports/1.pdf>

⁴¹ Aveugle dès l'âge de 14 ans, excellent topologue, il plongea, dans ses dernières années, dans un antisémitisme actif.

propriétés essentielles, reste inchangée. La signification physique de cette définition est très intéressante : si, par exemple, les équations du mouvement dépendent de paramètres difficiles à mesurer mais dont les variations modifient peu les équations, alors les mouvements eux-mêmes ne sont pas profondément perturbés par ces variations.

Cette espérance en cette forme de stabilité a été longtemps partagée, notamment par les esprits physiciens, bien avant qu'on ne l'ait formellement formulée. Ces lignes de Joseph Boussinesq (1842-1929) et qui datent de 1879 l'attestent [10] :

Il est bon d'observer, à cette occasion, que la mise en compte de petites forces perturbatrices, dans le problème des solution singulières que comportent les équations du mouvement d'un système, ne doit généralement modifier que peu les intégrales particulières de ces équations et, par suite, leurs lieux de réunion et de bifurcation qui sont les solutions cherchées.

Certes, certains systèmes dynamiques sont structurellement stables. C'est le cas par exemple des systèmes dits hyperboliques introduits au siècle dernier par Oskar Perron (1880-1975) et formalisés par Smale. On pourrait les appeler en fait systèmes dynamiques de Poisson, car Poisson a parfaitement défini en 1831 la propriété caractéristique de ces systèmes pour lesquels :

Il arrive en général que la contraction positive ou négative est différente en différents sens autour d'un même point M, et qu'il y a même dilatation dans un sens et contraction dans une autre direction. [42]

Cependant, ruinant la conviction de R. Thom, Stephen Smale (1930-) a établi en 1966 [45] que la propriété d'être structurellement stable est rare, n'est

pas vérifiée pour presque tout système dynamique : on dit qu'elle n'est pas générique, elle manque de stabilité⁴².

Le développement des techniques employées par les mathématiciens, la mise au jour de nouvelles situations dépendant des domaines occupés par les trajectoires, ont conduit à établir parfois des définitions de la stabilité (comme par exemple la stabilité asymptotique, la stabilité conditionnelle, la stabilité infinitésimale, la quasi-périodicité, l'oméga-stabilité, etc) adaptées à ces contextes particuliers.

Rentrent tout à fait dans ce cadre classique :

- la mise en évidence de phénomènes et des systèmes qualifiés de chaotiques, mais qui présentent des récurrences internes au sein d'attracteurs parfois qualifiés d'étranges, et qui ont leur propre stabilité structurelle globale ;
- l'effet « papillon », selon lequel de petites causes peuvent avoir de grands effets, connu encore sous le nom de sensibilité aux conditions initiales. On notera que ce thème est potentiellement présent chez Lagrange, et avant lui, chez Galilée qui écrit, dans la quatrième journée de son dialogue (fin 704) :

J'en conclus qu'il suffit de toutes petites variations par rapport à la grandeur immense et à l'extrême vitesse des mers, pour produire ces changements qui ne sont grands que par rapport à notre petitesse et à celle de nos phénomènes.

Si Poincaré a bien vu ces phénomènes,

Il peut arriver que de très petites différences dans les conditions initiales engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux ; une petite erreur sur

⁴² On trouvera dans l'article de Marc Chaperon (<http://www.math.jussieu.fr/~chaperon/stabstruct.pdf>) des exemples illustrant cette non-généricité, et dans [] une première critique phénoménologique de la stabilité structurelle.

les premières en produit une énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible et nous avons un phénomène fortuit. [41]

il n'en a pas proposé d'exemple explicite.

Il semble établi qu'en 1927, le physicien Balthasar Van der Pol (1889-1959) et son collègue Van der Marek aient construit un dispositif à tube électronique par lequel ils ont observé un phénomène de chaos déterministe ; ils ne l'ont pas analysé en détail. Il revient au météorologue Edward Lorenz (1917-) d'en avoir donné en 1963 le premier exemple explicite de système chaotique. La mécanique des fluides est un domaine privilégié d'apparition de tels phénomènes, notamment de turbulence. C'est dans le cadre de la théorie des systèmes dynamiques que David Ruelle (1935-) et Floris Takens ont placé l'étude de ces phénomènes [44].

La formalisation du partage élémentaire, de l'allocation des ressources, permet d'illustrer très simplement le phénomène de sensibilité aux conditions initiales : un premier investisseur a acheté hier pour 150 Euros, deux actions de l'entreprise X et une action de l'entreprise Y, alors que, le même jour, un second investisseur a acquis, pour 200 Euros, une action de l'entreprise X et une action de l'entreprise Y. Les employés des impôts, s'interrogeant sur les prix réels d'achat respectivement x et y des actions A et B, vont résoudre le système d'équations linéaires :

$$2x + y = 250$$

$$x + y = 200$$

On le présente sous la forme :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 250 \\ 200 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 150 \end{bmatrix}$$

Supposons qu'industriel ait à traiter un cas un peu moins élémentaire – on supposera cet industriel russe pour rendre hommage aux auteurs⁴³ de cet exemple classique. Voici, pour les différentes données expérimentales figurant dans les matrices A et b , les résultats X qu'il obtient :

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 32,1 \\ 22,9 \\ 33,1 \\ 30,9 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 9,2 \\ -12,6 \\ 4,5 \\ 1,1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8,1 & 7,2 \\ 7,08 & 5,04 & 6 & 5 \\ 8 & 5,98 & 9,89 & 9 \\ 6,99 & 4,99 & 9 & 9,98 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} -81 \\ 137 \\ -34 \\ 22 \end{bmatrix}$$

On sait que certains algorithmes utilisent par centaines des résolutions de tels systèmes d'équations linéaires⁴⁴

Naturellement, l'incertitude qui pèse sur l'avenir conduit à formuler les questions en termes probabilistes. De très nombreux travaux, depuis Poincaré, leur ont été en effet consacrés, et il arrive qu'on puisse démontrer la stabilité de mouvements quasi-aléatoires, notamment dans le cadre des systèmes de la mécanique classique dite hamiltonienne (théorie KAM).

⁴³ D.K. FADEEV- V.N. FADEEV *Computational Methods of Linear Algebra*, W.H. Freeman and Cy, San Francisco, 1963.

⁴⁴ S'ajoute aux difficultés présentées par la sensibilité aux conditions initiales, celles qu'apportent les erreurs d'arrondies. Mentionnons ici l'exemple donné par Jean François Colonna : soit $B = 4095.1$, $A = B + 1$, de sorte que $A - B = 1 = x_1$. On calcule $x_{n+1} = A x_n - B$. On trouve rapidement $x_5 = 1.031259917540718$, $x_7 = 524480.9968805739190429$, $x_9 = 8799743854603.9609375000000000$!!!

[<http://www.lactamme.polytechnique.fr> [\[Do you believe that Real Numbers exist for a computer and that floating point computations are safe?\]](#)]

III. 2 La stabilité absolue ou l'invariance

III.2.1 Dans le monde observable

La stabilité absolue s'exprime par la mise au jour de phénomènes et de lois invariantes, d'énoncés qui se veulent universels. Considérons d'abord le cas de la physique expérimentale. En dehors des expressions de la pérennité apparente des mouvements du ciel, le phénomène optique d'invariance des proportions, formalisé sous le nom de théorème dit de Thalès (625-547), est peut-être la plus ancienne observation dans le domaine de la physique ; la philosophie pythagoricienne repose en grande partie sur l'observation de ce phénomène, sur la conviction de son absolue généralité.

On a rencontré dans le second chapitre la règle d'équilibre du dispositif du levier, également sans doute fort ancienne, et présentée dans le trait de mécanique relevant de l'école d'Aristote. Celui-ci énonce par ailleurs une première observation de fonds sur la nature des mouvements dans l'espace usuel : tout mouvement est la composée de translations et de rotations – il reviendra au mathématicien Joseph Liouville (1809-1882) de donner à cet énoncé sa forme la plus générale. A vrai dire, nous connaissons peu du savoir scientifique et technique de la civilisation grecque, comme des civilisations dont elles s'est inspirée : qu'Hipparque (190-120) ait conçu un modèle héliocentrique du mouvement des planètes, attirées par le soleil selon une force inversement proportionnelle au carré de leur distance à notre étoile, est un fait découvert seulement récemment.

C'est à partir du XVII^e siècle qu'apparaissent véritablement les lois physiques. Képler publie ses deux premières lois en 1609, la troisième en 1618. Suivent les lois sur la réfraction de la lumière, les premières mesures de pression. Suit la loi de Newton sur l'action réciproque de deux masses inertes, puis, au siècle suivant, la formulation de lois de l'hydrodynamique (Daniel Bernoulli, d'Alembert, Euler). Longue est la théorie des règles de comportement stable des

phénomènes que l'on a découvert. En fait, ces règles ne sont souvent stables que sur des domaines spécifiés de l'espace-temps, qu'en présence de contraintes environnementales acceptables.

Se rapportant en particulier à ces particules très singulières, sans masse, que sont les photons, dont Einstein affirmera l'invariabilité de la vitesse, couvrant alors le champ a priori infini des longueurs d'onde, les lois gouvernant l'électromagnétisme, telles que les a formulées Maxwell en 1863, sont sans doute parmi les plus stables qui soient : les physiciens semblent ne pas mettre pas en doute leur absolue validité depuis le big bang. Le « miracle » des lois physiques repose de manière essentielle sur leur qualité impressionnante de stabilité.

III.2.2 Le cas de la physique théorique ou physique mathématique

Il convient d'établir la distinction entre les lois façonnées à partir de l'observation et de l'expérience directes, par exemple une règle de dilation des métaux en fonction de leur température (loi de Dulong et Petit), et les lois et invariants créés sur la base, certes de données de l'expérience, mais également de représentations symboliques et de raisonnements. C'est le cas par exemple de l'une des premières lois établies, celle de Galilée selon laquelle, dans la belle formulation de Lagrange, « le chemin vertical parcouru par un corps grave est proportionnel au carré de la vitesse qu'il acquise en descendant librement ».

De très nombreuses lois sont l'expression symbolique d'équilibres locaux, et expriment donc de ce fait une stabilité spatio-temporelle très locale.

Parfois devenus des énoncés de mathématique pure, on ne compte plus les énoncés d'invariance en physique. Le premier d'entre eux, rencontré au chapitre précédent, établi par Huyghens, celui de la conservation de la force vive, puis ses successeurs immédiats, ont concerné la mécanique : conservation du mouvement du centre de gravité, du moment de rotation par Jean Bernoulli, conservation de l'énergie globale des systèmes mécaniques (lagrangiens-hamiltoniens).

Rien de plus évident que l'énoncé selon lequel la variation instantanée du contenu d'un volume est égale à la quantité de matière qui traverse sa surface. Cet énoncé, qui se rapporte globalement à un phénomène local, a été traduit en termes symboliques ; présenté depuis sous la forme de théorème après les analyses de Gauss, de Green (cf le chapitre précédent), de Thompson-Stokes⁴⁵ (1819-1903) et d'Ostrogradsky (1801-1861), il a pour origine, pour les auteurs britanniques, leurs travaux en électrostatique.

Toutes les constructions et résultats obtenus jusqu'à ce moment seront souvent employés comme outils pour fonder les équations de comportement locaux de nombreux phénomènes. Un autre procédé d'étude sera présenté au paragraphe III.2.4. Mais auparavant, il nous faut considérer le cas des mathématiques.

III.2.3 Mathématique et invariance

La notion d'invariance en mathématique semble avoir été inspirée par les philosophes et logiciens de l'école anglaise à la recherche de données et de propriétés « permanentes ». La physique proprement dite ne semble pas concernée par ces premières recherches formelles : elles se rapportent plutôt aux mathématiques pures. Sous l'influence du logicien et mathématicien George Boole (1815-1863), Arthur Cayley (1821-1895) entreprend des premiers travaux dans cette direction dans les années 1845 ; il cherche à trouver des expressions invariantes par des transformations linéaires. Il n'utilise pas d'ailleurs le terme d'invariant mais celui en quelque sorte d'expressions dérivées :

find all the derivatives [invariants] of any number of functions [en l'occurrence des formes algébriques] which have the property of preserving their forms unaltered after linear transformation of the variables. [19]

⁴⁵ Le théorème de Stokes a été énoncé en fait en 1854 par W. Thompson (cf : <http://www.dim.uqac.quebec.ca/~pjoyal/cours/8Mat102/notes/notes.html#fondamentaux>). Un des espoirs de Bourbaki était de parvenir à en donner une démonstration rigoureuse.

Peut-être, dans sa démarche, Boole a-t-il été inspiré également par les travaux antérieurs de François Viète (1540-1603) et de Lagrange qui avaient remarqué que les coefficients des polynômes pouvaient s'exprimer en fonction de leurs racines, expressions invariantes par « *substitution* » disait-on, permutation de ces racines dit-on aujourd'hui.

En 1854, Cayley introduit la notion de groupe abstrait [19] :

A set [fini] of symbols $1, \alpha, \beta, \dots$ all of them different, and such that the product of any two of them (no matter in what order), or the product of any of them onto itself, belongs to the set, is said to be a *group*.

Il indique dans une note :

The idea of group as applied to permutations or substitutions is due to Galois, and the introduction of it may be considered as marking an epoch in the progress of the theory of algebraic equations.

Il donne notamment dans cet article les exemples des groupes finis à quatre éléments, à savoir le groupe cyclique et le groupe qu'on appellera plus tard le *viergruppe* de Klein. Comme on le comprend à la lecture de son article paru dans *The English Encyclopedia* de 1860 [19], la recherche d'invariants par transformations fait partie des raisons de son intérêt pour les groupes.

En 1868, Helmholtz entend caractériser les propriétés de l'espace par les transformations qu'on y peut opérer [24]. Notons que l'existence des transformations standard suppose l'homogénéité de l'espace, son isotropie. Félix Klein (1849-1925), élaborant une synthèse des travaux antérieurs, en vient en 1872 à énoncer sous la forme d'un programme [28] l'une des activités essentielles et souvent inconsciente des mathématiciens :

Il y a des transformations de l'espace qui n'altèrent en rien les propriétés géométriques des figures. Par nature, ces propriétés sont, en effet, indépendantes de la

situation occupée dans l'espace par la figure considérée, de sa grandeur absolue, et enfin aussi du sens dans lequel ses parties sont disposées. Les déplacements dans l'espace, ses transformations avec similitude et celles par symétrie, n'altèrent donc pas les propriétés des figures, non plus que les transformations composées avec les précédentes. Nous appellerons *groupe principal* de transformations de l'espace l'ensemble de toutes ces transformations ; *les propriétés géométriques ne sont pas altérées par les transformations du groupe principal*. La réciproque est également vraie : *les propriétés géométriques sont caractérisées par leur invariance relativement aux transformations du groupe principal*.

...

On donne une multiplicité et un groupe de transformations de cette multiplicité ; développer la théorie des invariants relatifs à ce groupe.

Tel est le problème général qui embrasse non seulement la Géométrie ...

A partir de cette époque, on s'emploiera à la mise au jour d'invariants : qui dit invariant présuppose des mouvements, qui peuvent n'être que de simples déplacements dans l'espace, ou qui, de surcroît, peuvent être accompagnés de modifications de forme, voire de structure et de fonction.

On est donc conduit à envisager d'abord divers types de transformations, que l'on pourra qualifier de stables ou non par rapport aux propriétés qu'elles peuvent affecter. D'une façon assez générale, la plupart de ces transformations, fussent-elles des projections, sont stables vis à vis de la structure topologique qu'elle respectent. On rencontre donc ces invariants en particulier à travers l'examen même des transformations, caractérisées d'une part par les objets sur lesquels elles s'appliquent, d'autre part par ce qu'elle laissent invariants.

Les transformations les plus courantes sont : les transformations linéaires qui comprennent notamment les rotations et les dilatations ainsi que leurs composées, et dont les invariants sont les directions propres ; les homéomorphismes, transformations élémentaires qui conservent les structures topologiques ; les isométries qui conservent les longueurs, et les transformations conformes qui conservent les angles comme en particulier la projection

stéréographique par laquelle on fabrique les planisphères. Ces transformations, qui apparaissent parfois sous le nom de déformations, et d'autres davantage liées aux modes d'évolution du monde physique, sont présentes naturellement dans les études de mécanique (invariants de Liouville, invariants intégraux de Poincaré qui généralisent la loi de conservation des aires de Kepler, invariants d'Elie Cartan (1869-1951), invariants spectraux, adiabatiques, trajectoires invariantes, etc), et de physique (invariants de Noether) ; elles sont employées également pour caractériser des familles d'objets (dimension, connexité, groupes d'homotopie et d'homologie, genres et indices, invariants de Jones et de Donaldson, etc).

Reconnaître des invariants sera l'un des objectifs importants de la recherche en mathématique. L'étudiant qui aborde l'étude des structures mathématiques rencontre très tôt, à travers son initiation à la théorie des groupes, les termes de « stabilisateur » et de « sous-groupe invariant »⁴⁶ : ils témoignent de l'importance et de l'imprégnation en profondeur des questions liées à la stabilité.

Il faut noter par ailleurs que toute proposition mathématique possède une vérité intemporelle à l'intérieur du cadre formel et axiomatique où elle est inscrite. De ce point de vue, son énoncé est d'une stabilité absolue.

Cela dit, les progrès en analyse accomplis par Karl Weierstrass (1815-1897) et Georg Cantor (1845-1918) ont conduit René Baire (1874-1932) [4], au début des années 1900, à établir une sorte de hiérarchie entre certains espaces situés à l'intérieur d'autres espaces. On rencontre ainsi des propriétés qui sont vraies sur un espace intérieur – comme par exemple être partout continues et dérivables, ou bien rester invariantes par des transformations locales ou globales comme les translations – mais qui perdent cette qualité sur leur bord ; un exemple célèbre de propriété générique est celle de transversalité due à Thom (la transversalité géométrique est la plus simple ; deux droites (et plus généralement

⁴⁶ On utilisait autrefois, au lieu d'invariant, les adjectifs peu signifiants « distingué » ou bien « normal

deux courbes) non confondues qui ont un point commun sont dites transversales ; une droite étant donnée, il existe une infinité de droites qui lui sont transversales ; la propriété d'une droite du plan à être transversale à une droite donnée de ce plan est ainsi générique ; la propriété ne s'effondre que dans le cas singulier où les droites sont confondues ; voir par exemple le dessin de la figure 2). Ces propriétés génériques, ainsi vraies presque partout, sont dites, dans certaines théories où l'on impose l'invariance par rapport à une transformation donnée comme par exemple la translation, *prévalentes*. On peut alors parler d'une stabilité relative de ces propriétés. D'autres propriétés peuvent au contraire ne se maintenir que sur des sous-ensembles maigres. On peut les considérer comme instables par rapport à l'étendue du domaine considéré.

La notion de stabilité des propositions a été envisagée par Georges Bouligand (1889-1979) en 1935 [7]. Mais, même à l'heure actuelle, on n'en peut rien dire de précis :

Roughly speaking, a phenomenon in algebraic geometry is said to be « stable » if it occurs at least for large dimensions, in a manner independent of dimension.

écrit J. May dans un article sur l'histoire de la topologie algébrique [36]. Comment par exemple définir de manière précise le domaine *sémantique* d'un terme, d'un élément de phrase, une manière contrôlée de le déformer, sa capacité d'affinité avec d'autres termes ou avec d'autres éléments de phrase, comment établir la vérité *autre que formelle* d'une association de termes ?

C'est un aspect plus caché de l'invariance que nous allons plutôt aborder.

III.2.4 Sur l'invariance par symétrie comme critère de stabilité

Ce n'est qu'au XIX^{ème} siècle que s'est manifesté un premier intérêt scientifique pour la symétrie, chez les seuls cristallographes dans un premier temps. Pourtant, depuis le début de formalisation par Archimède de la mécanique statique, on aurait pu, dès l'introduction du parallélogramme des forces,

davantage s'intéresser à l'équilibre d'un système soumis en son centre de gravité à un jeu de plusieurs forces dirigées en des sens différents. Non seulement on aurait pu, à partir de ce cas élémentaire, développer l'étude des symétries, mais aussi étudier la stabilité d'un tel système lorsque apparaissent des frottements et des perturbations légères des forces en présence. Sans aucun doute ont fait défaut l'absence d'intérêt pour ce problème et l'absence de formalisme pour le traiter.

René Just Haüy (1743-1822) et Auguste Bravais (1811-1863) peuvent être considérés comme les fondateurs modernes de la cristallographie. Adrien-Marie Legendre (1752-1834) et Poisson, en partie leurs contemporains, feront par exemple quelquefois appel à la notion de symétrie le premier en géométrie, le second pour justifier le contenu d'une fonction. Mais, dans l'ensemble, les mathématiciens de ce même siècle ignoreront la notion.

Pierre Curie (1859-1906), après ses études sur la piézo-électricité du quartz, énonce en 1894 son célèbre principe qui a eu et conserve une influence profonde sur le cours de la physique : *« Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits. »*

Intuitivement, *si un objet présente quelque symétrie, c'est qu'existe dans sa constitution un système de forces internes qui s'équilibrent, et qui contribuent à assurer de ce fait la stabilité de l'objet ; et réciproquement, si un tel système de forces s'établit en équilibre, il est naturel qu'il en imprègne la structure de l'objet en question, et qu'il s'extériorise en sous la forme d'une morphologie présentant des symétries.*

Symétrie et stabilité sont ainsi liées. J'ai été ainsi conduit à introduire dans [16] un principe méthodologique fort général, associé au degré de symétrie le plus simple celui d'ordre 2, et que voici :

OBSERVATION MÉTHOLOGIQUE 2 (OM) 2 : *La nature a tendance à stabiliser un objet instable en le doublant, et en liant entre eux l'objet et sa réplique par un dispositif de régulation transverse à chaque objet.*

Cette technique de stabilisation est parmi les plus simples que l'on puisse envisager, et parmi les plus fréquemment employées. La genèse de cette technique reste un grand mystère.

Un des exemples parmi les plus simples qui illustre ce procédé est celui de l'haltère : une pièce de monnaie, posée sur la tranche, est dans une position instable. On stabilise cette pièce en en prenant une seconde, puis en fixant l'objet et sa réplique à un petit barreau transversal aux deux pièces.

De par l'association entre stabilité et symétrie, on peut s'attendre à une relation forte également entre présence de symétries et conservation des valeurs de paramètres caractéristiques de l'objet. C'est ce qu'exprimeront les énoncés de la mathématicienne Emmy Noether (1882-1935) [37] [29], d'un très large et important emploi en physique théorique.

On a vu que Félix Klein a redéfini la géométrie comme l'étude des propriétés invariantes par des groupes de transformations. Ces transformations peuvent être physiquement représentées par des opérations de transport : il en est ainsi par exemple des translations t selon une droite, représentées par des nombres réels.

Le fait qu'elles forment un groupe tient à ce qu'elles vérifient les quatre propriétés c , a , n , s des éléments de tout groupe : *composition*) les translations (transformations) peuvent se composer entre elles selon une loi qu'on peut noter comme veut, par exemple $+$: $t + t'$ a un sens, est une translation τ (une transformation) ; *associativité*) le résultat de la composition de $(t + t')$ avec t'' est le même que celui de la composition de t avec $(t' + t)$; *neutre*) il existe bien sûr

la translation nulle 0 (la transformation sans effet) ; *symétrie*) toute translation t admet une symétrie notée $-t$ qui nous ramène au point de départ ($t + (-t) = 0$) (cette propriété caractérise donc une réversibilité parfaite des transformations, par conséquent encore une fois dépendant de l'homogénéité et de l'isotropie du domaine sur lequel elles opèrent).

Au début du XX^e siècle, on ne voit pas encore ces groupes comme des groupes de symétries : à l'époque, le symétrique d'un élément d'un groupe est plutôt appelé son « *inverse* » – il en est ainsi dans tous les articles de Noether. Il est symptomatique que Klein, dans son programme précité, présentant la notion de groupe omet totalement de préciser la dernière propriété, à savoir que tout élément possède un symétrique, un inverse aurait-il dit.

Si l'on conserve à l'esprit qu'une propriété mathématique, géométrique en particulier, possède une signification physique, le discours de Klein prend le sens concret suivant : supposons qu'une figure géométrique représente une propriété physique déterminée dans un espace donné, disons une énergie ou une masse, les géomètres jusqu'au XVIII^e siècle nous en ont donné des exemples, alors cette propriété est conservée par une des transformations obéissant à une loi de groupe et opérant sur l'espace en question.

C'est par l'intermédiaire des travaux de mathématiciens suivant de près l'évolution de la physique (comme Félix Klein, David Hilbert (1862-1943), Hermann Weyl (1885-1955), ainsi que de physiciens théoriciens (dont Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928) et quelques-uns de ses élèves), qu'Emmy Noether, en 1918, est conduite à donner une forme précise au principe de Curie pour des systèmes physiques dont on connaît la représentation lagrangienne, puis hamiltonienne : elle donne une expression quantitative aux « effets », les causes figurant dans la construction du lagrangien.⁴⁷

⁴⁷ Son texte de mathématicienne ne fait nullement allusion à Curie – pas davantage ne mentionne Curie le bon ouvrage historique récent d'Y. Kosman-Shwarzbach [29] consacré aux théorèmes de Noether et qui donne une traduction du texte original.

Noether a énoncé deux théorèmes généraux mais dont seul le premier a été et reste abondamment utilisé par les physiciens (cf l'Appendice 3.2). Les énoncés font appel à un groupe de transformations G , fini ou non, dépendantes continûment de r paramètres linéairement indépendants, et qui laissent *invariante* l'action globale lagrangienne S . Les physiciens parlent aujourd'hui de ce groupe comme étant un *groupe de symétries*, ce qui est, pour le mathématicien, une sorte de tautologie puisque, par définition, dans un groupe, tout élément possède un symétrique. Puisque l'action reste invariante, on peut s'attendre à ce que des expressions dérivées de celle de l'action soient également invariantes. Lorsque le groupe de transformations est fini, le théorème le plus utilisé affirme, en dimension 1, l'existence de r intégrales premières ; en dimension supérieure, il fait apparaître la nullité de divergences souvent notées J , « *qui, depuis peu*, écrit E. Noether, *sont souvent appelées « lois de conservation »* ». Ces invariants J sont maintenant appelées par les mathématiciens et les physiciens théoriciens des *courants de Noether*, et leur intégrale, des *charges*.

III.3 Singularité, extrémalité et bifurcation, ou, les attributs de la stabilité

III.3.1 La singularité et l'extrémalité⁴⁸

Dans un monde à la Parménide⁴⁹, en perpétuel changement, l'immobile est singulier. Cependant, comme chaque fois dans nos aventures intellectuelles, l'étude statique précède l'étude dynamique parce que le fixe, plus longtemps visible, s'imprègne en premier dans nos esprits. Le concept de singularité a été élaboré par référence à une vision figée du monde. Ce n'est que plus tard qu'il a pris sa place dans une aperception plus complète de notre univers, où les transformations, les changements sont incessants. Dans cette perspective dynamique, les singularités sont apparues comme les lieux particuliers où

⁴⁸ Néologisme que j'ai introduit dans les Notices de l'AMS en 1968.

⁴⁹ « Car tout, de même que la pensée, trouve en tout temps, le mélange de ses organes errants »

peuvent se produire des transformations parfois importantes radicales, appelées *bifurcations* par les mathématiciens.

Singularité, extrémalité et bifurcation sont trois notions que l'on peut considérer comme inséparables. Je ne m'attarderai pas, dans ce texte, sur l'extrémalité, mais porterai par contre une plus grande attention aux conceptions dynamiques liées à la notion de singularité, car les phénomènes les plus intéressants, les plus significatifs de notre univers sont les phénomènes de genèse et de fin des choses (*generatio et corruptio*), qui relèvent typiquement des théories de la bifurcation. Celles portant sur l'extrémalité et la singularité en sont les prémisses.

Il est impossible de retracer en quelques lignes l'histoire de la théorie des singularités. Une citation donnée plus avant de Pierre de Fermat (1601-1665) révèle que ce grand mathématicien avait bien compris l'une des propriétés importante de la singularité, donnée de manière implicite dans le titre de ce paragraphe. Sur un plan plus technique, on peut convenir de faire débiter cette théorie avec un travail de Poisson publié en 1806 sur les solutions singulières des équations différentielles, suivi, en 1814, par une publication de Cauchy sur les *intégrales singulières*. La notion de singularité apparaît plus généralement dans l'étude des fonctions analytiques où se sont illustrés Bernhard Riemann (1826-1866), Karl Weierstrass (1815-1897), Victor Puiseux (1820-1883). On peut admettre que le travail de Puiseux de 1850 marque le véritable début de la géométrie algébrique : l'étude des singularités en reste l'objectif essentiel. Quelques-uns des résultats, nombre de concepts (comme par exemple celui de généricité), nombre de méthodes utilisées en géométrie algébrique ont joué, par analogie et transfert, un rôle décisif dans l'études des singularités des applications différentiables. Hassler Whitney (1907-1989), Marston Morse (1892-1977), René Thom et Vladimir Arnold sont les principaux fondateurs, constructeurs et développeurs de cette dernière théorie.

Comme l'avait noté Poincaré rejoignant ici Parménide, l'instabilité est la règle. Les positions d'équilibre des objets sont peu nombreuses, elles forment des ensembles que l'on qualifie parfois de maigres, rares, singuliers. Le point le plus bas d'une cuvette, le sommet d'une montagne (cf la première figure), l'arête reliant deux sommets sont des points ou forme des ensembles de points dits *singuliers*. Les mathématiciens ont une définition précise de la singularité ; ils ont démontré un théorème (Sard) qui en établit la rareté. Ces singularités apparaissent de manière naturelle dans la théorie des systèmes dynamiques. On peut représenter les trajectoires de ces systèmes à deux dimensions sur des surfaces, représentations qui permettent de visualiser aisément les trajectoires singulières, comme par exemple les tores de dimension nulle (des points), ou de dimension 1 comme les trajectoires périodiques (courbes circulaires ou cycles) isolées au sein d'un ensemble de trajectoires qui ne sont pas périodiques.

Singularités de Morse, « rondes », « dodues », « douces », non dégénérées



singularités « pointues », « acérées »

Figure 1

Ce qui détermine la singularité est un ensemble de propriétés plutôt *exceptionnelles* ; elles induisent la *rareté*, rareté qui peut attirer l'attention, et contribuer à déterminer la valeur ; les singularités peuvent être précieuses. Deux exemples simples illustreront ces faits. Considérés comme des singularités dans

le monde des objets, les bijoux, des pièces souvent uniques, et plus généralement les œuvres d'art, se monnayent au prix fort, et acquièrent la célébrité. Toute personne douée de talents particuliers, quels que soient les domaines où ils s'exercent, acquiert souvent une aisance financière assortie d'une renommée qui peut la placer sur un piédestal. Si la richesse peut favoriser une stabilité spatio-temporelle locale, la renommée en est une expression qui peut atteindre une toute autre ampleur dans le cadre du phénomène humain.

De façon générale, par la géométrie qui lui est associée en son voisinage, la singularité joue, autour d'elle, un rôle actif de *centre organisateur*, tant sur le plan structurel que sur le plan fonctionnel, autorisé par le fait que les potentialités de transformation locale y sont de manière naturelle plus élevées qu'en des points réguliers. Les centres organisateurs qui apparaissent en embryologie et dans les systèmes en développement rentrent parfaitement dans ce cadre conceptuel.

Voici encore deux exemples simples à partir desquels on pourrait examiner plus en détail les différentes facettes de ce rôle. Le premier est emprunté à la biologie au sens large, puisqu'il concerne l'activité entre autre visuelle que nous déployons au cours d'un processus de reconnaissance des formes.

C'est par ses éléments saillants que nous prenons en effet conscience de la forme d'un objet, plongé dans l'espace qui constitue l'arrière-plan, un fond d'apparence uniforme. Ces éléments saillants en sont le bord où se produisent des ruptures de gradients lumineux, et plus spécialement en ce bord, les lieux où ces ruptures de gradient sont maximales, et où la forme elle-même possède des singularités plus ou moins anguleuses. L'œil parcourt rapidement et à plusieurs reprises ces ensembles de singularités dont les voisinages plus ou moins étendus forment des cartes locales : leur assemblage, leur intégration débouche sur la définition de la forme de l'objet. C'est également en ces singularités que s'élabore la perception, l'élaboration des courbures locales qui contribuent à cette définition. Le trajet oculaire peut alors être représenté par un ensemble de points

(les points singuliers) reliés par des arêtes constituant le 1-squelette de l'objet [16].

Le second exemple est emprunté à l'étude des morphologies sociales. Dans la mesure où elles ont pour signification des positions localement ou globalement dominantes, les singularités incarnées peuvent avoir une vertu organisatrice et dynamique en ce sens qu'elles ont tendance à susciter autour d'elles des évolutions et des comportements divers, impliquant parfois des compétitions, des rivalités, conduisant à l'obtention de ces positions. Le chef, le président, est la personne singulière du groupe, de la société, qui coordonne et ordonne, donne l'impulsion.

Observons sur une montagne, une singularité quadratique représentée par un sommet arrondi ; en son voisinage, la forme de la montagne ne subit pas de changement brutal, et un alpiniste qui s'y déplace ne court point le danger d'une chute mortelle. Une manière de stabilité est associée à une telle morphologie, qui, par ailleurs, peut très bien représenter la répartition du pouvoir au sein des différents constituants d'une société.

A l'opposé, au voisinage d'un pic acéré, la forme de la montagne connaît des variations brutales : l'alpiniste qui atteint ce pic domine pleinement certes le paysage qui l'entoure, sur lequel il a une magnifique vue ; mais sa position y est fort instable, et il est partagé entre les impressions de plénitude et de fragilité. Ce pic correspond à une singularité que je qualifierais volontiers de « dictatoriale » : le type de montagne correspondant est une bonne représentation de la répartition du pouvoir au sein d'une société dotée d'un régime du même nom. Je ne suis pas sûr que les dictateurs, grisés par leur pouvoir, n'éprouvent pas également avec autant de force le sentiment de leur précarité : combien d'entre eux ont eu la crainte d'être empoisonnés !

Ces exemples empruntés au quotidien témoignent du lien très étroit entre singularité et extrémalité. Il est d'ailleurs inscrit au sein même de la définition

adoptée ici de la singularité, en tant que représentation d'une ou d'un ensemble de situations exceptionnelles.

Du point de vue historique, on rencontrera, dans le prochain chapitre, la manière dont Platon exprimait l'extrémalité. Il est sans nul doute bien des textes d'historiens traitant, à travers celle de l'optimalité, de cette notion, et cela de manière de plus détaillée quoique implicite. Cependant, la perspective synthétique qui en a été donnée autrefois dans [11] semble encore assez fraîche pour qu'on puisse en reprendre l'essentiel pour ce qui nous concerne, ici.

La notion d'extrémalité a été plus rapide à se dégager que la notion de stabilité. La stabilité n'est perçue que par opposition à une instabilité. Or, toute la philosophie socioreligieuse, mis à part quelques exceptions sans lendemain, concevait le monde comme immuable, et pesait avec assez de poids sur les esprits pour freiner la perception du transitoire, de l'instable. Par contre, l'extrémalité est inscrite dans la Nature, dans le physique comme dans le social. Elle s'est d'abord manifestée comme une règle d'économie avec Fontenelle dans son *Entretien sur la Pluralité des Mondes*, avant lui et plus profondément avec Fermat ; dans *De Maximis et Minimis*, ce célèbre mathématicien démontre proprement la loi optique $\sin i = n \sin r$: « Notre démonstration s'appuie sur le seul postulat que la nature opère par les moyens et les voies les plus faciles et les plus aisées. Car c'est ainsi que nous croyons qu'il doit être énoncé et non pas, comme on fait d'ordinaire, en disant que la nature opère par les voies les plus courtes ». Cette conception philosophique remonte en fait à une interprétation erronée d'une maxime d'Occam : « Il est vain de faire plus ce qui peut être fait avec moins ». Elle est à l'origine d'une règle d'action connue sous le nom de « Rasoir d'Occam » : utilisez l'hypothèse la plus simple.

On retrouve l'extrémalité en mécanique avec le principe de moindre action, en électromagnétisme et dans tous les domaines gouvernés par des champs de potentiel : les états d'équilibre stable sont atteints lorsque les potentiels sont à leur minima. Elle se manifeste en chimie avec les règles de Le Chatelier et le loi du minimum de Leibig, en thermodynamique où tout système tend vers un état d'entropie maximale, et où le principe de Gibbs-Delbruck-Molière joue un rôle essentiel, dans la vie économique où

l'entrepreneur vise à maximiser son profit, le consommateur à minimiser sa dépense. Elle existe en sociologie où, pour attirer l'attention, exercer le pouvoir, certaines personnes, certains partis politiques, prennent des positions extrêmes, ou occupent des situations singulières. On la rencontre en psychologie, où souvent l'homme affiche des attitudes, des ambitions excessives qui le singularisent.

Puisque les mathématiques sont d'abord des modèles plus ou moins fins de représentation de notre environnement, il est naturel de se heurter à chaque pas à la notion d'extrémalité. Et les résultats obtenus ont été d'autant plus marquants que cette notion a été utilisée consciemment.

Il y eut le cinquième livre d'Apollonius où il « expose des propositions relatives aux longueurs maxima et minima », et, avant lui, « Pappus et les Anciens » qui savaient déjà que « les maxima et les minima sont uniques et singuliers » observe Fermat. Fermat a joué un rôle important dans la création de l'analyse par ses travaux « Sur les solutions des problèmes de géométrie par les courbes les plus simples », car il « remarque que, dans certains cas, les questions de maxima et de minima peuvent se résoudre plus élégamment et peut-être plus géométriquement, au moyen de la construction d'une tangente. » Or, la pente de la tangente en un point à une courbe n'est autre que la dérivée en ce point à l'équation qui définit la courbe.

L'extrémalité est à la base de tous les problèmes d'optimisation qu'on retrouve en physique et en mécanique avec les problèmes posés par le calcul des variations et la recherche des géodésiques, en économique avec les problèmes posés par la recherche des minimax. Elle a même laissé son nom à un théorème connu sous le nom de « principe du maximum ». ...

Bien souvent, la pensée obéit à l'extrémalité de façon inconsciente. C'est presque d'un mouvement naturel qu'elle a cherché à définir le nombre minimal d'éléments qui engendrent un objet structuré donné ; la notion de base [par exemple] [nombre minimal de générateurs] n'a pas eu de difficulté à s'imposer. ...[La] méthode axiomatique est inhérente à l'esprit humain et révèle [également] l'extrémalité qui la gouverne [: la pratique de cette méthode met en effet en avant le plus petit nombre de données possibles faisant l'objet d'un consensus, et dont on élabore les conséquences].
...

L'extrémalité se découvre encore quand le mathématicien recherche des propriétés « denses », « génériques », qui ont cette qualité remarquable d'être presque *partout* vraies. Elles occupent donc la position hiérarchique la plus élevée dans l'ordre de l'étendue de vérité des propriétés définies sur un certain espace topologique ...

III.3.2 La bifurcation et la restructuration

maximas mutationes faepe quidem tam brevi fieri temporis momento, ut fenfibus nullo plane modo percipi possunt, determinandas tamen effe ad singula puncta, tum ut motus animo recte percipiatur, tum quia exinde varia deduci possunt Theoremata.

Daniel BERNOULLI ([5], p. 6)

III.3.2.1 *L'idée de bifurcation*

La notion de bifurcation est une des plus récentes notions dégagées par les mathématiciens et dont la signification est des plus intéressantes. Nous allons voir que *les lieux de bifurcation sont des ensembles singuliers et donc rares, en lesquels le milieu, déstructuré par rapport à ses voisins, est donc chargé de potentialités de développement, et par lesquels la transition entre structures différentes s'accomplit en général de manière extrêmement rapide.*

C'est en somme ce qu'avait compris Daniel Bernoulli en 1738, l'étonnante citation donnée en exergue à cet paragraphe en témoigne.

L'exemple le plus simple qu'on puisse donner d'une bifurcation se réfère encore à l'observation des paysages montagnards : nous voyons d'abord l'alpiniste grimper pour atteindre un sommet, d'où ensuite il redescend : il était sur une pente ascendante, le voici maintenant sur la pente descendante, et ce changement, cette bifurcation dans la nature de la pente, changement essentiel, survient en ce seul point singulier qu'est le sommet. Notre alpiniste, voûté, sac à dos plein, avançait à pas lent, soufflait, transpirait à grosses gouttes, et voici que, soudain, son pas devient alerte, sa marche joyeuse. La bifurcation physique de la géographie a ici pour corollaire la bifurcation physiologique et psychologique de l'état de notre alpiniste.

Plus généralement, la bifurcation décrit un changement immédiat de forme, d'état ou de comportement entraîné par la variation de paramètres distincts des variables d'état. Nouveauté de la forme, de l'état, du comportement : la bifurcation mathématique est un outil permettant de comprendre la genèse et la fin des choses.

Les approches de la stabilité faites par Lagrange et Laplace se réfèrent à cet outil. Nous avons vu qu'ils considèrent tous deux une ellipse un peu épaissie dont ils étudient la stabilité (cf la figure 2) : son grand axe étant parallèle au sol sur lequel elle est posée, elle est stable ; lorsqu'on la retourne de manière que ce grand axe soit maintenant perpendiculaire au sol, sa position est instable. On pourra comparer, de façon plaisante, la première de ces situations avec celle d'une première personne se prélassant dans l'herbe, allongée sur le ventre, et la seconde avec celle d'un seconde personne, en somme marchant sur la tête. Si θ désigne l'angle du grand axe avec le sol, la variation de θ de 0 à 90 degrés de ce paramètre angulaire fait passer de l'état de stabilité à l'état contraire : il y a bifurcation, un terme qui apparaît dans la langue française en 1560 à propos d'anatomie, mais que nos auteurs n'emploient pas encore.

On peut donner une autre présentation de cet exemple, un peu plus précise, en faisant apparaître ce qu'on peut appeler ici les *paramètres de forme* a et b de l'ellipse. L'équation qui la définit s'écrit :

$$ax^2 + by^2 = 1$$

Les paramètres de forme de l'ellipse sont des nombres positifs. On peut les représenter par un point du premier quadrant d'un plan, a étant placé en abscisse, b en ordonnée – on peut aussi introduire un paramètre de forme réduit,

$$f = \frac{a}{b}$$

et examiner la forme de l'ellipse quand f parcourt l'ensemble des nombres réels, on peut également remplacer les ellipses par des rectangles.

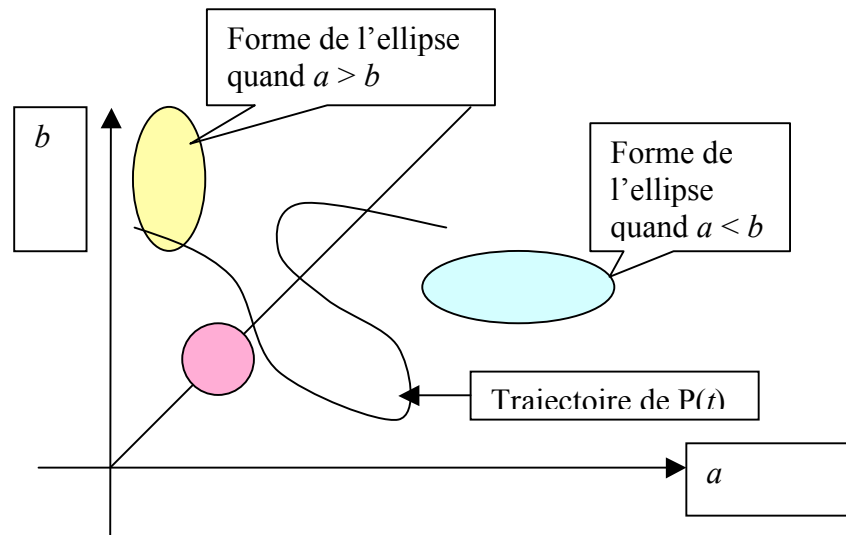


Figure 2

La figure ci-dessus fait voir la *forme* de l'ellipse selon que a est supérieur ou inférieur à b . Le lieu des points où advient l'égalité des paramètres ($f = 1$) est la bissectrice du quadrant : l'ellipse est alors un cercle, une forme singulière rare dans l'univers infini des formes elliptiques, forme parfaite au sens de Platon, caractérisée par l'équilibre, l'égalité entre un grand axe et un petit axe. Ce lieu que nous venons de rencontrer est le *lieu singulier*, le *lieu critique*, l'*ensemble de bifurcation*, dont l'aire a une mesure nulle, alors que les aires des domaines où les valeurs des paramètres sont inégales sont de mesure infinie.

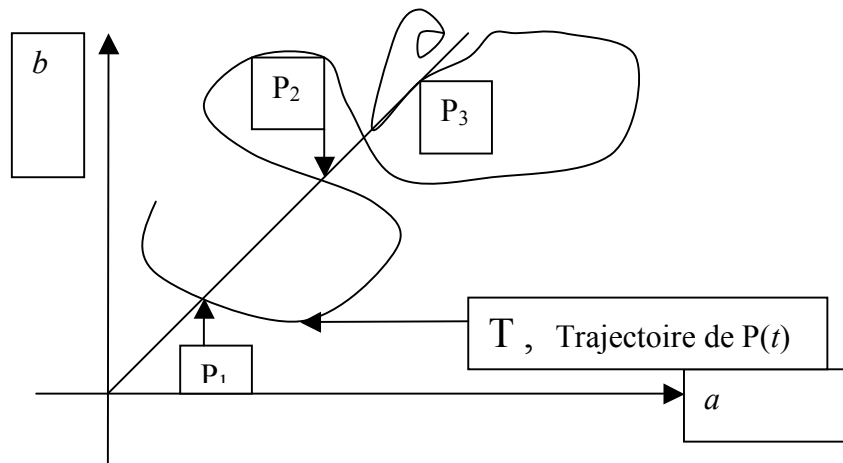


Figure 3

Si le point représentatif de la forme $P(t) = (a(t), b(t))$ se déplace dans le plan, sa trajectoire T n'aura pas en général de segment commun avec le lieu singulier, et le coupera en des points bien distincts : sont représentés, dans la figure ci-dessus, deux tels points distincts P_1 et P_2 en lesquels la trajectoire est transverse au lieu de bifurcation, ainsi qu'un point P_3 au voisinage duquel il n'y a plus transversalité, la trajectoire et le lieu singulier ayant une petite partie commune. La traversée de ce lieu s'accompagnera d'un changement de forme qui peut être soudain, important, brutal. Et si de plus, l'un des paramètres devenait négatif, alors l'ellipse muterait en une hyperbole, une vraie métamorphose.

Une durée, aussi faible soit-elle, est nécessaire pour que s'accomplisse une transformation structurelle compliquée. Dans ces cas, la trajectoire représentative de l'évolution vient longer le lieu de bifurcation, peut lui être tangent, se fondre un moment en lui : la transversalité géométrique s'efface alors.

Un exemple physique qui étend le cas de l'ellipse que nous venons de rencontrer a été donné par Gustav Jacobi (1804-1851) en 1834, dans son étude, déjà abordée par Newton, de la forme d'une masse fluide incompressible en rotation, maintenue en équilibre par le seul jeu des forces gravitationnelles internes. Jacobi trouve que, pour les valeurs supérieures à une valeur critique t_c d'un paramètre de forme t défini comme le rapport

la forme de la masse fluide est celle d'un ellipsoïde à trois axes inégaux.

L'introduction du terme bifurcation, à travers les expressions qu'il emploie, « bifurcation de voies », « points de bifurcation », « bifurcations d'intégrales », « lieux de bifurcation », semble revenir à Joseph Boussinesq. En 1878 il publie un mémoire sur la *Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale* [9] ; en 1879, il commente ce mémoire dans une publication intitulée *Etude sur divers points de la Philosophie des Sciences* [10].

Que présentent de particulier, pour le mécanicien géomètre, ces curieux systèmes matériels qu'on appelle des organismes vivants ? Si la vie, à ses divers états, est la manifestation d'un principe directeur spécial⁵⁰, comme l'affirme le bon sens et comme l'admettent Berzélius, Claude Bernard, Cournot, etc, comment ce principe directeur peut-il présider à la formation des organes et influencer sur leurs mouvements sans créer ni détruire aucune énergie, sans disposer même d'aucune force proprement dite, mécanique, physique ou chimique, évaluable en poids ou par son travail, comme l'ont conclu de leurs expériences les plus grands physiologistes et chimistes contemporains ? Telle est la question abordée dans ce mémoire de 1878. J'y en indique, et en développe pour les cas les plus simples, l'unique solution, constituée par des bifurcations de voies, c'est-à-dire par la multiplicité des intégrales qu'admettent dans des circonstances singulières, à partir d'un même état initial, les équations différentielles du mouvement de certains systèmes matériels. En effet, ...

Selon Boussinesq, la Nature, sans que nous puissions véritablement dire par quels truchements, selon un principe bien à elle, déterminerait le choix de la trajectoire que suivra le système.

⁵⁰ Un des lecteurs précédents du texte que j'ai eu entre les mains avait souligné « principe directeur spécial ».

C'est, sous l'influence de Thomson et Tait, en reprenant ce problème de Newton-Jacobi dans son article paru en 1885 *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation*, que le terme « bifurcation » apparaît pour la première fois sous la plume de Poincaré ; il utilise plus précisément l'expression « *forme de bifurcation* » :

Il pourra d'ailleurs arriver qu'une même forme d'équilibre appartienne à la fois à deux ou plusieurs séries linéaires. Nous dirons alors que c'est une *forme de bifurcation*.

Il n'est pas impossible qu'un exemple donné par Poincaré dans cette étude ait conduit Thom sur la voie de la définition du déploiement universel de sept polynômes particuliers. Poincaré dira avoir été influencé par l'observation du réseau ferré, Thom reprendra le même récit ; il n'est pas interdit de penser que Boussinesq, qui voyageait assez souvent entre Lille et Paris, ait également emprunté sa terminologie au langage ferroviaire, et que Poincaré se soit souvenu des écrits de Boussinesq. Le traitement par Poincaré de la bifurcation est bien différent de celui de Boussinesq : comme on va le voir sur deux exemples fort simples, la bifurcation est l'effet de légères modifications contrôlées des données locales qui dirigent le devenir des systèmes.

Le développement de la radioélectricité à travers la mise au point des oscillateurs, tant dans ses aspects techniques que théoriques, va permettre de mettre en lumière le rôle joué par les phénomènes de bifurcation. Ont déjà été mentionnés les travaux de la grande école russe. La première extension à la biomédecine des travaux entrepris sur les oscillateurs électroniques push-pull sera faite par Van der Pol [48][49] : ses équations de l'oscillateur et du battement cardiaque feront l'objet de très nombreux études et développements (Elie et Henri Cartan (1904-), Alfred-Marie Liénard (1869-1958)).

On y rencontre un phénomène de bifurcation déjà décrit par Poincaré, mais qui sera explicité de manière analytique par Eberhard Hopf (1902-1983) [25], et dont la technique basée encore sur la linéarisation sera largement reprise par la suite.

La notion de point singulier s'étend de manière naturelle en celle d'un ensemble de points invariants au cours du temps, et que l'on appelle parfois un *attracteur*. Il représente en quelque sorte la finalité d'une évolution. Par exemple une trajectoire est un ensemble globalement invariant : l'évolué de tout point de l'ensemble est encore un point de l'ensemble. Celui-ci n'est pas forcément un attracteur. Il faut en plus pour cela qu'au voisinage de cette trajectoire viennent mourir d'autres trajectoires. Le phénomène de bifurcation de Poincaré-Hopf est simplement le déploiement d'un point singulier attractant (tore de dimension nulle) en une trajectoire attractante fermée sur elle-même, un cycle attractant (tore de dimension 1).

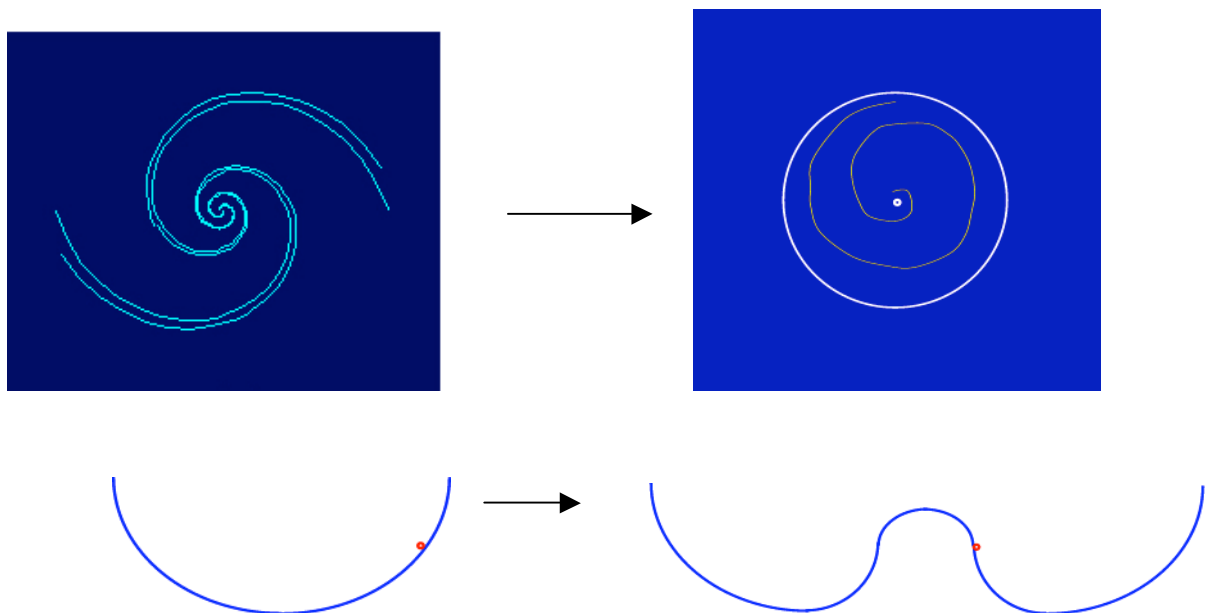


Figure 3 : Bifurcation de Poincaré-Hopf

La bille rouge tombe au fond de la coupelle, éventuellement en rotation autour de son axe

qui est déformée au cours de la bifurcation tout en continuant son mouvement de rotation

Au moment de la bifurcation, se produit un phénomène mathématique sur la signification duquel on n'a pas assez prêté attention.

III.3.2.2 *Déstructuration et restructuration*

Les phénomènes de dédifférenciation-différenciation sont bien connus des embryologistes, ceux de déstructuration-restructuration sont fréquemment évoqués par les économistes (Karl Marx (1818-1883), François Perroux (1903-1987)), par les historiens (Arnold J. Toynbee (1889-1975)), voire par les artistes (René Huyghe (1906-1997) à propos de Picasso (1881-1973)). Du point de vue conceptuel, l'étude de tous ces phénomènes relève de la théorie de la bifurcation.

Il arrive en effet également que, pour des valeurs singulières des paramètres qui les définissent, des objets mathématiques en évolution présentent des formes *transitoires de déstructuration, de dégénérescence*. Ces objets connaissent alors une modification de leur structure interne.

Ces dégénérescences correspondent à des situations physiques très naturelles dans la mesure où la structure d'un objet ne saurait être modifiée sans passer au préalable par une phase au cours de laquelle cette structure puisse être partiellement déstabilisée, voire dissoute.

Une telle phase ne peut être que transitoire, car l'objet perd des qualités de stabilité immédiate, et pourrait disparaître à trop s'attarder dans un état de faiblesse apparente.

Il acquiert par contre des potentialités supplémentaires dans le sens suivant : au moment où est franchi le lieu de bifurcation, une ou des variables y_i autrefois pertinentes deviennent momentanément muettes, ou, à un moindre degré, tout en restant présentes, perdent ce caractère de variable essentielle. Lorsqu'elles deviennent muettes, les coefficients qui les affectent prennent la valeur nulle. On peut dire qu'elles sont en quelques sorte supprimées par annihilation. Elles ne pèsent pendant un instant d'aucun poids sur la structure de l'objet. Elles n'en restent pas moins potentiellement présentes, et peuvent resurgir, retrouver un rôle structurel nouveau au sein d'une architecture différente, au cours de bifurcations ultérieures. On peut même envisager des

situations où des variables potentiellement présentes dès l'origine n'aient jamais été exprimées avant l'apparition de bifurcations guidées par d'autres transformations internes et/ou par des évolutions de paramètres exogènes. Trivialement par exemple, la fonction

$$g(x_1, x_2) = a x_1$$

devient, lorsque b quitte la valeur nulle,

$$g(x_1, x_2) = a x_1 + b x_2.$$

Sans aller jusqu'à l'annihilation, la perte de pertinence advient également lorsque la variable perd de son caractère d'indépendance, et devient vassale d'autres variables ; la liaison est linéaire dans les cas les plus simples. Dans ces cas, il y a perte de la richesse structurelle.

Cet exemple classique d'une situation fort simple illustre bien l'essentiel de ce propos. On considère une évolution d'un ensemble de propriétés y_i ; la vitesse d'évolution $\frac{dy}{dt}$ de ces propriétés est supposée connue :

$$\frac{dy}{dt} = F(y, a)$$

où a est un paramètre. Une technique générale d'étude consiste à linéariser F , de sorte qu'en première approximation, les vitesses évoluent selon la loi linéaire :

$$\frac{dy}{dt} = M(a) y.$$

On se place dans le cas où l'ensemble de propriétés se réduit à deux éléments : y_1 évalue par exemple le degré de liberté d'expression, y_2 mesure le degré de satisfaction matérielle, et a évalue le degré de rigidité de la société : a est positif dans une société rigide, il est négatif dans une société souple. On suppose que :

$$\frac{dy}{dt} = M(a) = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Selon le signe de a , aux solutions de cette équation sont associées des trajectoires ayant les formes suivantes :

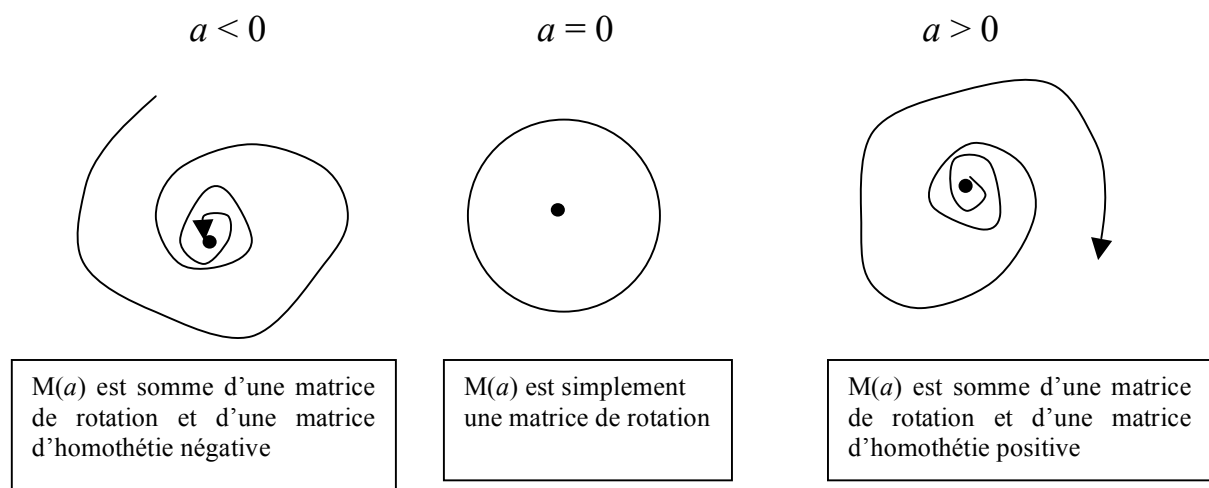


Figure 4

Le vecteur vitesse en un point est somme d'un vecteur vitesse « circulaire » et d'un vecteur vitesse « radiale » qui ramène ($a < 0$) le mobile vers l'origine, ou l'en éloigne ($a > 0$). Le lieu de bifurcation se réduit ici à l'origine de la droite réelle.

Dans tous les cas, l'entité considérée connaît une modification locale de ses degrés de libertés, de sa capacité apparente d'autonomie vis-à-vis de son environnement. De fait, *elle acquiert, au moment de la bifurcation, des potentialités plus élevées, rejoignant un état de totipotence primordial.*

Si, durant la phase de stabilisation, un agent extérieur, ou endogène, pèse davantage que les autres sur l'évolution du système, cet agent pourra conduire rapidement cette évolution vers l'apparition d'une nouvelle morphologie associée à une structure différente, plus stable, mieux adaptée aux conditions nouvelles de l'environnement, et mathématiquement représentée par un nouvel attracteur du système. Il semble que la plupart des mécanismes épigénétiques locaux s'insèrent dans ce schéma conceptuel général.

On devine ici qu'hormis les cas simples de la physique, la considération de l'énergie est une donnée insuffisante pour établir le devenir d'un objet complexe comme peut l'être un objet biologique. L'évaluation de ses degrés de stabilité et

de potentialités selon les paramètres et les contraintes en présence sont sans doute quelques-unes des données qui pourraient permettre d'avancer dans la prévision des lendemains.

III.3.2.3 *La rupture de symétrie en tant que bifurcation*

La présence de symétries est un indicateur d'un équilibre des jeux de forces internes et externes qui affectent un objet. Les symétries se structurent en groupes, et le groupe des symétries d'un objet est de quelque manière associé à la stabilité de l'objet, et à l'ensemble des propriétés qui le caractérisent.

Se présentant, parfois, sous l'apparence de *défauts*, comme il arrive dans les cristaux liquides, c'est en des singularités, notamment celles associées aux groupes de transformations dépendant de paramètres, qu'apparaissent les bifurcations de l'état de la matière, les modifications dans les morphologies, les ruptures de symétrie, les dégénérescences dans les spectres de valeurs propres. A partir de ces singularités, qu'elles soient isolées ou bien rassemblées en lieux critiques et de bifurcation, peuvent advenir les changements dans les propriétés des groupes de symétrie, des déploiements de ces groupes, ou, au contraire, leur contraction en certains de leurs sous-groupes.

En physique, les plus connues de ces brisures de symétrie sont celles de Goldstone qui accompagnent de la naissance de particules de masse nulle, et celles de Higgs qui, au contraire, donnent naissance aux particules massives⁵¹.

Si, à un moment donné, advient une restructuration d'un objet, il est nécessaire, pour qu'il ne perde pas son identité, que des éléments fondamentaux de structure soient conservés, ainsi, par conséquent, que quelques-uns des éléments de symétrie de la structure antérieure. Ces éléments encore présents

⁵¹ On trouvera dans les textes de Witten par exemple, l'analyse de plusieurs comportements de bifurcation ou de non bifurcation dans les domaines de la physique théorique. (Edward WITTEN *Dynamics of quantum field theory (Lecture 1 : Symmetry Breaking* pp. 1121-1146, *Lecture 2 : Gauge Symmetry Breaking and More on Infrared Behaviour*, pp. 1147-1157) in *Quantum Fields and Strings : a course for mathematicians*, Pierre Deligne, Pavel Etingof, Daniel S. Freed, Lisa C. Jeffrey, David Kazhdan, John W. Morgan, David R. Morrison, Edward Witten eds, vol.2, Am. Math. Soc., Providence R.I., 1999).

doivent encore former un groupe qui reflète l'équilibre du nouvel objet. Ce groupe H_i est contenu dans le groupe initial G , en forme un sous-groupe. On dispose ainsi, associés aux différents états possibles des objets, de chaînes⁵² de sous-groupes, $0 \subset \dots \subset H_i \subset \dots \subset G$, 0 désignant le sous-groupe restreint à l'élément neutre. La mort étant considérée comme la situation hélas la plus stable, on considérera ici que la réduction d'éléments de symétrie accroît les potentialités de stabilité de l'objet.

III.3.2.4 *Sur l'inventaire et l'emploi des formes de bifurcation*

Les phénomènes de bifurcation présentés dans les paragraphes précédents sont parmi les plus élémentaires. Il existe bien variantes et des raffinements dans les mécanismes qui se mettent en place. Il peut arriver par exemple qu'une bifurcation apparaisse alors que deux cycles parcourus à des vitesses différentes se rapprochent : un phénomène de turbulence local prend d'abord naissance lorsque est franchi un certain seuil de proximité entre les deux cycles ; selon les cas, un des cycles, ou les deux, peuvent très rapidement s'évanouir.

Il est de nombreuses situations pratiques où l'on peut se contenter d'examiner la manière dont varient les propriétés y dépendant de variables d'état x , en fonction des seules perturbations d'un ensemble de paramètres a :

$$y = f(x, a).$$

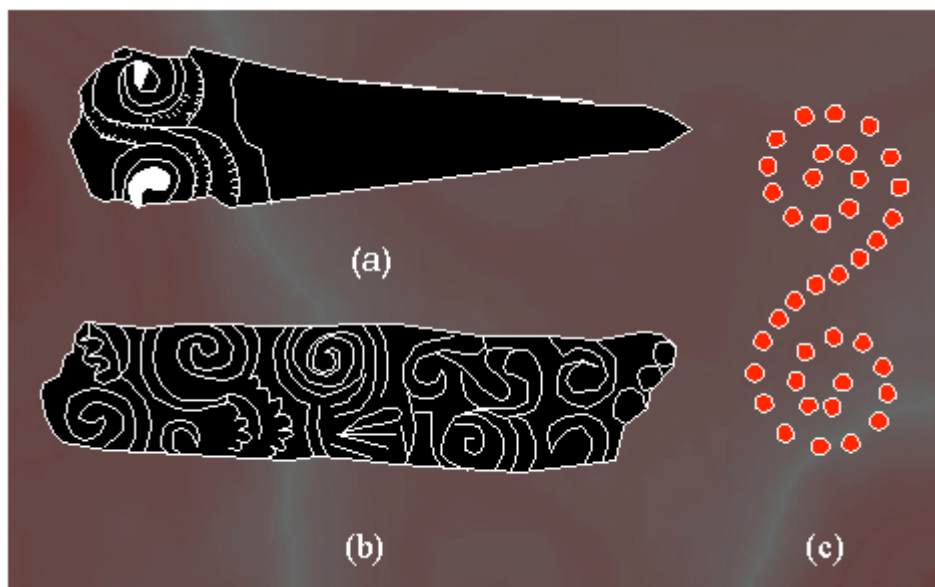
On a alors été amené à envisager, selon les modèles mis en œuvres, différents types de bifurcation que l'on peut qualifier de statiques : bifurcation simple, avec uni- ou multi- imperfection, séquentielle, équivariante (Louis Michel, Martin Golubitski). On peut inclure ces différents types au sein de l'étude plus large des bifurcations dans les systèmes dynamiques. Ces bifurcations sont tellement nombreuses, variées, qu'il n'est pas possible d'en établir une classification relativement élémentaire. De nouvelles formes d'ensembles de bifurcation

⁵² En physique des particules, plus précisément, on fait appel à la suite : $U(1) \times SU(2) \times SU(3) \subset SU(5) \subset SO(10) \subset E(6) \subset \dots$

apparaissent au fur et à mesure que sont enrichis notamment dans leur dimension les modèles mathématiques. Cette diversité reflète la richesse des morphologies naturelles, est en conformité avec la mise en évidence de bifurcations dans tous les ordres de la nature.

Il semble qu'il y ait cependant quelques formes de bifurcation archétypes, plus fondamentales que d'autres. Une des premières est sans doute la bifurcation par explosion que l'on voit parfois dans les feux d'artifice : un point singulier isolé se déploie de manière uniforme en trajectoires dans toutes les directions : « De l'un jaillit le multiple » disait déjà Empédocle.

Cependant très rapidement, sous l'influence peut-être de la flèche du temps, de la chiralité inhérente à la nature, ces trajectoires s'infléchissent : le dessin qui s'impose alors montrant la morphologie de l'ensemble des trajectoires est celui associé à la bifurcation de Poincaré-Hopf. Ne le retrouve-t-on pas si fréquemment dans les dessins d'enfants, dans les gravures et dans les motifs de décoration les plus anciennement connus ?



Eléments de poterie archaïque
(image trouvée sur la toile)

Il est une autre bifurcation, encore plus élémentaire que les deux précédentes. Il s'agit de la bifurcation simple associée aux deux formes de la fourche et représentée sur la figure 1 : du point singulier donné, ne partent que deux voies. Cette figure symbolise à mes yeux l'ambiguïté profonde qui imprègne le monde, ce mélange d'amour et de haine, de souffrances et de joies, de laideur et de beauté, souvent tous issus d'une même source, les bonnes intentions qui peuvent paver l'enfer, les erreurs, ces maux affaiblis dont l'analyse peut être source de progrès.

Dans les modèles relevant de la théorie des catastrophes⁵³, déjà évoquée dans le précédent chapitre (§ II.3.3), on utilise la bifurcation simple et celle de systèmes gradients, aussi bien en physique (optique où la réussite est parfaite, mécanique, transitions de phase, hydrodynamique), qu'en biologie (entre autres, embryologie, radiologie, fibrinolyse, membranes cellulaires), que dans l'études des comportements sociaux et individuels (comportements bi-modaux, empreinte, accoutumance versus désaccoutumance, apprentissage, décision et comportements du marché), qu'en linguistique (classification des verbes, ambiguïté). Bien sûr, la bifurcation est présente dans les domaines innombrables où apparaissent des seuils de tolérance, des ruptures brutales, des morphologies et des comportements nouveaux.

En conclusion de ce paragraphe III.3, j'emprunterai à la publication [13] cette considération sur le devenir en biologie :

La soudaineté de l'apparition d'espèces animales dotées de dispositifs physiologiques apparemment entièrement inconnus jusqu'alors, l'absence [parfois] totale de formes transitoires, l'étrangeté des métamorphoses, sont quelques-uns des problèmes que les théories classiques de l'évolution restent incapables d'expliquer. L'ouvrage de Denton sur ce sujet fait de manière remarquable le point sur les questions à résoudre – encore qu'il exprime parfois des opinions trop tranchées pour être

⁵³ Le terme de « catastrophe » a été proposé par Christopher Zeeman (1925-) et adopté par Thom.

entièrement exactes et qui faussent le débat, comme celles-ci : « La biologie entière d'un organisme, l'ensemble de ses traits anatomiques sont fondamentalement réductrices à ses protéines constitutives » ! Où est l'architecture dynamique de l'être vivant ?

La théorie des systèmes dynamiques offre un début d'intelligence de ces phénomènes d'évolution, au moins sur le plan des principes directeurs.

En premier lieu, il est clair, au moins pour un nombre croissant de chercheurs, qu'une vue locale des mécanismes physiologiques ne permet en aucune façon d comprendre leur genèse, ni même parfois leur fonctionnement, d'où certaines erreurs et aberrations médicales douloureuses... L'être vivant est une totalité qui évolue au sein d'une totalité plus vaste. L'ensemble forme un énorme système dynamique dont les attracteurs symbolisent la nature et le comportement des états des constituants des objets, et qui sait conserver une mémoire du passé dont l'influence sur le présent n'est pas assez prise en compte.

Les interrelations introduisent des couplages entre ce qui peut parfois être considéré localement comme des variables d'état et des paramètres de bifurcation. Le phénomène de la pléiotropie, un traumatisme effectué sur un gène a des conséquences sur des parties de l'être vivant qui paraissent indépendantes du gène touché, constitue une preuve supplémentaire de l'existence de cet entrelacs d'interrelations. L'évolution des paramètres de bifurcation guide partiellement au moins celle des variables d'état. Lorsque des bifurcations se produisent, d'énormes pans d'attracteurs peuvent soudain s'effondrer, entraînant de multiples restructurations, tant sur les plans morphologiques, physiologiques et fonctionnels. Comme on l'a vu, ces périodes de restructurations ont un caractère transitoire très marqué. La métamorphose est typique à cet égard. Ces lignes avaient déjà été écrites avant que je tombe sur celles-ci, de Denton⁵⁴ : « Le premier stade de la métamorphose, qui succède rapidement à la formation de la chrysalide, équivaut pratiquement à la dissolution de tous les systèmes organiques de la larve, en une véritable soupe de cellules et de tissus fragmentés. Cette phase de dissolution est rapidement suivie par une phase d'assemblage durant laquelle les systèmes organiques – musculaires, nerveux et digestifs – de l'insecte adulte sont élaborés à partir de cellules embryonnaires spéciales... »

⁵⁴ M. DENTON, *Evolution, une théorie en crise*, Londres, Paris, 1988

Les structures intermédiaires, peu stables, aux potentialités élevées comme nous l'avons vu, ne pouvaient guère, la plupart du temps, laisser de trace significative. Pour résister aux épreuves de la variation possible du milieu (températures, pressions, degrés hygrométriques), à celles des cataclysmes naturels, voire des simples intempéries, aux dangers et aux coups des prédateurs multiples, un minimum de stabilité est évidemment nécessaire. Un même phylum peut, quand certaines conditions sont réunies, bifurquer en plusieurs embranchements, dont les caractères d'adaptation à l'environnement, les réalisations fonctionnelles internes (par exemple la composition de l'hémoglobine) peuvent être radicalement différentes. Sur le plan conceptuel, il n'y rien, là, de surprenant.

L'évolution écologique de notre planète suscite bien des craintes. Je les partage certes, mais de manière ambiguë, je les envisage aussi avec intérêt : il pourrait en résulter, en peu de temps, au moins quelques bouleversements des morphologies sociales et économiques. Si nous n'avions ni imprimerie, ni film, ni cassette diverse, l'histoire future n'aurait jamais eu accès à la connaissance détaillée de cette période. L'évolution de la composition de notre atmosphère aura été le fait de deux centaines d'années. Peut-être en résultera-t-il des effets biologiques. Nous n'avons pas les moyens, au moins aujourd'hui, de connaître ni même de déceler, un changement d'environnement accompli pendant 200 ans, des centaines de millions d'années en arrière. Il se pourrait donc que la reconstitution des transformations, qui, dans le passé, ont affecté le monde vivant, soit un rêve inaccessible. Cette possibilité n'affecte en rien la validité du schéma conceptuel offert par la théorie. Je parie même qu'un jour viendra où l'homme sera capable de le mettre en œuvre, dans le domaine de la vie, sur le plan expérimental. Souhaitons, sans hélas beaucoup d'illusion, que ce soit pour le bien de ce qui sera alors le vivant.⁵⁵

III.4 Le caractère fonctionnel de la stabilité et les questions philosophiques attenantes

III.4.1 La question de la continuité

⁵⁵ On sait que, dans trois à quatre milliards d'années, l'évolution de l'étoile solaire finira par brûler la terre. Le phénomène humain doit donc se transformer en profondeur s'il veut acquérir quelque pérennité. Toute l'évolution des connaissances et des techniques (s'évader dans l'espace, se réduire à quelques molécules peu sensibles aux effets des rayons cosmiques, acquérir un statut « virtuel » et abstrait) vise à lui permettre d'atteindre à cette pérennité.

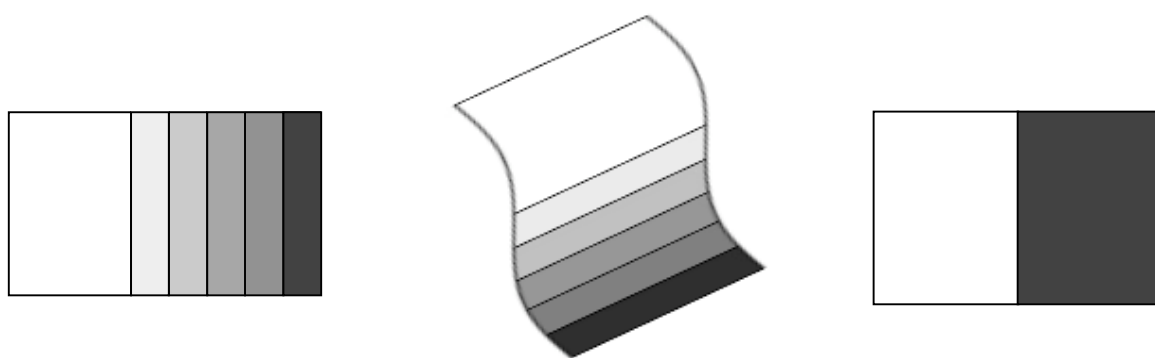
Un examen de cette question, plus complet que celui qui va suivre, a fait l'objet de l'article portant la référence [15]. Il s'appuie en partie sur un texte antérieur [12] dont la conclusion va ici être reprise.

A l'échelle paléontologique par exemple, les catastrophes naturelles, les naissances des nouveaux phylums, des nouvelles espèces, sont, pour la plupart, des phénomènes fugaces ; si, par ailleurs, des bifurcations entraînant des métamorphoses ont eu lieu, elles ont eu en général une durée de réalisation trop courte pour laisser des traces aisément décelables. Curieusement, les discussions sur les théories évolutionnistes tiennent peu compte de ces faits. Mais ce n'est pas ici le lieu d'aborder la problématique évolutionniste. Mentionnons simplement en biologie le rôle immense que jouent sans aucun doute les phénomènes de bifurcation dans la dynamique cellulaire, l'embryologie ou en immunologie. Nombre de changements rapides du comportement, fixation soudaine, brusque apparition de passions, relèvent sans aucun doute également de la théorie de la bifurcation.

Le point essentiel est que des évolutions très rapides peuvent s'engager, notamment au cours de processus de bifurcation. Leur durée, qu'on peut parfois calculer, est sans doute souvent trop brève pour qu'on puisse espérer les suivre par l'observation directe – la limite présente⁵⁶ de durée d'observation semble être obtenue en chimie où l'on a observé des états de transition de 200 femtosecondes ($200 \cdot 10^{-15}$ sec.).

Ces évolutions rapides peuvent être celles de morphologies, voire de topologies. Imaginons une feuille de papier comportant une plage sur laquelle est fixé un continuum qui va du blanc au noir. Cette feuille est brutalement pliée, de sorte que, vue de dessus, l'observation ne révèle que deux plages, l'une blanche, l'autre noire.

⁵⁶ En 1989. La préparation aujourd'hui de nouveaux lasers à rayons X laisse entrevoir la possibilité de faire certaines observations à l'échelle de la femtoseconde : peut-être alors comprendrons-nous un peu mieux la mécanique quantique ?



L'illusion de l'observation fait croire ici à la présence d'une discontinuité constitutive au niveau des coloris.

Ce schéma très simple montre qu'on peut mettre en œuvre divers types de procédures à la fois dynamiques et topologiques, qui permettent de plonger un milieu apparemment discontinu dans un milieu continu, de sorte que la discontinuité n'est qu'une apparence trompeuse.

Pourtant, si l'on prend une pâte à tarte et si on la plie et replie inlassablement, l'écrasant dans une direction, l'étalant dans l'autre, on finit par obtenir un milieu constitué d'une myriade de particules isolées : c'est, du vue mathématique, par ce procédé qu'est construit le « collier d'Antoine », ou le « fer à cheval » de Shub-Smale. La fabrication d'ensembles totalement discontinus, à partir de milieux apparemment continus et par des procédés dynamiques, donne à penser que la discontinuité est aussi une réalité ; mais elle est ici, et comme précédemment, seconde par rapport à la continuité, elle s'en déduit.

Dans les deux cas, la discontinuité, qu'on la tienne pour apparente, fictive, ou réelle, résulte de phénomènes de bifurcation advenant dans le cadre d'évolutions, de procédures dynamiques.

Dans la dernière qui est décrite, il est intéressant de relever que cette transformation de boulanger finit par se figer sur une structure discontinue mais fixe, situation apparemment paradoxale qui allie le continu au mouvement, lequel finit par dégénérer dans le discret associé à l'immobile, évolution en tout point parallèle à celle qui va de la vie à la mort, à celle, aussi naturelle, de la démarche analytique qui est toujours mise en face d'une globalité, la brise, et en étudie les parties.

Mais en dehors du monde abstrait des objets mathématiques, la reconstitution de l'objet global à partir de ses seuls éléments est impossible, car il faut pour souder les parties entre elles introduire des données extérieures à l'objet, des « colles », des « artifices ». La démarche analytique les cache, les oblitère, les chasse.

A l'inverse, la construction des infiniment petits à la Robinson montre qu'il est toujours possible de concevoir un univers peuplé de particules aussi fines que l'on veut ; l'apparence du tout peut encore donner l'illusion d'un continuum. Mais comme je viens de le dire, pour posséder une réalité physique, ces particules doivent être tenues entre elles par des liants, fussent-ils des champs dont la véritable nature échappe à notre intelligence. La construction d'un univers à partir de données isolées, et, *a priori*, purement indépendantes les unes des autres, est donc celle d'un monde artificiel.

Ma conviction sera alors de dire que la fragmentation du monde en singularités naturelles totalement isolées est un leurre de l'esprit, fort utile au demeurant. Celui, rétorquant que le façonnage de pierres parfaitement ajustées peut permettre la construction de pyramides magnifiques, démontables et remontables à volonté, aurait oublié la présence du liant qu'est la pesanteur. La manifestation de bifurcations au caractère extrêmement rapide, parfois vagabondes, s'accompagnant de changements de phase, de métamorphoses, c'est-à-dire de dissolutions et de recompositions de structures même échappant à tous nos moyens d'investigation, soutient la primauté du continu sur le discontinu, esseulé, inerte, sans rayonnement.

La rapidité du changement de forme est en partie liée à la manière et la vitesse avec laquelle est franchi le lieu singulier. Ce changement de forme peut être lent, insensible, ou au contraire si transitoire, si rapide qu'il échappe à toute observation. L'ensemble de bifurcation devient alors un ensemble de « catastrophes ». La capacité des appareils, biologiques, ou bien créés par l'homme, à déceler les objets, à évaluer leurs vitesses de passage et de transformation joue ainsi un rôle important jusque dans l'idée même que nous nous faisons des phénomènes. Une transformation très complexe, extrêmement rapide, invisible, indécélable par nos sens et même par tout appareil de mesure conçu jusqu'à présent, peut faire croire à une naissance spontanée, ou à la réalité

de la discontinuité matérielle. Cette rapidité masque la continuité réelle de la transformation.

Autant Aristote que Darwin – qui cite le fameux adage *Natura non facit saltus* – Leibniz, tout comme le mathématicien Poncelet un siècle plus tard, tous affirment le caractère continu de l'évolution. Dans ses *Animadversiones in partem gene ralem Principiorum Cartesianorum* [32], Leibniz énonce ce qu'il appelle « *la loi de continuité* », dont il donne une belle illustration géométrique. Poncelet, qui ignore cet écrit de Leibniz, place sa démarche sous la bannière du « *principe de continuité* », et consacre sa vie de mathématicien à en montrer toute la valeur en géométrie. Comme le traité de géométrie de Poncelet a joué un rôle majeur dans la formation des mathématiciens du XIX^{ème} siècle, il n'est pas étonnant que Poincaré ait employé ce principe d'une façon aussi habile que constante.

Faut-il adopter le point de vue continuiste de Leibniz, ou bien le point de vue ontologiquement atomiste de Leucippe et de Démocrite ? Ondes ou particules ? Comprenant les particules comme une sorte de cristallisation plus ou moins prononcée de l'espace, je répondrai pour ma part ondes au niveau le plus profond, ondes et particules à un premier niveau transitoire, particules au niveau le plus visible sur la surface du présent.

III.4.2 Un aspect fonctionnel de la stabilité : la stabilisation par création d'un système de régulation

Le langage n'est pas innocent : il révèle parfois les racines profondes de l'être, expression parcellaire des propriétés de l'univers. Le sentiment de plénitude que l'on peut éprouver parfois s'accorde avec la perception d'une forme instantanée d'équilibre et d'harmonie générale. Il faut prendre ici le terme plénitude dans son sens ordinaire : ce qui remplit, ce qui est plein.

La grosse bille étincelante posée sur le sol est une image de cette plénitude. Elle occupe un espace compact à trois dimensions, et donne l'impression d'une

très grande stabilité. La pièce de monnaie de son côté, posée sur sa tranche, en position fort instable au demeurant, se rapproche davantage du disque mathématique idéal à deux dimensions seulement. Pour stabiliser cette pièce dans son milieu, il faut la rendre semblable à ce milieu, il faut donner à l'objet sa plénitude spatiale, l'épaissir dans la direction d'une troisième dimension perpendiculaire aux deux premières, direction qui est donc transverse au plan qui contient la pièce de monnaie idéale : la pièce devient cylindre.

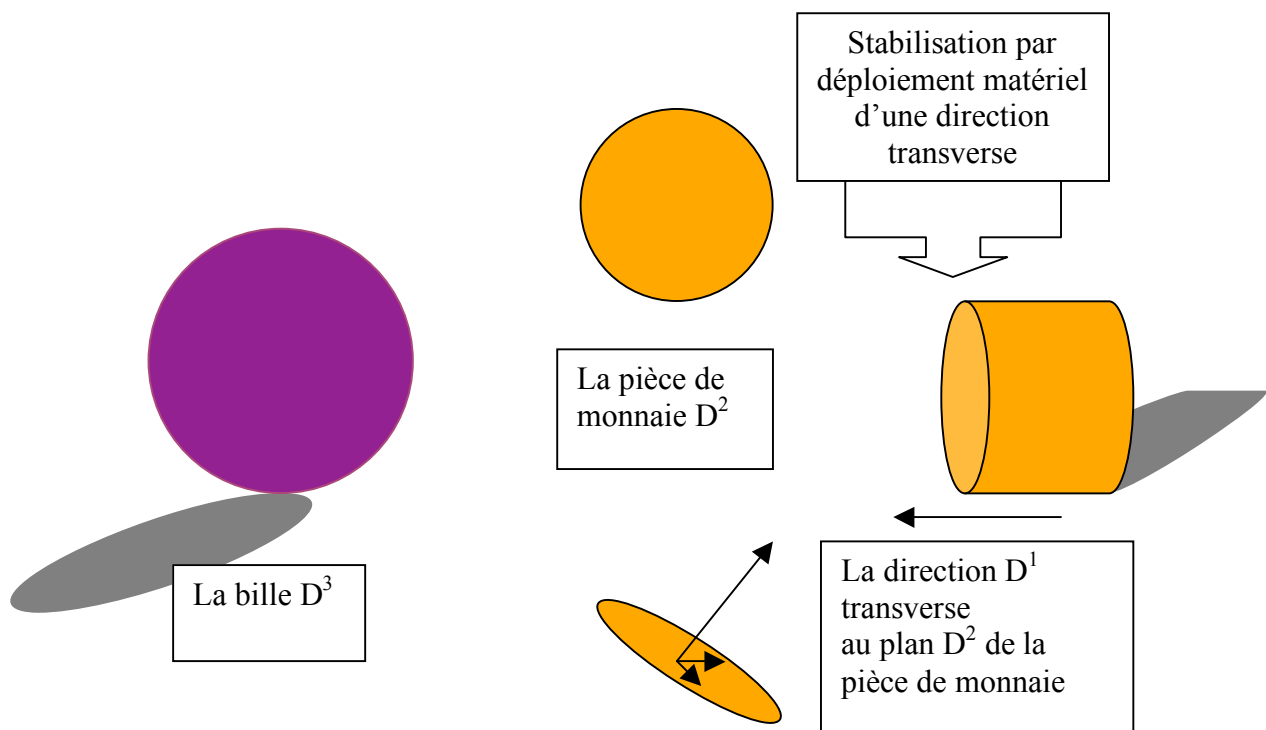


Figure 5

Stabilité, ou plénitude spatiale dans son interprétation géométrique, et transversalité sont ainsi intimement liées.

Le schéma de stabilisation décrit dans la figure précédente correspond à l'obtention d'une stabilité maximale. On peut, dans certaines conditions, accepter un degré de stabilité moindre : par exemple en évasant le corps médian d'un cylindre pour obtenir une forme d'haltère, on gagne en dépense de matière, en affaiblissant toutefois la possibilité de résistance de ce nouvel objet en son

milieu. On pratique ici un calcul d'optimisation énergétique en fonction d'un risque, de données environnementales. Ce calcul a un coût, en premier lieu de conceptualisation, payé à long terme par le gain en matière : on voit ici se dessiner l'équivalence entre une énergie physique et ce qu'on pourrait appeler une énergie conceptuelle. Quoi qu'il en soit, le processus de stabilisation reste le même : mise en œuvre d'un développement morphologique et matériel premier dans une direction transverse à la géométrie de l'objet initial.

Il semble qu'on soit ici en présence d'un universel de la constitution morphologique et fonctionnelle des objets. Les systèmes de régulation qui se sont mis en place et qui visent à assurer la stabilité spatio-temporelle des objets révèlent une structure établie selon ce procédé. On prendra soin de tenir compte de la nature d'une structure : elle est une idéalité, souvent masquée par ses incarnations.

L'« organe » de régulation de cet outil de cuisson appelé autocuiseur est constitué d'un pointeau transverse au couvercle de l'appareil ; une idéalisation simple de la géométrie présente nous renvoie à la figure précédente où le disque symbolise le couvercle, l'élément de droite perpendiculaire au disque représente le pointeau. De façon plus générale, les réseaux d'échanges, qu'ils se fassent avec l'extérieur ou en interne, et qui sont des réseaux d'irrigation, d'alimentation et par là des outils de stabilisation, de maintien de l'objet dans son état au sein de son environnement, présentent cette disposition de transversalité par rapport au milieu interne. On pensera à la morphologie des constructions du monde biologique, à l'intérieur desquelles on peut inclure les constructions sociales : la cité médiévale était entourée de remparts percés de portes, lieux d'ancrage des voies de relation avec le monde extérieur. Cette cité occupe un certain volume dans l'espace ambiant, de sorte qu'on peut la comparer à un cylindre plein assez aplati, lequel peut encore être déformé en une boule D^3 . Une voie d'accès étant représentée par un chemin D^1 , il vient alors que l'espace total à prendre en

considération est de dimension 4. Cette remarque met en évidence le rôle stabilisant spatio-temporel des voies d'alimentation.

Ce dernier terme est employé dans un sens large : est aliment tout ce qui contribue à façonner la morphologie ; le substrat de l'aliment peut alors relever de la substance, de la matière, comme il peut être de nature purement intellectuelle. Chez l'animal dont le corps statique est assimilé à la boule, cette fonction stabilisatrice est principalement remplie par les organes de préhension, plus ou moins filiformes, en position transverse au reste du corps ; par ces organes s'effectuent les mouvements de transport, transports du corps, transports des éléments nutritifs de toute nature : par leur vocation d'assurer la stabilisation spatio-temporelle à travers le mouvement, ils sont, en quelque sorte et pour une part, des incarnations spatiales du temps.

III.4.3 Le principe métaphysique de stabilité

Si le concept de stabilité est ancien, la prise de conscience de son importance n'est que récente. Elle est loin d'être le fait de la communauté intellectuelle dans son intégralité. On pourra sans doute s'étonner qu'un philosophe des sciences aussi reconnu qu'Alfred N. Whitehead (1861-1947), contemporain de Birkhoff, qui travailla avec Bertrand Russell (1872-1970), ignore totalement dans ses ouvrages le concept. Et si Jung faisait figurer « énergie » parmi les concepts archétypes, celui de stabilité lui avait échappé. S'il figure maintenant dans les écrits des philosophes avec lesquels j'ai eu le privilège de correspondre, son importance ne semble pas pourtant être assez reconnue.

« Le *principe métaphysique de stabilité* peut être posé comme l'un des principes constitutifs intrinsèques à tous les objets de la Nature. Je n'existe que parce que je suis stable. Je disparaîs si je suis déstabilisé. Il y a là une tautologie. Le fait encore inexplicable est le principe actif, moteur, associé à la stabilité, le *vouloir* persévérer de chaque objet, comme si chacun d'eux avait une forme de

conscience, de représentation personnelle de son état, au point d'être capable de trouver des parades, de mener des actions et opérer des transformations à des fins défensives, sinon, de manière prévisionnelle, offensives. Ce vouloir persévérer est un fait du monde vivant, du monde cellulaire, que les biologistes observent et dont ils s'efforcent de décrire les stratégies et les moyens. S'il est bien difficile de parler d'une conscience des objets du monde physique, on ne peut que constater que leur manière de réagir tient compte des rapports de forces qui existent entre ces objets, établis entre autres en fonction de leurs propriétés intrinsèques, et qui régissent leur stabilité. Le vivant se distingue du physique par cette capacité de plus en plus affirmée à mettre en œuvre, de façon de plus en plus autonome, des procédures évolutives capables de maintenir les êtres en leur état.

Ce principe de stabilité ne peut se déduire d'aucune théorie mathématique actuelle. Ceux qui veulent voir dans les *mathématiques* l'expression d'un univers d'idées platoniciennes, qui régenteraient *seules* le monde, ont alors une vision de cet univers pour le moins incomplète. Le principe de stabilité est un principe actif, moteur ; les manières diverses dont on l'emploie, au caractère heuristique, reflètent les non moins différentes facettes de son déploiement.

On peut concevoir que, du principe de stabilité, découlerait cette règle générale de dépense minimale qui pèse sur toute évolution, règle qui se présente sous la forme plus générale d'un *critère d'extrémalité*. Si un objet, pour se maintenir en l'état, a besoin d'un apport d'énergie extérieure, il encourra le risque d'être déstabilisé d'autant plus fortement que sa quête d'énergie s'avèrera difficile, et l'une des premières raisons de difficulté qui peut se présenter réside dans la quantité d'énergie dont il a besoin.

Ce type de justification sera sans doute parfois combattu ; il semble inspiré par l'anthropocentrisme et le finalisme, on ne part pas des données du règne physique pour essayer d'inférer des propriétés des règnes suivants, on procède au contraire à l'inverse. Il ne semble pas que cette démarche soit fausse dans la mesure où l'on peut concevoir un règne donné comme un déploiement du règne

qui le précède sur l'échelle temporelle, déploiement qui contribue à mettre à jour les raisons qui font passer d'une étape à la suivante. Le principe de stabilité est bien un principe de nature finaliste qui semble transcendant à tous les objets de la nature. Le contrecarre le fait que l'accroissement de la stabilité de l'un peut nuire à la stabilité de l'autre. De ces oppositions et de la souplesse des structures résulte l'évolution. » [16]

Ce texte résume assez bien quelques-unes des conséquences principales que l'on peut déduire du fait que les objets de la nature possèdent la vocation à rechercher leur propre stabilité. Pour ce faire, non seulement ils s'efforcent de créer des systèmes autonomes de stabilisation, ceux de protection, d'acquisition et de génération étant parmi les plus rudimentaires, mais encore ils acceptent de se fondre partiellement au sein d'entités plus vastes qui contribuent à assurer ces premières fonctions. Boussinesq évoquait un *principe directeur* qui sous-tendrait les activités de l'univers. Il existe peut-être plusieurs de ces principes. Mais celui de la recherche de la stabilité est l'un des plus évidents, en même temps qu'il est très fécond.

Sous une forme encore un peu anthropomorphique, Platon l'a énoncé dans un de ses plus célèbres dialogues, le voici :

Le principe de Platon

Car c'est encore ici, comme précédemment, le même principe d'après lequel la nature mortelle cherche toujours, autant qu'elle le peut, la perpétuité et l'immortalité ; mais elle ne le peut que par la génération.

(Le Banquet, 207 d)

Généralisation du principe de Platon

Plusieurs auteurs du dix-septième siècle ont adhéré à ce principe. Une formulation plus générale qu'en donne Spinoza est célèbre :

« Chaque chose, autant qu'il est en elle, s'efforce de persévérer dans son être »

(**Ethique**, Troisième Partie, Proposition VI)

Spinoza établit quelques conséquences de cette proposition, mais on peut aller vraiment beaucoup plus loin dans les déductions, au point que, pour ma part, je vois, à travers ces citations, l'expression d'un principe fondamental de la nature, principe métaphysique et volontariste s'il en est, selon lequel

TOUT OBJET S'EFFORCE DE CONSERVER SA STABILITÉ SPATIO-
TEMPORELLE.

Chapitre IV

PLATON

UN DES FONDATEURS DE LA DÉMARCHE SCIENTIFIQUE

IV.0 Introduction

Étonnant Platon ! L'objet de ces quelques pages est de montrer la modernité de ce penseur au souffle puissant : nul ne saurait l'ignorer s'il veut accéder au temple de la science.

Il a mis au jour les démarches de l'esprit de celui qui cherche à comprendre, qui accomplit, consciemment ou non.

Il a abordé ou approfondi l'étude de problèmes encore sans solution à nos jours.

Il a dégagé, ou simplement mentionné, des concepts qui se sont révélés fondamentaux pour la compréhension de notre univers, et qui font toujours l'objet d'interrogations et de développements.

On trouvera dans ce texte un premier inventaire de ces apports platoniciens. D'autres regards pourront l'enrichir. Lire Platon est pour moi une joie ; j'ai là un ami avec qui je m'entends à merveille sur bien des points. Les citations sont empruntées aux traductions publiées par les Editions Garnier-Flammarion pour celles en gros caractères ; leurs versions en caractères plus petits proviennent de l'édition qui figure dans la Bibliothèque de la Pléiade publiée par les Editions Gallimard, où la traduction est plus proche du texte original.

Seules des éditions récentes de quelques œuvres de Platon chez Gallimard contiennent des glossaires. Ils sont naturellement établis selon la sensibilité du traducteur à tel ou tel aspect du texte original. Par exemple, les thèmes cités par le traducteur de l'édition récente de **La République**, publiée dans la collection « Folio » de l'éditeur précité, et communs avec les thèmes présents dans ce texte, sont les suivants : « Comparaison, comparer (*eikôn, eikazein, apeikazein*). Compétition, lutte (*agôn*). Conjecturer, se fonder sur les apparences (*doxazien*). Image, figurine, reflet, fantôme (*eidôlon*). Modèles (*paradeigma*). Récit, histoire (*muthos, apologos*).

On pourra comparer cette liste de thèmes avec celle qui transparaît à travers le plan de ce texte, et que voici :

IV.0 Introduction

IV.1 Méthodes pour découvrir la cause et trouver l'explication

IV.1.1 La vocation scientifique de Platon

IV.1.1.1 La recherche de la cause

IV.1.1.2 La recherche de la preuve : la démonstration

IV. 2 Les règles méthodologiques de Platon

IV.2.1 Définir

IV.2.2 Classifier

IV.2.3 Le savant procède par synthèse et analyse, et recherche l'universel

IV.2.4 La méthode hypothétique

IV.2.5 La méthode analogique

IV.2 Quelques concepts apparaissant dans l'œuvre de Platon et occupant une place éminente dans la philosophie naturelle de notre temps

IV.2.1 De la Sensation à l'Empreinte, à la Représentation

IV.2.2 Le Lieu, la Place, le Réceptacle, en d'autres termes : l'Espace

IV.2.3 Le Mouvement

IV.2.4 La Lutte, la Guerre : le Défi

IV.2.5 La Stabilité : le Principe de Platon

IV.2.5.1 *Le principe*

IV.2.5.2 *Finalité et extrémalité*

IV.2.5.3 *Rareté et singularité versus densité*

IV.2.5.4 *Tempérance, démesure, contraire, harmonie : régulation*

IV.2.5.5 *Le changement d'état : l'instant, la bifurcation*

IV.2.6 Platon et la physique théorique

IV.2.7 Le Hasard, la Nécessité, et les antinomies platoniciennes

Ce texte introductif à Platon en tant que scientifique pourra, on l'espère, être utile aux étudiants, mais aussi servir de support à des analyses plus complètes et plus approfondies concernant certes Platon, mais également ses prédécesseurs. Enfin, cette étude se doit d'être enrichie par des exposés sur l'état de la science et des points de vue actuels en rapport avec le contenu de l'œuvre platonicienne, dont on connaît l'étendue : les perspectives de travail laissent rêveur.

La lecture de Platon est particulièrement rafraîchissante. Pas de mot savant, des phrases simples et vivantes, un style alerte, une pensée sans cesse renouvelée, un esprit d'analyse aiguisé, et surtout une étonnante modernité et actualité.

La réflexion centrale de Platon porte sur la résolution du problème de la vie harmonieuse de la cité. Elle aboutit notamment à la rédaction de ces deux traités bien connus : la République et les Lois.

Pour notre philosophe, la recherche de la vérité, de la justice, de la tempérance sont des facteurs essentiels qui favorisent cette vie harmonieuse.

Mais les questions se posent de pouvoir définir ce que sont la vérité, la justice, la tempérance. Platon consacre alors plusieurs travaux à l'étude du langage, à son origine, à sa structure, aux modes de raisonnement, sans toutefois

établir cette première formalisation que sera l'œuvre logique d'Aristote. Son œuvre est émaillée de remarques de fond sur les caractères et les comportements humains : il est un remarquable psychologue. Dans tous ces domaines, Platon fait œuvre de pionnier.

Il s'inscrit dans le droit fil de l'école pythagoricienne qui, en partie, l'a formé. Dépassant le cadre, à travers son organisation, du fonctionnement de la société humaine, Platon essaye de comprendre le mode de formation de l'univers : il exposera sa vision du monde dans le *Timée*.

Inspiré par l'universalité du modèle descriptif mathématique, toute son œuvre fera référence à la géométrie et à la proportion. Ces outils lui servent de guide et dans l'observation et dans la construction de son système, cependant qu'il mentionne ou met en lumière un certain nombre de phénomènes généraux encore non formalisés mais d'une grande pertinence.

La recherche de la compréhension et de l'explication caractérise l'esprit du savant. Ce simple trait suffit à faire reconnaître l'œuvre de Platon comme celle d'un artisan appartenant à cette corporation illustre.

Même s'il se cantonne à une seule discipline, le savant est en quête de méthodes, de représentations, d'explications les plus larges possibles. Il vise à l'universalité. Cet autre trait caractérise également l'œuvre de Platon.

Enfin, analysant l'organisation de la démarche de sa pensée, il dégage des règles méthodologiques de conduite et de travail qui n'ont pas été dépassées.

Cet exposé sera divisé en deux parties principales. Dans la première, on rencontrera Platon avide, comme tout scientifique, de découvrir la cause et de trouver l'explication, élaborant pour ces fins tout un ensemble de règles méthodologiques. La seconde partie se rapporte aux concepts qui apparaissent dans l'œuvre de Platon et dont on a pris conscience du caractère fondamental seulement au cours de l'époque récente.

IV.1 Méthodes pour découvrir la cause et trouver l'explication

IV.1.1 La vocation scientifique de Platon

IV.1.1.1 *La recherche de la cause*

Sa vocation scientifique, Platon l'exprime à de nombreuses reprises. Voici sans doute le mobile le plus fort :

[1] « De plus tu sais également ceci : que pour la masse c'est le plaisir qui semble être le bien, tandis que pour les plus subtils, c'est la compréhension. » (**La République**, Livre VI, 505 b).

Autre traduction : « Mais, bien sûr, voici au moins une chose que tu n'ignores pas, c'est qu'au jugement de la foule, le bien est le plaisir, tandis que pour des gens plus délicats, c'est la pensée. »

C'est dans le **Phédon** (95 – 98) que Platon relate les joies éprouvées par Socrate à rechercher et à découvrir des causes. Mais abordons ici tout de suite les aspects plus techniques de la démarche scientifique.

[2] « De plus, tout ce qui naît procède nécessairement d'une cause ; car il est impossible que quoi que ce soit prenne naissance sans cause. » (**Timée**, 28 a)

Autre traduction : « Or tout ce qui devient, à son tour, c'est par l'action de ce qui le cause que nécessairement il devient ; car rien ne peut, séparé de ce qui le cause, assumer le devenir »

et plus loin,

[3] « Or quiconque a l'amour de l'intelligence et de la science doit nécessairement chercher d'abord les causes qui sont de nature intelligente,

et en second lieu celles qui sont mues par d'autres causes, et qui en meuvent nécessairement d'autres à leur tour. » (**Timée**, 46 d)

Autre traduction « Qui donc est épris d'intelligence et de science, nécessairement mettra les causes qui tiennent à la nature raisonnable au premier rang de ses investigations... »

Ces quelques derniers mots mettent également en exergue la vigueur et la richesse de l'analyse platonicienne. Elle ne s'en tient pas à la recherche de simples causes premières, mais saisit et souligne au contraire l'entrelacs possible des causes multiples. Platon nous fait observer de plus qu'elles agissent de manière dynamique par leur rôle moteur.

Il est amené à considérer plusieurs types de causes. Voici deux citations les concernant, où apparaissent les notions de hasard et de nécessité :

[4] « Il nous faut parler des deux espèces de cause mais traiter à part celles qui agissent avec intelligence et produisent des effets bons et beaux, puis celles qui, destituées de raison, agissent toujours au hasard et sans ordre. » (**Timée**, 46 e)

Autre traduction : « nous devons indiquer, aussi bien l'une que l'autre, les deux espèces de causes, mais en séparant celles qui, pleines d'intelligence, sont ouvrières de beaux et bons effets, et celles qui, isolées de la réflexion, produisent à tout coup leur effet au hasard et sans ordre. »

[5] « C'est pourquoi il faut distinguer deux espèces de causes, l'une nécessaire et l'autre divine ... » (**Timée**, 68 e)

Autre traduction : « Aussi est-il deux espèces de causes qu'il faut bien distinguer : les unes nécessaires, les autres divines... »

IV.1.1.2 *La recherche de la preuve : la démonstration*

Bien sûr, ce n'est pas seulement dans le domaine des sciences spécialisées que joue l'impératif de connaître les causes.

[6] « Elles (les opinions) ont peu de valeur tant qu'on ne les a pas enchaînées par la connaissance raisonnée de leur cause. » (**Ménon**, 98 a)

Autre traduction : « elles ne seront pas extrêmement précieuses, tant qu'on ne les aura pas liées par un raisonnement causal. »

Cet enchaînement conduit à la preuve, qui emporte la conviction :

[7] « Alors Ctésippe prenant la parole : « Au nom de Zeus, Dionysodore, dit-il, donnez-m'en une preuve qui me convaincra que vous dites la vérité. » (**Euthydème**, 294 c)

Autre traduction : « A ce moment, Ctésippe intervint : « Au nom de Zeus ! s'écria-t-il, fournissez-moi, Dionysodore, une preuve démonstrative, de nature à me faire savoir que vous dites vrai ! »

[8] « Il me semble à moi, Socrate, qu'il n'y a pas lieu de rougir de la démonstration qui vient d'être faite » (**Théétète**, 195 d)

Autre traduction : « Ma foi ! c'est bien mon avis, Socrate, qu'elle n'était point vilaine, la démonstration qui en a été maintenant donnée ! »

[9] « Voilà certes une démonstration parfaitement claire » (**Le Sophiste**, 221 c)

Autre traduction : « Hé oui ! Voilà bien ce qui a été mis en lumière de façon pleinement satisfaisante ! »

IV.1.2 Les règles méthodologiques de Platon

À l'heure où Platon écrit, il ne semble pas, en dehors des mathématiques et de la médecine, qu'il y ait encore de thème scientifique ayant fait l'objet d'études assez détaillées et approfondies pour avoir donné naissance à des traités

spécialisés. Les œuvres d'Aristote, d'Euclide, sont postérieures à celles de Platon. Celui-ci accomplit un travail fondateur dans la mesure où il emploie et décrit des procédures de travail qui sont celles de toutes les disciplines, et qui permettent de définir et d'aborder avec pertinence de nouveaux sujets d'étude.

Platon dont la pensée, fluide et nuancée, sait adapter les démarches générales qu'il préconise aux différents thèmes qu'il examine, n'a pas cherché à rassembler en un traité les méthodes de travail qu'il recommande et qui seraient utiles pour l'avancement de la connaissance. Les règles qu'il a énoncées figurent éparses dans son œuvre ; elles apparaissent au moment où il lui paraît nécessaire de le faire pour justifier une démarche ou pour mieux convaincre un auditeur ; il arrive donc souvent que Platon se répète pour se faire entendre d'un public nouveau. Parle-t-il d'ailleurs de lui-même ou du seul Socrate quand il écrit :

[10] « Il parle d'ânes bâtés, de forgerons, de cordonniers, de tanneurs, et il semble qu'il dit toujours les mêmes choses dans les mêmes termes, en sorte qu'il n'est lourdaud ignorant qui ne soit tenté d'en rire ; mais qu'on ouvre ses discours et qu'on pénètre à l'intérieur, on trouvera d'abord qu'ils renferment un sens que n'ont point tous les autres, ensuite qu'ils sont les plus divins et les plus riches en images de vertu, qu'ils ont la plus grande portée ou plutôt qu'ils embrassent tout ce qu'il convient d'avoir devant les yeux pour devenir honnête homme. » (**Le Banquet**, 221 e)

Autre traduction : « de fait, il parle d'ânes bâtés, de forgerons, de cordonniers, de tanneurs : il donne toujours l'impression de dire les mêmes choses sous la même forme, si bien que quiconque est ignorant ou irréfléchi doit tourner ses propos en dérision. Mais, les voit-on s'ouvrir, est-on entré dans leur intérieur, alors on découvrira, premièrement qu'ils sont les seuls à avoir dans le fond quelques intelligence ; ensuite, qu'ils sont tout de qu'il y a de plus divin, qu'ils contiennent en eux le plus grand nombre possible d'images divines de vertu, avec le plus large champ d'application, bien mieux avec tout celui qu'il convient d'avoir en vue quand on se propose de devenir un homme accompli. » ?

Evidemment, toutes les règles méthodologiques qu'il définit et préconise ne sont pas non plus venues à son esprit en une seule fois : Socrate l'a certes influencé, mais aussi les géomètres comme son ami, le mathématicien Théodore.

Il a fallu attendre une vingtaine de siècles avant qu'un autre philosophe ne se tourne vers ces règles. Ce philosophe est Descartes dont le Discours de la Méthode fit grand bruit. Que soit réfutée une part importante de l'originalité de ce texte ne peut faire plaisir ni aux sectateurs ni aux chauvins, on s'en doute. Dans cet ouvrage, Descartes fait preuve d'une certaine paranoïa pendant la période de ses grands travaux : de très grandes capacités intellectuelles certes, mais aussi l'orgueil qu'il en tire, le désir de dominer et d'être admiré, un grand seigneur de l'esprit qui condescend généreusement à donner ses recettes à qui veut l'entendre.

Par sa formation, par sa culture, il dit avoir lu tous les livres du célèbre Collège jésuite où il fit ses études, et par son originalité propre, Descartes était certes préparé à bien lire à Platon et à en tirer le meilleur. Nul doute que sa tournure d'esprit l'ait également enclin à formuler quelques préceptes généraux. Le fait est que la similitude d'expression qu'on rencontre parfois entre les règles de Descartes et celles de Platon est des plus frappantes.

Le Discours de la Méthode a été précédé par la rédaction, une dizaine d'années auparavant, des « Règles pour la direction de l'esprit ». Descartes y recommande la lecture des « auteurs anciens », cite Platon et Aristote, donne deux raisons qui l'ont conduit à produire ce texte : les mathématiciens, dit-il,

« plaçaient juste sous les yeux, pour ainsi dire, beaucoup de vérités, et ils en tiraient des conclusions à partir de certaines autres qui en dérivait ; et pourtant, pourquoi en est-il ainsi, et comment l'avaient-ils trouvé ? »

Plus loin Descartes ajoute :

« par la suite j'en vins à me demander comment donc il se faisait que jadis les créateurs de la philosophie ne voulussent admettre à l'étude de la sagesse personne qui fût ignorant de la mathématique ».

Si l'on reconnaît dans cette dernière phrase la présence de Platon, on la retrouve également dans l'énoncé des premières règles, I à VI en particulier. Plusieurs passages de la suite révèlent l'influence d'Aristote. Les mathématiques servent d'illustration à son propos.

La lecture du Discours de la Méthode fait davantage ressortir le parallélisme entre les préceptes platoniciens et ceux que Descartes avance. Le tableau suivant est extrait de l'ouvrage **De l'intuition à la controverse** [IC] :

Descartes	Platon
Le premier était de ne recevoir jamais aucune chose vraie que je ne la connusse évidemment être pour telle, c'est-à-dire d'éviter soigneusement la précipitation et la prévention, et de ne comprendre rien de plus en mes jugements que ce qui se présenterait si clairement et si distinctement à mon esprit que je n'eusse aucune occasion de la mettre en doute.	[a] C'est donc, en toute entreprise, sur le point de départ qu'on doit toujours porter le plus de réflexion et d'attention afin de s'assurer si le principe posé est juste ou non ; quand il a été bien éprouvé, on voit le reste s'y accommoder. (Cratyle , 436) [a'] J'ai pour principe de n'écouter en moi qu'une seule voix, celle de la raison, qui, à l'examen, me semble la meilleure. (Criton , 46) - [b] Mais le second procédé, Socrate, quel est-il ?
Le second, de diviser chacune des difficultés que j'examinerais en autant de parcelles qu'il se pourrait et qu'il serait requis pour les mieux résoudre .	- Il consiste à diviser à nouveau l'idée suivant ses articulations naturelles, en tâchant de n'y rien tronquer, ... (Phèdre , 265) [b'] Pour commencer cette nouvelle explication de l'univers, il faut pousser nos divisions plus loin ... (Timée , 49) [c] Au lieu de prendre toutes les formes,

La troisième, de conduire par ordre mes pensées, en commençant par les plus simples et les plus aisées à connaître, pour monter peu à peu par degrés jusqu'à la connaissance des plus composés et supposant même de l'ordre entre ceux qui ne se précèdent point naturellement les uns les autres.	dont le plus grand nombre pourrait nous embrouiller, choisissons-en quelques-unes de celles qui passent pour les plus importantes, et voyons d'abord ce qu'est chacune d'elles, puis quel pouvoir elles ont de s'associer les unes aux autres. (Le Sophiste , 254)
Et le dernier, de faire partout des dénombrements si entiers et des revues si générales que je fusse assuré de ne rien omettre.	[d] Il n'est pas possible de donner l'explication scientifique d'une chose avant d'avoir fait l'énumération complète de ses éléments en y ajoutant le jugement vrai (Théétète , 207)

Le Projet	
Tâchant de découvrir la fausseté ou l'incertitude des propositions que j'examinais, non par de faibles conjectures, mais par des raisonnements clairs et assurés, je n'en rencontrais point de si douteuse, que je n'en triasse toujours quelque conclusion assez certaine, quand ce n'eût été que cela même qu'elle ne contenait rien de certain.	Ceux-là mêmes ont jugé que l'âme ne saurait tirer aucune utilité des connaissances qu'on lui donne, jusqu'à ce qu'on la soumette à la critique, qu'en la réfutant on lui fasse honte d'elle-même, qu'on lui ôte les opinions qui font obstacle à l'enseignement, qu'on la purifie ainsi, et qu'on l'amène à reconnaître qu'elle ne sait que ce qu'elle sait et rien de plus. (Le Sophiste , 230)

Il est également d'autres règles pour la conduite de l'esprit qui ont apparemment échappé à Descartes et que Platon a formulées. On va donc reprendre ici l'ensemble des règles énoncées par Platon.

IV.1.2.1 Définir

Tout dialogue fructueux suppose une bonne entente sur le sens des mots. Il est donc naturel de poser en premier lieu les termes de la discussion, d'éclaircir leur signification, ce que Platon énonce en ces termes :

[11] « En toute chose, mon enfant, il n'y a qu'une manière de commencer, quand on veut discuter convenablement : il faut bien comprendre l'objet de la discussion, faute de quoi on est amené à s'égarer complètement. »
(**Phèdre**, 237 b, c)

Autre traduction : « Sur toute question, mon jeune ami, il y a un unique point de départ pour quiconque veut bien en délibérer : c'est, obligatoirement, que nous sachions quel est éventuellement l'objet de la délibération ; sans quoi, nécessairement, tout est manqué.

[12] « C'est d'abord d'embrasser d'une seule vue et de ramener à une seule idée les notions éparses de côté et d'autre, afin d'éclaircir par la définition le sujet qu'on veut traiter. C'est ainsi que tout à l'heure nous avons défini l'amour ; notre définition a pu être bonne ou mauvaise ; en tout cas, elle nous a permis de rendre notre discours clair et cohérent... »(**Phèdre**, 265 d)

Autre traduction : « L'un est, prenant une vue d'ensemble de ce qui est disséminé en une foule d'endroits, de le mener à une essence unique, afin de manifester, par une définition de chacun, l'objet sur lequel, en chaque cas, on voudra donner enseignement. C'est ce que nous fîmes tout à l'heure pour l'amour, et, que notre définition de sa nature fût bien ou mal énoncée, tout au moins la clarté et l'accord avec soi-même ont-ils été, par ce moyen, rendus possibles pour celui qui fait le discours. »

On dit que Speusippe, neveu et disciple de Platon, aurait composé un tout premier ouvrage de *Définitions*. A l'époque de Platon donc, il n'existe pas de dictionnaire – à titre d'exemple, le premier dictionnaire consacré à la langue française ne paraît en France qu'en 1606. D'où ce travail précurseur de Platon consistant à bien définir les termes fondamentaux du discours, ce que, par ailleurs, ne manquent pas de faire aujourd'hui les mathématiciens. Platon aurait-il été également et inconsciemment influencé par les mathématiciens de son époque qui se devaient de définir les termes qu'ils employaient, préparant la venue plus

tardive du traité d'Euclide ? En tout cas, Platon s'inscrit dans la lignée des grands philosophes qui l'ont précédé comme Héraclite et Démocrite, et l'on sait qu'Antisthène, contemporain de Platon, avait écrit un traité en cinq livres intitulé **Sur l'Education et les Noms**.

La question se pose : le dictionnaire est-il complet, est-il suffisant pour assurer la complétude ne serait-ce que formelle de l'intelligibilité du discours ? La réponse est négative, et Platon l'avait déjà fait observer - la remarque valant dans toutes les sciences :

[13] « Mais en fait aucun des éléments premiers ne peut être exprimé par une définition : il ne peut qu'être nommé ; car il n'a pas autre chose qu'un nom. » (**Théétète**, 202 a)

Autre traduction : « Mais la vérité, c'est qu'il est impossible de formuler une quelconque de ces données premières au moyen du langage ; car pour elle rien n'est possible, sinon de la dénommer seulement, puisque sa dénomination est la seule chose qui lui appartienne. »

L'intelligibilité de ces premiers éléments est l'affaire de l'intuition et du consensus. Ces éléments jouent en somme un rôle semblable à celui des axiomes au sein d'une théorie d'énoncés, et que Platon désigne par « principes » (**La République** (Livre VI, 510 c-d, ainsi que 511 b citée en [28])). On n'entend point en général remettre en question ces faits jugés indémontrables, authentiques, sans faille dans leur formulation. Mais ils constituent le talon d'Achille des théories les plus formalisées.

Platon va même plus loin, rappelant d'ailleurs les grands penseurs qui, avant lui et hormis Parménide, ont exprimé ce point de vue qui n'est pas « insignifiant », et selon lequel :

[14] « aucune chose, prise en elle-même, n'est une, qu'il n'y a rien qu'on puisse dénommer ou qualifier de quelque manière avec justesse. » (Théétète, 152 d).

Autre traduction : « il n'y a rien qui soit individuellement lui-même et en lui-même ; rien non plus que tu puisses désigner à bon droit, pas davantage qualifier d'aucune façon que ce soit ».

Compte tenu de l'observation précédente [13], ce point de vue concerne tant les objets concrets qu'abstraits. Si toutefois l'on oublie la remarque préliminaire [13], si aucune ambiguïté ne vient à se glisser dans les définitions subséquentes des objets abstraits, l'observation [14] n'a pas lieu d'être.

En ce qui concerne les objets concrets, Platon nous dit par cette observation [14] que nous ne pouvons pas les connaître dans leur totalité, que nous ne pouvons pas saisir de manière complète et instantanée l'ensemble de leurs propriétés. L'affirmation de Platon est sans nuance, mais on peut se poser la question : existerait-il quand même, de manière exceptionnelle, des objets qui échapperaient à cette règle ? On reviendra plus loin sur cette question. Dans l'immédiat, on adoptera le point de vue selon lequel l'observation [14] concernant les objets concrets est génériquement vraie, c'est-à-dire presque partout et presque toujours vraie.

Il en résulte alors l'impossibilité de représenter ces objets parfaitement si ce n'est convenablement par des modèles abstraits. La critique de ces modèles abstraits, en lesquels certains, par ignorance ou par esprit moutonnier, affichent une confiance aveugle, semble revenir de manière périodique. Déjà, Maxwell soulignait qu'il ne fallait pas prendre la formule pour le fait. A plusieurs reprises dans les années 70, j'ai publié tant chez les mathématiciens que chez les biologistes et les économistes, des articles dénonçant l'amalgame entre réalités et modèles souvent établis et acceptés sans grand examen (cf le second chapitre de [AC]). Les fortes et pertinentes critiques récemment lancées par Benoît

Mandelbrot à l'encontre des modèles probabilistes employés en finance vont dans le même sens. En hydrodynamique, de nombreux physiciens ont fini par abandonner les modèles un peu simplistes étudiés par les mathématiciens et qui remontent à Euler et à Daniel Bernoulli. Quant aux modèles cosmologiques à 10, 11 dimensions ou davantage, leur trop grand nombre finit par faire douter de la pertinence complète de ces constructions. Elles ont peut-être moins d'intérêt philosophique que celle que Platon expose dans le **Timée**. Bien s'assurer de la qualité des fondements des modèles nous était déjà recommandé par notre philosophe : la citation [a] que l'on va rappeler en témoignage.

[a] « C'est donc, en toute entreprise, sur le point de départ qu'on doit toujours porter le plus de réflexion et d'attention afin de s'assurer si le principe posé est juste ou non ; quand il a été bien éprouvé, on voit le reste s'y accommoder ». (**Cratyle**, 436 d)

Autre traduction : « Obligation donc, en toute matière et pour tout homme, de faire porter sur le point de départ le plus gros effort de détermination, le plus gros effort d'examen, en vue de savoir si c'est à bon droit, ou non, qu'on se l'est donné pour principe. Mais, une fois ledit point de départ suffisamment mis à l'épreuve, il y a, par la suite, évidence de tout ce qui découle de ce point de départ. »

IV.1.2.2 *Classifier*

Une des activités premières des hommes de sciences est d'observer et d'établir des classifications. Platon explique pourquoi :

[15] « Voilà, Phèdre, de quoi je suis amoureux, moi : c'est des divisions et des synthèses ; j'y vois le moyen d'apprendre à parler et à penser » (**Phèdre**, 266 b)

Autre traduction : « De ces divisions et de ces rassemblements, Phèdre, je suis, pour mon propre compte, grand amoureux, dans l'intention de me rendre ainsi capable de parler aussi bien que de penser ! »

[16] « Il nous faut donc diviser les sciences comme nous avons fait en examinant le sujet précédent » (**Le Politique**, 258 b)

Autre traduction « N'est-ce pas, par conséquent, à une division des connaissances qu'il faut procéder, comme lorsque, justement, nous examinons le précédent personnage ? »

Ouvrant la voie à ce qui sera une bonne part de l'œuvre d'Aristote, notamment en zoologie, Platon, propose en particulier les classifications en genres et en espèces (**Le Sophiste**, **Le Politique**). Il aura tendance, dans un premier temps, à procéder par dichotomie, en s'inspirant de ce qu'ont fait les mathématiciens, de leur répartition rudimentaire des nombres en nombres pairs et nombres impairs.

[17] « Essayons donc de nouveau, en divisant en deux le genre proposé,... » (**Le Sophiste**, 264 e)

Autre traduction : « Tentons donc à nouveau, fendant en deux le genre que nous avons devant nous ... »

[18] « Diviser par genres et ne pas prendre la même forme pour une autre, ou une autre pour la même, ne dirons-nous pas que c'est le propre de la science dialectique ? » (**Le Sophiste**, 253 d)

Autre traduction : « Diviser selon les genres et ne point juger la même une nature qui est autre, ni une autre celle qui est la même, n'affirmerons-nous pas que cela est du ressort de la connaissance dialectique ? »

Platon met en seconde place cette démarche de la pensée rationnelle qui consiste à essayer de classer les objets. Car une question préalable se pose : que convient-il de diviser, et selon quel ordre, et par quels procédés ? Le contenu des paragraphes qui suivent apportent des réponses partielles à ces questions.

IV.1.2.3 *Le savant procède par synthèse et analyse, et recherche l'universel*

Platon, esprit organisé, alors qu'il abordait un problème nouveau, s'employait d'abord à définir la meilleure stratégie permettant de le résoudre. Aller du connu vers l'inconnu, du simple vers le plus compliqué, du particulier visible au plus général, rechercher l'idée abstraite à travers ses multiples incarnations ou au contraire mettre à jour ces incarnations à partir de la forme idéale, telles sont les formes des démarches premières qu'il préconisait. Il emploie ces procédés par exemple pour éclairer une définition, pour trouver une explication, un mode de composition :

[19] «... il y a deux procédés dont il serait intéressant d'étudier méthodiquement la vertu.

- Phèdre : Lesquels ?

- Socrate : C'est d'abord d'embrasser d'une seule vue et de ramener à une seule idée les notions éparses de côté et d'autre, afin d'éclaircir par la définition le sujet qu'on veut traiter. » (**Phèdre**, 265 d)

Autre traduction : il y a deux procédés, dont l'étude ne serait pas sans profit pour qui serait capable d'en utiliser la nature avec art ... - PHÉ. ; Et quels sont-ils ? – SOCR. : l'un est, prenant une vue d'ensemble de ce qui est déterminé en une foule d'endroits, de le mener à une essence unique, afin de manifester, par une définition de chacun, l'objet sur lequel, en chaque cas, on voudra donner enseignement. »

[20] «Eh bien, veux-tu que nous parlions de ce point-ci dans notre recherche, suivant notre méthode habituelle ? Nous avons en effet l'habitude d'admettre une certaine idée, une seule, qui embrasse chaque groupe des objets multiples auxquels nous donnons le même nom. » (**La République**, Livre X, 596 a).

Autre traduction : « Eh bien donc ! veux-tu que nous donnions ce point de départ à notre recherche d'après la méthode qui nous est coutumière ? Car c'est bien, n'est-ce pas notre coutume, à propos des choses multiples singulières auxquelles nous

attribuons un nom identique, de soutenir qu'il en existe une forme singulière qui est unique ? »

On qualifiera ici de *générique* une telle idée, ainsi que le terme qui la désigne.

Une variante de la démarche de Platon sera particulièrement prisée aux dix-septième et dix-huitième siècles, où l'on s'emploiera à dégager les idées simples à partir desquelles se forment les idées composées. La décomposition d'une fraction rationnelle, qui est un quotient de deux polynômes, en une somme de fractions rationnelles élémentaires appelées « éléments simples », est l'exemple typique de mise en œuvre de cette démarche classique. La notion d'ensemble générateur d'un objet mathématique, apparue deux siècles plus tard, se situe dans la lignée de cette démarche.

[21] « Au lieu de prendre toutes les formes, dont le grand nombre pourrait nous embrouiller, choisissons-en quelques unes de celles qui passent pour les plus importantes, et voyons d'abord ce qu'est chacune d'elles, puis quel pouvoir elles ont de s'associer les unes aux autres. De cette façon, si nous n'arrivons pas à saisir en pleine clarté l'être et le non-être, nous pourrions du moins en donner une explication aussi satisfaisante que le permet cette méthode de recherche ... » (**Le Sophiste**, 254 c)

Autre élément de traduction : « mais, afin de ne pas nous laisser troubler par la foule qu'elles sont, à propos de certaines, préalablement choisies parmi celles auxquelles on donne le plus d'importance ; en considérant, dis-je, de la façon que voici : d'abord, une à une, quelles elles sont ; en second lieu, ce qu'il est en leur pouvoir de communiquer entre elles ; à seule fin, supposé que nous ne soyons pas capables de saisir avec une totale certitude l'Etre et le Non-être, de ne pas venir du moins, pour autant que la méthode suivie dans le présent examen, à ne savoir absolument quoi dire à leur sujet ... »

[22] « Celui qui en est capable discerne une forme unique déployée partout à travers beaucoup de formes dont chacune existe isolément, puis une multitude de formes différentes les unes des autres et enveloppées extérieurement par une forme unique, puis encore une forme unique, déployée à travers de nombreux tous et liée à une unité ; enfin beaucoup de formes entièrement isolées et séparées, et cela, c'est savoir discerner, genre par genre, comment les diverses espèces peuvent ou ne peuvent pas se combiner. » (**Le Sophiste**, 253 d)

Autre traduction : « Or, celui qui est capable de réaliser cela, discerne comme il faut : une nature unique qui s'étend à travers une multiplicité où chaque individu se pose à part, et plusieurs natures, distinctes les unes des autres, enveloppées du dehors par une seule ; puis, cette fois encore, une nature unique, rassemblée en une unité à travers une multiplicité de tels entiers, et une pluralité de natures absolument différenciées, les unes à part des autres. Or, cela aussi bien selon la manière dont les natures peuvent communiquer que selon la manière dont elles ne le peuvent pas, c'est savoir discriminer selon le genre. »

(On rapprochera naturellement cette vision platonicienne tournée vers le fini de celle d'Empédocle d'Agrigente, un siècle environ avant Platon :

*A un moment donné l'Un se forma du multiple
En un autre moment il se divisa
Et de l'Un sortit le multiple.)*

La citation précédente, aussi bien que les trois citations qui vont suivre, révèle à nouveau la tournure d'esprit de Platon, capable d'analyses fouillées pour mieux comprendre le tout :

[23] « - Socrate : Mais crois-tu qu'on puisse connaître suffisamment la nature de l'âme sans connaître la nature universelle ? » (**Phèdre**, 270 c)

Autre traduction : « Or, la nature de l'âme, crois-tu possible d'en avoir une conception méritant qu'on en parle, si c'est indépendamment de la nature du tout ? »

[24] « Pour étudier la nature d'une chose, quelle qu'elle soit, ne faut-il pas s'y prendre de cette manière, c'est-à-dire se demander d'abord si la chose qu'on veut connaître méthodiquement et qu'on veut être capable d'enseigner aux autres est simple ou multiple ; puis, si elle est simple, examiner ses propriétés, comment et sur quoi elle agit, comment et par quoi elle est affectée ; si, au contraire, elle comporte plusieurs espèces, les dénombrer et faire sur chacune le travail qu'on a fait sur la chose simple, voir en quoi elle agit, en quoi et par quoi elle est affectée. » (**Phèdre**, 270 d)

Autre traduction : « N'est-ce pas de la façon que voici que l'on doit se faire une représentation, relative à quelque nature que ce soit ? En premier lieu, est-il simple, ou bien complexe, l'objet relativement auquel nous souhaiterions être nous-mêmes des techniciens, capables aussi de rendre autrui pareil à nous ?... »

[25] « sinon, nous en tiendrons aux principes que nous avons posés, que, si l'on n'a pas fait un dénombrement exact des caractères des auditeurs, si l'on n'a pas divisé les choses en espèces, et si l'on n'est pas capable de ramener chaque idée particulière à une idée générale, on n'atteindra jamais la perfection de l'art oratoire, dans la mesure où elle est accessible à l'homme. » (**Phèdre**, 273 d-e)

Autre traduction : « mais que, s'il n'en est pas ainsi, nous nous en fierons à ce que à ce que nous avons exposé tout à l'heure. Dans le cas, disions-nous, où l'on aura pas fait un dénombrement de diverses natures parmi ceux qui doivent composer l'auditoire, dans le cas où l'on n'est pas capable de diviser les réalités selon leurs espèces et de les embrasser au moyen d'une nature unique selon l'unité de chaque sorte de réalité, dans ce cas, dis-je, jamais il n'y aura, dans la mesure où cela est possible à un homme, de technicien de l'art de parler. »

L'intitulé de ce paragraphe comprend cet élément de phrase : « et recherche l'universel ». Par là, il faut entendre que le savant s'emploie à faire

apparaître, comme le fait Platon, la notion générale qui subsume les expressions particulières, la structure d'ensemble qui définit l'architecture de l'édifice le plus complet possible. Cette recherche de la plus grande généralité a façonné le développement des mathématiques où la généralité des propriétés qui accompagnent l'énoncé d'un théorème fonde la qualité de ce dernier, où la structure est d'autant plus pertinente qu'elle permet de recouvrir un univers plus vaste tout en permettant la révélation des propriétés les plus significatives.

La citation suivante se rapporte davantage à la pédagogie qu'à la découverte, mais l'on sait peut-être que le contenu d'un enseignement est une forme d'ontogenèse de la découverte de ce contenu.

[26] « Mais dans toutes les entreprises qu'on veut mener à bonne fin, c'est une opinion générale et ancienne, qu'il convient de s'entraîner sur des objets moins importants et plus faciles avant de passer aux très grands. »
(**Le Sophiste**, 218 c-d)

Autre traduction : « D'autre part, dans tous les cas où l'on doit, de la belle façon, appliquer son esprit à des objets importants, c'est une opinion accréditée chez tout le monde, et depuis longtemps, que, en ce qui concerne l'étude de tels objets, on doit d'y entraîner sur de menus et plus faciles objets, avant de le faire directement sur ceux qui ont le plus d'importance. »

Notons ici que c'est encore en mathématiques que cette démarche est la plus visible et sans doute la plus fréquemment efficace. Avant même de concevoir le cas général, le mathématicien s'empare du cas qui se présente à lui en premier, qui est singulier, relativement simple dans sa présentation, et auquel on tentera de se ramener dans un premier temps. Si, par exemple, on sait résoudre aisément l'équation $x^2 - a = 0$, on revient à ce cas en pratiquant sur l'équation générale $x^2 + 2bx + c = 0$ le changement de variable $X = x + b$ ou encore $X^2 =$

$x^2 + 2 b x + b^2$, de sorte que générale $x^2 + 2 b x + c = X^2 - (b^2 - c) = 0$ ou $X^2 - a = 0$ avec $a = b^2 - c$.

Voyons maintenant deux grands types de procédures recommandées par Platon pour atteindre ses fins.

IV.1.2.4 *La méthode hypothétique*

A fins de découverte et d'explication, Platon l'emploie bien sûr constamment. On rencontre dans presque tous les dialogues les expressions du genre « je conjecture », ou « faisons l'hypothèse ». Il a trouvé la formulation de sa démarche auprès des mathématiciens, comme il la décrit très précisément dans **La République** (Livre VI, 510 c-d) ou le mentionne brièvement dans le **Ménon** :

[27] « Ce que j'entends par recherche sur hypothèse, c'est le procédé souvent employé par les géomètres. Si on les interroge par exemple sur une surface, pour savoir si telle surface peut s'inscrire comme triangle dans un cercle ... » (**Ménon**, 86 e)

Autre traduction : « Or, voici ce que j'entends par « en partant d'une hypothèse » : c'est un procédé analogue à celui qu'emploient maintes fois les géomètres pour envisager une question comme celle-ci, quand, à propos d'un espace, on leur demande par exemple, si dans le cercle que voici, il est possible d'inscrire l'espace triangulaire que voilà. »

[28] « Cela me paraît forcé, et il est clair, Socrate, d'après notre hypothèse, que, si la vertu est une science, elle peut être enseignée. » (**Ménon**, 89 c)

Autre traduction : « A mon avis, c'est désormais une nécessité ; et il est clair, Socrate ? que, conformément à la méthode hypothétique, la vertu doit être une chose qui s'enseigne, du moment qu'elle est un savoir. »

[29] « par la seconde section de l'intelligible, je veux désigner ce à quoi le discours s'attache par la puissance du dialogue, considérant les hypothèses

non comme des principes mais réellement comme des hypothèses, à savoir des bases pour prendre son élan de façon à parvenir jusqu'au non-hypothétique, au principe du tout ; et s'étant attaché à ce principe, il se tient aux conséquences découlant de ce principe, et redescend ainsi jusqu'à la conclusion, sans du tout faire usage d'aucun élément sensible. » **La République** (Livre VI, 511 b)

Autre traduction : « je parle de l'autre section de l'intelligible, celle qu'atteint le raisonnement tout seul, par la vertu du dialogue, sans employer les hypothèses comme si elles étaient des principes, mais comme ce qu'elles sont en effet, savoir des points d'appui pour s'élancer en avant ; afin que, en allant dans la direction du principe universel jusqu'à ce qui est antihypothétique, le raisonnement, une fois ce principe atteint par lui, s'attachant à suivre tout ce qui suit de ce principe suprême, descende ainsi inversement vers une terminaison, sans recourir à rien absolument qui soit sensible, mais aux natures essentielles toutes seules, en passant par elles pour aller vers elles, et c'est sur des natures essentielles qu'il vient terminer sa démarche. »

IV.1.2.5 *La méthode analogique*

Il est un procédé général mis en avant et presque systématiquement utilisé par Platon et le monde scientifique, mais qui n'a pas été repris par Descartes. Bien qu'il ne l'ait pas érigé en règle, Platon procède par observation de ressemblances, démarche que nous qualifierons ici d'analogique. Le terme analogie est ici pris dans un sens générique. Sous sa forme opératoire, l'emploi de l'analogie conduit à l'énoncé du « principe de correspondance » chez les physiciens ; il consiste souvent à procéder par analogie avec le cas de la mécanique classique ; plus récemment, chez les physiciens théoriciens et chez les mathématiciens, ce même principe se traduit par la création de « dictionnaires » : le même type de propriété se retrouve sous des noms différents au sein de théories apparemment également différentes

Le recours à la ressemblance sous toutes ses formes sert d'outil à Platon tant pour l'enseignement, l'explication, l'illustration, que pour la recherche et

l'établissement des causes. C'est dans ce but que, par exemple et fréquemment, il fait référence aux dieux. Le chien de garde, le loup, le gardien, le berger, le cocher, le pilote, le capitaine, le général, le guerrier, le laboureur, le cuisinier, le médecin, le gymnaste, le peintre, le charpentier, le tanneur, le cordonnier et le tisserand sont quelques-uns des éléments de comparaison souvent utilisés.

Mais chacun sait que les analogies sont plus ou moins fortes, plus ou moins bien fondées. Platon en a parfaitement conscience qui met en garde son lecteur :

[30] « Si l'on ne veut pas se tromper, il faut avant tout se tenir en garde contre les ressemblances, car c'est un genre très glissant » (**Le Sophiste**, 231 a).

Autre traduction : « Or, pour notre sécurité, ce qui est par-dessus tout nécessaire, c'est de montrer bonne garde autour des ressemblances, car il n'y a pas de genres qui soit plus propre à nous faire glisser. »

Platon n'a pas entrepris de classer et d'analyser les types de ressemblances auxquels il fait appel. Ces « ressemblances » prennent la forme de « proportions », de « similitudes », de « simulacres », de « comparaisons », d'« images », d'« ombres », de « fantômes », de « modèles », de « fables », de « mythes », d'« allégories », de « représentations ». Pour comprendre lui-même, pour faire comprendre, il est pédagogue, Platon utilise de manière constante ces diverses formes de ressemblance. Notons que des ouvrages ont été consacrés à la présentation des mythes chez notre philosophe. Voici un bref échantillon de citations où figurent les termes précédents.

«(la) *proportion*(*pythagoricienne*) »

[31] « tu oublies que l'égalité géométrique est toute puissante chez les dieux comme chez les hommes » (**Gorgias**, 508 a)

Autre traduction : « il t'a échappé au contraire que l'égalité géométrique possède un grand pouvoir chez les Dieux aussi bien que chez les hommes. »

[32] « je te dirai dans le langage des géomètres (peut-être alors me comprendras-tu mieux) que ce que la toilette est à la gymnastique, la cuisine l'est à la médecine, ou plutôt ce que la toilette est à la gymnastique, la sophistique l'est à la législation, et ce que la cuisine est à la médecine, la rhétorique l'est à la justice. » (**Gorgias**, 465 b-c)

Autre traduction : « je suis prêt à te dire cela à la manière des géomètres (peut-être, de cet instant, suivras-tu mieux en effet) : ce que les pratiques de la parure sont à la gymnastique, cela, la cuisine l'est à la médecine ; ou, de cette façon plutôt, ce que les pratiques de la parure sont à la gymnastique, cela, la cuisine l'est à la médecine, cela, le savoir-faire oratoire l'est à l'art judiciaire. »

[33] « L'image est au modèle comme l'opinion est à l'objet de la connaissance » (**La République**, Livre VI, 510 a)

Autre traduction : « Ce que l'opposable est au connaissable, la chose faite en ressemblance le serait çà ce dont elle a la ressemblance »

[34] « quatre attitudes suivantes dans l'âme : l'intelligence à celle qui le plus en haut, la pensée à la seconde, à la troisième attribue la conviction, et à la dernière la faculté de se fonder sur les ressemblances, et ordonne-les de façon proportionnée, en considérant que plus ce à quoi elles s'appliquent participe de la vérité, plus elles participent de la clarté. » (**La République** livre VI, 511 d-e)

Autre traduction : « Admets en outre qu'à mes quatre sections corresponde l'existence, dans l'âme, de quatre états : « intellection » pour la section supérieure ; « discursion » pour la seconde ; à la troisième attribue le nom de « créance », et à la dernière, celui de « simulation ». Ordonne-les ensuite suivant une proportion, en te disant que le degré de possibilité, pour les sections, de participer à la vérité est le même que, pour les états correspondants de l'âme de participer à la certitude »

[35] « Il suffira donc, dis-je, comme auparavant, de nommer la première section « savoir », la deuxième « pensée », la troisième « conviction », et « faculté de se fonder sur les ressemblances » la quatrième ; de nommer

ces deux dernières prises ensemble « opinion », et les deux premières ensemble « intelligence », et de dire que l'opinion vise le devenir, tandis que l'intelligence vise ce qui est, l'essence ; ce que l'essence est par rapport au devenir, l'intelligence l'est par rapport à l'opinion, et ce que l'intelligence est par rapport à l'opinion, le savoir l'est par rapport à la conviction, et la pensée par rapport à la faculté de se fonder sur les ressemblances ; et quant aux rapports proportionnels entre les choses auxquelles ces capacités se rapportent ... » (**La République** (Livre VII, 533^e - 534 a))

Autre traduction : « Il suffira donc, repris-je, ainsi qu'on l'a fait tout d'abord, de donner le nom de « science » à la première section, à la seconde celui de « discursion », à la troisième celui de « créance », celui de « simulation », à la quatrième ; ces deux dernières sections, ensemble, je les nomme « opinion », les deux premières, ensemble, « intellection » ; de dire que l'opinion se rapporte à ce qui devient, l'intellection à ce qui est ; que le rapport de l'être au devenir est le même que de l'intellection à l'opinion, et le rapport de l'intellection à l'opinion, le même que le rapport de la science à la confiance et de la discursion à la simulation. Pour ce qui est de la proportion existant entre les objets auxquels ces noms sont appliqués ... »

« *comparaison* »

[36] « N'en demeure pas là,, reprends au moins la comparaison avec le soleil... » (**République**, Livre VI 509 c)

Autre traduction : « En tout cas, dit-il, ne t'interromps pas du tout, ou, si tu le fais en quelque point, que pourtant en revanche ce ne soit point dans l'exposé de la comparaison relative au soleil, ... »

[37] « Pour louer Socrate, Messieurs, je procéderai par comparaison » (**Le Banquet**, 215 a),

Autre traduction : « Or, messeigneurs, cet éloge de Socrate, voici comment je m'y prendrai pour le faire : en recourant à des images. »

« *image* », « *ombre* », « *fantôme* », « *représentation* », « *copie* », « *simulacre* »

[38] « Allons, je vais te proposer une autre image, qui vient de la même école » (**Gorgias**, 493 d) ?

Autre traduction : « Voyons donc ! Je vais t'exposer une autre comparaison, qui procède des mêmes pratiques que celle d'à présent. »

[39] « J'appelle images en premier lieu les ombres, ensuite les fantômes représentés dans les du même genre. » (**République**, Livre VI, 509 e – 510 a)

Autre traduction : « par copies, j'entends premièrement, les ombres portées, en second lieu les images réfléchies sur la surface de l'eau ou sur celle de tous les corps qui sont à la fois compacts, lisses et lumineux, avec tout ce qui est constitué de même sorte. »

[40] « Maintenant, repris-je, il faut, mon cher Glaucon, appliquer exactement cette image ce que nous avons dit plus haut : il faut assimiler le monde visible au séjour de la prison » (**République**, Livre VII, 517 a - b)

Autre traduction : « Cette image, mon cher Glaucon, il faut l'appliquer toute entière à ce que nous avons dit auparavant, en assimilant au séjour dans la prison la région qui se présente à nous par l'entremise de la vue, et, d'autre part, la lumière du feu à l'intérieur de la prison à l'action du soleil... »

[41] « Voilà donc les deux espèces de fabrication des images dont je parlais, l'art de la copie et l'art du simulacre. » (**Le Sophiste**, 236 c)

Autre traduction : « Voilà donc les deux espèces que je disais exister dans l'art de produire des simulacres : art de la simulation et un art de l'apparence illusoire. »

« *mythe* », « *fable* »

[42] « Eh bien, ce lieu de l'âme, un homme subtil, Sicilien ou Italien, je crois, qui exprime la chose sous la forme d'un mythe, en a modifié le nom. » (**Gorgias**, 493 a)

Autre traduction : « C'est ce dont un homme ingénieux, un Sicilien peut-être ou un Italique, a fait, dit-on, une fable, dans laquelle, donnant au mot un croc-en-jambe, il a appelé « un tonneau, *pithos* », cette partie de l'âme, à cause de sa disposition à se laisser persuader ... »

[43] « Ecoute donc, comme on dit, une fort belle histoire, dont tu penseras, je crois, que c'est un mythe, ... » (**Gorgias**, 523 a)

Autre traduction : « Ecoute donc, comme on dit, une belle histoire. Toi, tu estimeras, j'en suis convaincu, que c'est une fable ... »

[44] « en nous rappelant que moi qui vous parle et vous qui jugez nous ne sommes que des hommes et que sur un tel sujet il convient d'accepter le mythe vraisemblable, sans rien chercher au delà. » (**Timée** 28)

« modèles »

Les références au modèle sont très nombreuses, en particulier dans le **Timée**, comme celle-ci :

[45] « Lors donc que l'ouvrier, l'œil toujours fixé sur l'être immuable, travaille d'après un tel modèle ... » (**Timée**, 28 a)

Autre traduction : « Dans ces conditions, toute œuvre dont l'ouvrier aura son regard fixé sur ce qui se conserve toujours identique, utilisant un tel objet pour modèle, ... »

« imitation », « simulation »

[46] « Le nom est donc, semble-t-il, une imitation vocale de l'objet imité, et qui imite par la voix nomme ce qu'il imite ? » (**Cratyle**, 423 b)

Autre traduction : « Un nom, c'est donc, à ce qu'il semble, une imitation, par le moyen de la voix, de la chose même qu'imité l'imitateur, et cet imitateur vocal dénomme chaque fois qu'il imite. »

[47] « Ce que nous disons tous, tant que nous sommes, est forcément, n'est-ce pas, une imitation, une image. » (**Critias**, 107 b)

Autre traduction : « Il est en effet certain que ce qui est dit par nous tous doit en quelque façon se produire sous la forme d'une imitation ou d'une figuration par images. »

[48] « Il y a en outre au moins un point, sur lequel tout le monde se mettrait d'accord au sujet de la musique, c'est que toute composition musicale est une imitation, une simulation. » (**Lois**, 668 c)

« *analogue* »

[49] « Pour ce qui est du savoir et de la vérité, de la même façon que sur l'autre plan il était correct de considérer lumière et vision comme analogues au soleil, mais incorrect de penser qu'elles étaient le soleil, de même sur ce plan-ci il est correct de les considérer tous deux, savoir et vérité, comme analogues au bien, mais incorrect de penser que les deux soient le bien ; il faut accorder encore plus de valeur au mode d'être du bien. » (**La République**, Livre VI 508 e-509 a).

Autre traduction : « Savoir et réalité, d'autre part, sont analogues à ce qu'étaient, dans l'autre cas, lumière et vue : s'il était correct de les tenir pour apparentés au soleil, admettre qu'ils soient le soleil lui-même manquait de correction ; de même, ici encore, ce qui est correct, c'est que savoir et réalité soient, l'un et l'autre, tenus pour apparentés au Bien ; ce qui ne l'est pas, c'est d'admettre que n'importe quel des deux soit le Bien lui-même ; la condition du Bien a droit au contraire d'être honorée à un plus haut rang. »

IV.2 Quelques concepts apparaissant dans l'œuvre de Platon et occupant une place éminente dans la philosophie naturelle de notre temps

Au fil de mes relectures ou lectures de Platon, je me suis rendu compte que la plupart des éléments de philosophie naturelle que j'avais exposés dans la

première partie d'un ouvrage intitulé **Topologie et Perception** [TP] étaient présents, au moins en germe, dans l'œuvre platonicienne. Ainsi, certains termes et concepts utilisés par Platon, de manière épisodique ou parfois plus fréquente, ont-ils acquis une position essentielle dans le panthéon des idées actuelles, à partir desquelles nous nous efforçons de d'acquérir une compréhension meilleure de nous-mêmes comme de la totalité de notre environnement. Ces termes et ces concepts vont être repris ici, et quelque peu commentés.

Les données fondamentales sont d'abord pour moi l'espace, son mode de structuration évolutif, accouplé au fait que chaque objet contenu dans cet espace tend à évoluer pour se maintenir dans son état ou en améliorer les qualités, en d'autres termes pour assurer sa stabilité spatio-temporelle. Du fait de ces évolutions, les objets ont tendance à entrer en conflit les uns avec les autres de manière très diverse : ils évoluent donc pour se doter des moyens leur permettant de surmonter les nombreux défis auxquels ils sont constamment confrontés.

C'est donc sur ces données premières et sur leurs conséquences que nous allons interroger Platon. Mais auparavant, il convient de rappeler l'essentiel de la manière et des moyens par lesquels nous appréhendons le monde.

IV.2.1 De la Sensation à l'Empreinte, à la Représentation

Un objet donné ne peut se prémunir contre les activités dangereuses d'un autre s'il ne perçoit pas ces activités. L'évolution naturelle s'est donc accomplie dans le sens du développement des capacités à percevoir et à analyser les multiples aspects de l'environnement de l'objet.

Dans la hiérarchie des dangers, le risque de choc aveugle est le plus élémentaire. Tel celui résultant de la chute du marteau sur le bois, le choc a en général pour effet de laisser une marque sur l'objet atteint : quand l'identité de celui-ci n'est pas détruite, cette marque constitue un souvenir, le premier élément

de mémoire de l'accident. Il résulte de la déformation d'abord superficielle puis interne de l'objet.

L'arrivée de l'objet « hostile » est précédée par des modifications locales de l'entourage de cet objet, des mouvements donc que sont les modifications de pression, de gradients lumineux, thermiques, chimiques, Au cours de l'évolution, tout un ensemble de systèmes détecteurs de ces mouvements s'est progressivement mis en place. Les placodes sensorielles que l'on rencontre dans l'embryologie animale témoignent partiellement du passé de cette évolution.

Les sensations reçues par les divers systèmes de détection qui furent créés permettaient d'induire des comportement de protection, dont l'immobilisme puis le repli sur soi sont parmi les premiers. Parallèlement, il s'établit progressivement, au sein de domaines de plus en plus intégrateur et d'une enveloppe de mieux en mieux protégée, les dessins futuristes représentent l'homme casqué, une mise en commun des significations contenues dans ces sensations spécifiques.

Ce sont des éléments de ce schéma évolutionniste qui sont en germe dans ces propos de Platon :

[50] « il y a des chances, dis-je, que comme les yeux sont attachés à l'astronomie (« l'astronomie, qui concerne le mouvement de ce qui a de la profondeur. » cf la citation [58]), de même les oreilles soient attachées au mouvement harmonique, et que ces connaissances soient sœurs l'une de l'autre, comme l'affirment à la fois les Pythagoriciens, et nous, Glaucon, qui les approuvons. » (**La République**, Livre VII, 530 d).

Autre traduction : « Il y a chance, dis-je, que, tout comme, par rapport à l'astronomie, l'une a fixé le regard, de même ce sont les oreilles qui ont été fixées par rapport au mouvement harmonique ; chance aussi qu'il y ait là deux sciences, sœurs l'une de l'autre, ainsi que le disent les Pythagoriciens, ainsi que nous-mêmes, Glaucon, nous en convenons ; »

[51] « Quand la cire qu'on a dans l'âme est profonde, abondante, lisse et pétrie comme il faut, et que les objets qui viennent par les sens se gravent dans ce cœur de l'âme, comme l'appelle Homère par allusion à sa ressemblance avec la cire, alors les empreintes qu'elles y laissent sont pures, suffisamment profondes et durent longtemps, et les hommes qui ont de telles âmes ont d'abord de la facilité à apprendre, puis de la mémoire, et enfin, ils ne confondent pas les empreintes de leurs sensations avec le jugement vrai. » (**Théétète**, 194 c – d).

Autre traduction : « Ces deux choses, maintenant, ont en ceci, assure-t-on, leur source : quand, dans l'âme de quelqu'un, la cire forme une masse profonde, abondante, unie, préparée comme il faut, alors ce qui pénètre dans cette âme par le moyen des perceptions, ayant empreint son signalement sur ce « cœur » de l'âme, pour employer le terme par lequel Homère en exprime énigmatiquement la ressemblance avec la cire, donne lieu à des signalements qui ont de la netteté, qui, doués d'une suffisante profondeur, sont aussi de très longue durée ; de plus, les hommes qui sont ainsi faits ont tout d'abord de la facilité à apprendre, ils ont en second lieu une bonne mémoire, enfin ils ne permettent pas au signalement, laissé par la perception antérieure, de passer à côté de la perception actuelle ; mais au contraire ils jugent vrai. »

Sans aucun doute, la forme plongée dans la cire ne peut être confondue avec l'objet réel dont elle est l'image. C'est ce clou que Platon s'efforce d'implanter dans l'esprit de chacun : l'activité primordiale de la pensée est de représenter, et *nous ne travaillons mentalement que sur des représentations*. Pour faire passer son message avec le plus de vigueur et d'imprégnation, Platon a créé la célèbre allégorie de la caverne qu'il convient de placer ici :

[52] « Voici des hommes dans une habitation souterraine en forme de grotte, qui a son entrée en longueur, ouvrant à la lumière du jour l'ensemble de la grotte ; il y sont depuis leur enfance, les jambes et les nuques pris dans des liens qui les obligent à rester sur place et à ne regarder que vers l'avant, incapables qu'ils sont, à cause du lien, de tourner la tête ;

leur parvient la lumière d'un feu qui brûle en haut et au loin, derrière eux ; et entre le feu et les hommes enchaînés, une route dans la hauteur, le long de laquelle voici qu'un muret a été élevé, de la même façon que les démonstrateurs de marionnettes disposent de cloisons qui les séparent des gens ; c'est par dessus qu'ils montrent leurs merveilles. - Je vois, dit-il. - Vois aussi, le long de ce muret, des hommes qui portent des objets fabriqués de tout sorte qui dépassent du muret, des statues d'hommes et d'autres êtres vivants, façonnés en pierre, en bois, et en toutes matières ; parmi ces porteurs, comme il est normal, les uns parlent, d'autres se taisent. - C'est une image étrange que tu décris là, dit-il, et d'étranges prisonniers.

- Semblables à nous, dis-je. Pour commencer, en effet, crois-tu que de tels hommes auraient pu voir quoi que ce soit d'autre, d'eux-mêmes et les uns des autres, que les ombres qui, sous l'effet du feu, se projettent sur les parois de la grotte en face d'eux ? » (**La République**, Livre VII, 514 – 515 a).

Autre traduction : « Représente-toi donc des hommes qui vivent dans une sorte de demeure souterraine en forme de caverne, possédant, tout le long de la caverne, une entrée qui s'ouvre largement du côté du jour ; à l'intérieur de cette demeure, ils sont, depuis leur enfance, enchaînés par les jambes et par le cou, en sortent qu'ils restent à la même place, ne voient que ce qui est avant d'eux, incapables d'autre part, en raison de la chaîne qui tient leur tête, de tourner circulairement. Quant à la lumière, elle vient d'un feu qui brûle en arrière d'eux, vers le haut et loin. Or, entre ce feu et les prisonniers, imagine la montée d'un route, en travers de laquelle il faut te représenter qu'on a élevé un petit mur qui la barre, pareil à la cloison que les montreurs de marionnettes placent devant les hommes qui manœuvrent celles-ci et au dessus de laquelle ils présentent ces marionnettes aux regards du public.- Je vois ! dit-il – Alors, le long de ce petit mur, vois des hommes qui portent, dépassant le mur, toutes sortes d'objets fabriqués, des statues, ou encore des animaux en pierre, en bois, façonnés en toute sorte de matière ; de ceux qui le longent en les portant, il y en a,

vraisemblablement, qui parlent, il y en a qui se taisent. – Tu fais là, dit-il une étrange description et tes prisonniers sont étranges !

- C'est à nous qu'ils sont pareils ! repartis-je. Peux-tu croire en effet que des hommes dans leur situation, d'abord, aient eu d'eux-mêmes et les uns des autres aucune vision, hormis celle des ombres que le feu fait projeter sur la paroi de la caverne qui leur fait face ? »

Les représentations qui s'effectuent dans notre cerveau sont le résultat de processus dynamiques. C'est donc en fait une *simulation* des objets qui est réalisée, et la qualité de leur mémoire est définie par celle de la *stabilité* de ces processus.

Les différents sens sont affectés à la détection de mouvements locaux spécifiques. Les aires associatives assurent une intégration coordonnée des informations glanées par les sens, et participent à la mise en place des comportements de protection. Pour tous les animaux capables de percevoir des sons, s'établit à l'inverse un dispositif d'émission de sons associé à cette mise en place. Au niveau d'intégration le plus élevé, ce dispositif est lui-même simulé. Le fait d'être conscient chez l'homme est associé à un parler intérieur, ce dont Platon fait déjà mention ; le conscient est ainsi caractérisé par l'écoute intérieure d'émissions vocales simulées accompagnant une activité de simulation.

Pour cette raison, il est justifié de penser que nombre d'animaux possèdent des rudiments de conscience, d'autant plus importants que sont grandes leurs capacités d'écoute et vocale, et que sont étendues leurs possibilités de simulation interne. Cela dit, il n'est pas exclu que des formes de conscience de nature différente de la nôtre aient pu voir le jour, établies à partir de systèmes sensoriels autrement distribués.

Le cri fait partie des émissions vocales primaires pouvant notifier un danger majeur. Pauvre mais efficace, cette représentation de l'objet source du danger est une sorte de *symbole vocal*.

[53] « Ce que nous disons tous, tant que nous sommes, est forcément, n'est-ce pas, une imitation, une image. »(**Critias**, 107 b)

Autre traduction : « Il est en effet certain que tout ce qui est dit par nous tous doit en quelque façon se produire sous la forme d'une imitation ou d'une figuration par images. »

La fabrication de *symboles*, lumineux, sonores, matériels est la conséquence de cette activité première, en amont, l'activité sensori-motrice de simulation, c'est-à-dire de représentation, symboles destinés à la protection, via leur analyse et via leur communication.

IV.2.2 Le Lieu, la Place, le Réceptacle, en d'autres termes : l'Espace

Écoutons d'abord Platon :

[54] « Enfin il y a toujours une troisième espèce, celle du lieu, qui n'admet pas de destruction et qui fournit une place à tous les objets qui naissent. Elle n'est elle-même perceptible que par un raisonnement bâtarde où n'entre pas la sensation ; c'est à peine si on peut y croire. Nous l'entrevoions comme dans un songe, en nous disant qu'il faut nécessairement que tout ce qui est soit quelque part dans un lieu déterminé, occupe une certaine place, et que ce qui n'est ni sur la terre ni en quelque lieu du ciel n'est rien. » (**Timée**, 52 a - b)

Autre traduction : « troisièmement, encore un genre d'être, celui de la place indéfiniment ; il ne peut subir la destruction, mais il fournit un siège à toutes choses qui ont devenir, lui-même étant saisissable, en dehors de toute sensation, au moyen d'une sorte de raisonnement bâtarde ; à peine entre-t-il en la créance ; c'est lui précisément aussi qui nous fait rêver quand nous l'apercevons, et affirmer comme une nécessité que tout ce qui doit être quelque part, en un lieu déterminé, et occuper quelque place et que ce qui n'est ni sur terre, ni quelque part dans le ciel, n'est absolument pas. »

[55] « Nous n'avons pas alors distingué de troisième espèce, ces deux-là semblant nous suffire. Mais, à présent, la suite du discours semble nous contraindre à tenter de mettre en lumière par des paroles une espèce difficile et obscure. Quelle propriété naturelle faut-il lui attribuer ? Celle-ci avant tout : elle est le réceptacle et pour ainsi dire la nourrice de tout ce qui naît. » (**Timée**, 49 a)

Autre traduction : « De troisième, alors, nous n'avons point distingué, estimant que ces deux-là étaient suffisants ; mais maintenant, la suite du discours semble nous conduire de force devant une sorte d'être difficile et obscure, qu'il nous faut entreprendre d'élucider par nos paroles. Quelle propriété donc faut-il admettre qu'elle possède de sa nature ? Avant tout, celle que voici : de tout devenir, c'est elle le réceptacle, et comme la nourrice. »

[56] « Il faut dire la même chose de la nature qui reçoit tous les corps : il faut toujours lui donner le même nom ; car elle ne sort jamais de son propre caractère : elle reçoit toujours toutes choses sans se revêtir jamais en aucune façon une seule forme semblable à aucune de celles qui entrent en elle. Sa nature est d'être une matrice pour toutes choses ; elle est mise en mouvement et découpée en figures par ce qui entre en elle, et c'est ce qui la fait paraître tantôt sous une forme, tantôt sous une autre. ... Mais si nous disons que c'est une espèce invisible et sans forme qui reçoit tout et participe de l'intelligible d'une manière fort obscure et très difficile à comprendre, nous ne mentirons pas. » (**Timée**, 50 b –c, 51a)

Autre traduction : « Le même discours précisément s'applique aussi à la nature qui reçoit tous les corps. C'est du même nom qu'il la faut toujours appeler, car de sa vertu propre point du tout elle ne désiste ; elle reçoit en effet toutes choses, et, de forme semblable à aucune de celles qui y entrent, jamais elle ne s'approprie aucune, sous aucun rapport, en aucune manière. .. mais en déclarant que c'est une sorte d'être invisible et amorphe, qui reçoit tout, qui participe cependant d'une façon très embarrassante de l'intelligible et se laisse difficilement saisir, nous ne nous tromperons pas. »

Quelle est la nature de l'espace est une question de fond parmi les plus importantes, elle est magistralement introduite par Platon. Einstein, en se réfugiant un moment dans la géométrie, a éludé la question : elle est lancinante. Je vois dans la recherche de la compréhension et de la maîtrise de l'espace l'une des finalités probables de l'évolution naturelle. L'humanité est l'un des vecteurs importants de cette évolution. La compréhension et la conquête de l'espace, tant vers l'infiniment petit que vers l'infiniment grand, ont toujours fait l'objet d'interrogations et de recherches de la part des esprits tournés vers la technique et vers la science. Les procédés et les moyens d'exploration et de représentation de l'espace n'ont cessé de s'accroître, tant de la part des savants que d'ailleurs des artistes [PE], dont les préoccupations et les techniques évoluent concomitamment avec celles du monde scientifique, dont les œuvres portent la marque des sociétés dans lesquelles ils créent.

Du temps de Platon, l'outil scientifique symbolique de représentation de l'espace était à peine en gestation. Seule l'étude de l'espace euclidien plan avait été entreprise ; dénommée « géométrie » par Platon et ses collègues, elle sera pratiquement achevée par l'école d'Alexandrie. Mais voyons ce qu'il en est de la représentation de l'espace tridimensionnel, dans le sens moderne du terme mathématique de dimension.

[57] « Après la surface, dis-je, nous avons pris le solide déjà en mouvement, avant de le prendre tel qu'il est en lui-même ; or ce qui est correct, c'est après le passage à la deuxième dimension, de prendre à la suite le passage à la troisième. C'est à savoir, n'est-ce pas, ce qui concerne le passage à la dimension des cubes, et les objets qui participent de la profondeur .» (**La République**, Livre VII, 528 a – b)

Autre traduction : « En ce que, répondis-je, après les surfaces, nous avons pris des solides qui déjà accomplissent une révolution, avant d'avoir pris le solide lui-même, dans son essence de solide. Mais il est correct qu'après la deuxième dimension,

on prenne la troisième à la suite. Or, c'est celle-ci qui, je pense, concerne les dimensions du cube et de ce qui participe à la profondeur. »

[58] « Tu as donc posé la géométrie comme ce qui s'occupe de la surface. – Oui, dis-je. – Ensuite, dit-il, tu as placé après elle en premier lieu l'astronomie ; et plus tard tu es revenu en arrière. – En effet, dis-je, en me hâtant de tout parcourir trop rapidement, j'ai plutôt perdu du temps. A la suite vient en effet l'investigation concernant le passage à la profondeur ; parce que, sous l'angle de la recherche, elle est dans un état ridicule, je l'ai passée et après la géométrie, j'ai cité l'astronomie, qui concerne le mouvement de ce qui a de la profondeur. – Tu rapportes cela exactement, dit-il. – Posons donc, dis-je, l'astronomie comme quatrième enseignement, avec l'espoir que celui qu'à présent nous laissons de côté existera, pourvu qu'un jour une cité s'en occupe. » (**La République**, Livre VII, 528 d –e).

Autre traduction : « Sous le nom de géométrie, c'est bien la théorie des surfaces que tu instituais. – Oui, répliquai-je. – Ensuite, dit-il, c'est bien l'astronomie que tu as fait succéder à cette théorie ; mais, après, tu es revenu en arrière. – C'est que, répartis-je, dans mon zèle à passer rapidement tout en revue, je me retarde plutôt ! Ce qui faisait suite en effet, c'était le cours sur la dimension en profondeur, et, comme je l'avais sauté parce que la méthode en est risible pour la recherche, je me suis mis à parler de l'astronomie, qui est la profondeur en translation. – Tu as raison de le dire, fit-il. – Allons ! repris-je, donnons donc à l'astronomie la quatrième place dans notre programme d'études, avec la pensée que, le jour où l'État se mettra à chercher l'espèce de géométrie, laissée maintenant par moi de côté, celle-ci aura une existence indépendante. »

Il est peu probable qu'on doive prendre dans son sens mathématique actuel le terme « dimension » qui apparaît dans ces traductions car ce n'est qu'au XIX^{ème} siècle que sera définie la notion de dimension topologique d'un espace. Cela dit, le propos de Platon nous révèle, si toutefois nous les ignorions, ses qualités de mathématicien par l'intuition dont il fait preuve, la direction de recherche qu'il

encourage. Si les Pythagoriciens avaient ébauché l'étude des corps solides, il revient aux mathématiciens contemporains de Platon d'avoir développé cette étude de manière très importante avec la découverte des solides platoniciens. La résolution du problème de Délos, celui de la duplication du cube par Archytas de Tarente, est un tour de force mathématique ; la solution d' Archytas, par l'intersection d'un cylindre et d'un tore, témoigne de connaissances géométriques plutôt avancées.

Rappelons ici la difficulté de l'esprit humain à établir des propriétés géométriques dans le simple espace usuel à trois dimensions : voir par exemple de manière exacte et complète les intersections de deux corps solides dépasse souvent nos capacités naturelles pour peu que les formes de ces corps soient un peu étoffées ; l'enseignement de la « géométrie dans l'espace » reste tardif et peu développé. Quant aux objets de dimension quatre, il a fallu attendre le siècle dernier pour qu'on en aborde l'étude.

Les avis sur l'authenticité de l'**Épinomis** sont partagés ; de par son contenu scientifique parfois en avance sur les connaissances au temps de Platon, je fais partie des sceptiques. Il n'en reste pas moins que certains passages de ce texte intriguent. Voici le suivant (990 d – e) dans les traductions données par l'édition des « belles lettres » d'une part et en premier lieu, de la Pléiade d'autre part :

« En effet, tous les nombres ne sont pas par nature comparables les uns aux autres, mais la possibilité de la comparaison devient manifeste quand on les traduit en surfaces : merveille qui n'est pas humaine, mais, si elle se réalise, divine, ainsi qu'il apparaît à qui peut le comprendre. Viennent ensuite les nombres élevés à la troisième puissance et rendus homogènes à la nature du solide, ou bien sans rapport entre eux, mais entre lesquels un nouvel art, pareil au précédent, établit des rapports : ceux qui l'ont découvert par hasard l'ont appelé stéréométrie. »

Autre traduction : « Or, ce qui est immédiatement consécutif à cette étude est ce à quoi les gens donnent le nom de « géométrie » [*mesure de la terre*] : une sorte de science qui est apparue dans tout son éclat dès que, entre des nombres qui cependant ne sont pas semblables les uns aux autres, une assimilation a été opérée du fait qu'on les a rapportés à ce qui est le lot propre des surfaces : une merveille qui, à coup sûr, n'aurait pu humainement se produire, mais qui, s'étant réalisée, manifeste son caractère divin à l'homme capable de la concevoir ! A la suite de cette assimilation, il y a celle qui a trait aux nombres qui sont trois fois accrus, c'est-à-dire semblables à la nature du solide. Or, si cette fois encore, les nombres sont dissemblables entre eux, c'est par une autre science qu'ils seront assimilés, par celle qui a reçu des hommes qui ont réussi à la découvrir, le nom de « stéréométrie ».

Serait-il possible que trois nombres x , y et z soient dissemblables parce que x désignerait une longueur, y une largeur, z une profondeur ? Le texte laisserait alors entendre l'intuition par son auteur de la représentation moderne d'un espace bidimensionnel par des couples (x, y) , et tridimensionnel par des triplets (x, y, z) . Il est intéressant par ailleurs de mettre en parallèle la phylogénèse de la perception de l'espace avec le déroulement du contenu des enseignements mathématiques. C'est bien avec la longueur uni-dimensionnelle que se familiarisent d'abord les enfants, avant d'aborder l'étude de la géométrie plane, et plus tard de la géométrie dans l'espace usuel. Dans la phylogénèse, les apparitions d'un premier pigment visuel sensible au rouge-orange et d'un premier canal semi-circulaire renvoient à la perception d'un espace uni-dimensionnel, en l'occurrence celui de la verticale. Ce n'est que plus tard qu'apparaissent des pigments sensibles au bleu-vert et un second canal semi-circulaire, de sorte que s'élabore la perception d'un espace bi-dimensionnel vertical-horizontal, celui du plan de symétrie du corps : de ces faits, les poissons par exemple ne pourraient avoir conçu la notion d'espace à trois dimensions.

Si l'on prolonge la réflexion dans cette voie, on peut se demander pourquoi nous sommes limités à une perception de l'espace à un nombre si faible de

dimensions, à supposer que l'espace originel puisse se différencier plus que nous ne l'observons.

La représentation du temps par une quatrième dimension, telle que l'ont conçue les physiciens théoriciens, n'est-elle qu'un simple artifice ? Le fait est que le temps mathématique, un nombre pur, n'est pas chargé de connotation physique, alors que les considérations de thermodynamique lui attribuent une seule direction d'évolution. Quoiqu'il en soit, cette dimension est en germe dans le discours platonicien :

[59] « Quoiqu'il en soit, le temps est né avec le ciel, afin que, nés ensemble, ils soient aussi dissous ensemble, s'ils doivent jamais être dissous, et il a été fait sur le modèle de la nature éternelle, afin de lui ressembler dans toute la mesure du possible. » (**Timée**, 38 b)

Autre traduction : « Le Temps, donc, est né avec le Ciel, afin que, engendrés ensemble, ensemble aussi ils soient dissous, si jamais dissolution doit leur advenir ; et il a été fait sur le modèle de la nature éternelle, afin d'y être au plus haut point ressemblant, dans la mesure du possible. »

Mais retournons à Platon avant de revenir sur les questions concernant la nature de l'espace et ses représentations.

IV.2.3 Le Mouvement

Si le mouvement occupe une place éminente dans la pensée des philosophes antiques, son analyse, sa représentation restent à l'état embryonnaire.

[60] « rien n'est un, ni déterminé, ni qualifié de quelque façon que ce soit et que c'est de la translation, du mouvement et de leur mélange réciproque que se forment toutes les choses que nous disons exister, nous servant d'une expression impropre, puisque rien n'est jamais et que tout devient

toujours. Tous les sages, l'un après l'autre, à l'exception de Parménide, sont d'accord sur ce point : Protagoras, Héraclite et Empédocle, et parmi les poètes, les plus éminents en chaque genre de poésie, dans la comédie Epicharme, dans la tragédie Homère. Quand celui-ci énonce: « *L'Océan est l'origine des dieux et Téthys est leur mère* », il dit que tout est le produit du flux et du mouvement. » (**Théétète**, 152 d - e)

Autre traduction : « c'est, dit-on, qu'il n'y a rien qui soit individuellement lui-même et en lui-même ; rien non plus que tu puisses désigner à bon droit, pas davantage qualifier d'aucune façon que ce soit ; que, au contraire, si tu attribues la qualité de grand à un objet, c'est, aussi bien, petit qu'il t'apparaîtra, et léger si tu le qualifies de lourd ; et ainsi de tout sans exception, attendu qu'il n'y a pas d'existence individuelle, pas d'existence, ni d'un être, ni d'une qualification quelconque de cet être ; mais c'est de la translation, du mouvement, du mélange réciproque que résulte tout ce que nous disons qu'il « est » : ce qui est une désignation incorrecte, car rien n'« est » jamais, mais « devient » toujours. Laissons là-dessus s'accorder, à l'exception de Parménide, tous les doctes à la queue leu leu : Protagoras aussi bien qu'Héraclite et Empédocle, et, dans chacun des deux genres de poésie, les poètes les plus éminents, Épicharme dans la comédie, dans la tragédie Homère, lui qui a dit : *Océan, origine des Dieux et Téthys, leur mère* ..., faisant ainsi de toutes choses une progéniture de l'écoulement et du mouvement. »

[61] «et il y a deux espèces de mouvement, dont chacune est infinie en nombre ; l'une d'elles a une force active, l'autre une force passive.» (**Théétète**, 156 a)

Autre traduction : « mais qu'il y a deux espèces de mouvement, comportant l'une comme l'autre une multiplicité infinie ; dont l'une a pour fonction d'agir, et l'autre de pâtir. »

[62] « Je compte deux espèces de mouvements : l'altération et la translation. » (**Théétète**, 181 d)

Autre traduction : « Voilà donc les deux espèces que je distingue dans le mouvement : celle-ci est altération, l'autre est translation .»

Les lignes qui suivent ne manquent pas de profondeur ; bien traduire ces propos de Platon dans le langage symbolique des mathématiques reste à faire.

[63] « il faut encore dire ceci : c'est que le mouvement ne consentira jamais à se trouver dans ce qui est homogène. Car il est difficile, ou, pour mieux dire, impossible qu'il y ait une chose mue sans moteur ou un moteur sans une chose mue. Il n'y a pas mouvement quand ces deux choses manquent, et il est impossible qu'elles soient jamais homogènes. Plaçons donc toujours le repos dans ce qui est homogène et le mouvement dans ce qui est hétérogène. Et la cause de ce qui hétérogène est l'inégalité. »
(**Timée**, 57 d – e)

Autre traduction : « mais il y faut ajouter encore cette remarque : dans l'uniformité jamais ne saurait le mouvement s'établir. Qu'une chose, en effet, soit mue sans une autre pour la mouvoir, ou qu'une chose donne le mouvement sans une autre pour le recevoir, voilà qui est difficile, ou plutôt impossible, et ne saurait être ; de mouvement, il n'en est point en l'absence d'une telle dualité ; or, que celle-ci dans l'uniformité jamais se rencontre, c'est impossible. Ainsi donc, le repos a sa condition dans l'uniformité, le mouvement dans la non-uniformité ; posons cela sans exception. Or sa cause, c'est dans l'inégalité que la trouve à son tour la nature non uniforme ; »

Avec les questions portant sur le statut de l'instant, sur la nature du repos opposée à celle du mouvement, sur le statut de la partie opposée à celle du tout, nous parvenons au cœur de la pensée et des contradictions platoniciennes. Les **Phédon**, **Théétète**, **Sophiste** et autre **Parménide** traitent des apories rencontrées par notre illustre philosophe. Il les résout, soit en s'en remettant à la divinité, aux dieux, auxquels il ne croit guère, mais dont la reconnaissance par la Cité lui paraît nécessaire pour le bon maintien de celle-ci, soit, comme il le relate dans le **Phédon** (100), en forgeant dans son esprit un univers idéal et immuable d'idées (« *un Beau, un Bon, ... un Grand* »), de principes, de modèles, auxquels le monde sensible est censé se référer. Du point de vue psychologique et pratique, il ne fait

que suivre cette démarche si fréquente de l'esprit humain qui, depuis l'enfance, pour résoudre un problème, quel qu'il soit, qui le dépasse et qui le perturbe très profondément, construit un monde symbolique rassurant d'un réalisme partiel et utile, en lequel il peut trouver refuge et sur lequel il s'appuie pour établir une cohérence entre les manifestations contradictoires et parfois douloureuses de la réalité.

Cette création symbolique n'a pas à mes yeux un caractère immuable. Ses défauts ont pour origine notre difficulté à percevoir et à comprendre le réel dans son tréfonds. Que nous n'y parvenions jamais est l'hypothèse en laquelle il est raisonnable de croire, et qui me fait sourire : car l'humanité pourra connaître encore longtemps ces moments de satisfaction et parfois de joie qu'apportent les découvertes de faits et d'explications. D'autres peuvent penser que le but que l'on vient d'esquisser sera un jour atteint : l'humanité, ou ce que celle serait devenue, connaîtrait alors la béatitude présente dans le Nirvâna silencieux d'un monde en surface immobile.

Comme l'a compris Platon, le mouvement provient de l'hétérogénéité. Provient-il toujours de la seule hétérogénéité est une question qui n'a pas semblé effleurer l'esprit de Platon, et à laquelle on ne saurait encore répondre. Cette hétérogénéité peut apparaître de bien des façons. Elle est de toute façon inhérente à l'inégalité présente entre tous les objets de la nature. L'égalité n'existe que dans l'univers idéal des mathématiciens, mais non point dans le monde concret ; il se trouvera toujours quelque micro, nano, femto, atto ou autre de quelque partie ou caractère qui fera la différence entre deux tels objets. Prenez un pays riche dont l'économie est au potentiel A, supérieur à celui B d'un autre pays, pauvre celui-ci : vous y verrez des agents économiques tenter de se mouvoir de B vers A, et inversement.

Sur les mouvements, on relèvera la distinction faite par Platon entre translation et altération. Celle-ci se rapporte aux modifications de l'objet indépendamment de sa position, alors que le terme « translation » se rapporte au

déplacement spatial. Aristote distinguera la translation proprement dite, un déplacement rectiligne, du mouvement circulaire. La translation est un déplacement « ouvert », au contraire de la rotation qui est un mouvement « fermé ». Un théorème de Liouville, énoncé au XIX^{ème} siècle, affirme que tout mouvement dans l'espace usuel est la combinaison de translations et de rotations. On peut l'étendre aux espaces de dimension plus élevée.

Quelle que soit l'origine des mouvements, ils ont tendance à induire des rencontres entre les domaines spatiaux occupés par les objets, ce qu'en général ceux-ci n'apprécient guère.

IV.2.4 La Lutte, la Guerre : le Défi

Les deux traités platoniciens consacrés à l'organisation de la cité, **La République** et **Les lois** (par exemple 625) ne manquent pas de rappeler la finalité de cette organisation : sauvegarder la cité face à l'agression, d'origine interne ou provenant de l'extérieur.

[64] « Ne disons encore rien, repris-je, de la question de savoir si c'est du mal ou du bien que cause la guerre, mais seulement ceci : nous avons découvert l'origine de la guerre dans ce qui, lorsqu'il y naît, est la source principale des maux des cités, maux privés aussi bien que publics. » (**La République**, 373 e)

Autre traduction : « Abstenons-nous encore, il est vrai, repris-je, d'examiner si c'est du mal ou si c'est du bien que produit la guerre ; bornons-nous plutôt, pour autant, à dire que la guerre, à son tour, nous en avons découvert l'origine dans ce qui est, quand il se produit, la principale source des maux, privés ou publics, dont souffrent les sociétés humaines. »

[65] « Puisque, en effet, nous sommes convenus entre nous que l'univers est plein d'une foule de bonnes choses, mais aussi plein de choses qui en sont le contraire ; que, d'autre part, celles qui ne sont pas dans ce dernier cas étant le plus grand nombre, dès

lors la lutte dont il s'agit est, nous l'affirmons, impérissable et exige qu'on soit prodigieusement sur ses gardes ; » (**Les Lois**, 906 a)

La « guerre » comme donnée du monde naturel fait partie des convictions partagées par le monde antique. Héraclite l'avait énoncée dans cet aphorisme célèbre :

« la guerre et le père et le roi de toutes choses ».

Naturellement, nul ne prendra le terme à la lettre. Toutes les formes de rivalité, à tous les degrés, sont partie intégrante de ce que désigne ce nom générique, la « guerre ». Relèvent par exemple de cette appellation les joutes oratoires et intellectuelles, auxquelles, au Moyen Âge, lettrés et savants participaient dans les cours princières : le jeu consistait d'abord à lancer des défis. On pourra alors substituer à celui de « guerre » cet autre terme, celui de « défi », à connotation moins agressive. L'historien britannique des civilisations, Arnold Toynbee, l'a d'ailleurs largement employé. Toute guerre en effet est ressentie par les objets en conflit par comme une tentative réciproque de déstabilisation, à laquelle ils doivent faire face : chacun jette à l'autre en quelque sorte un défi qu'il se doit de relever, s'il ne veut pas connaître une forme d'amputation plus ou moins mortelle.

La « guerre » trouve son origine d'une part dans le mouvement qui débouche sur l'interpénétration des réceptacles dans lesquels sont plongés les objets, comme il vient d'être dit à la fin du paragraphe précédent, mais aussi, d'autre part, dans ce comportement qui est le propre de tous les objets, et qui relève du paragraphe suivant.

IV.2.5 La Stabilité : le Principe de Platon

IIV.2.5.1 *Le principe*

Le terme de stabilité est également un terme générique qui participe d'un même « principe » pour utiliser ce mot platonicien. La stabilité revêt en effet plusieurs degrés et plusieurs formes, tous liés à la conservation, à la permanence de l'objet auquel elle se rapporte.

Voici quelques exemples de situations pour lesquelles Platon emploie le terme.

[66] « les paroles ont une parenté naturelle avec les choses qu'elles expriment. Expriment-elles ce qui est stable, fixe et visible à l'aide de l'intelligence, elles sont stables et fixes, et autant qu'il est possible et qu'il appartient à des paroles d'être irréfutables et invincibles, elles ne doivent rien laisser à désirer à cet égard. » (**Timée**, 29 b)

Autre traduction : « les propos étant les interprètes d'objets déterminés, ils ont avec ces objets mêmes aussi une parenté ; dès lors, ceux qui expriment ce qui est immuable et stable et transparent pour l'intellect sont immuables et inébranlables ; pour autant qu'il se peut et qu'il convient à des propos d'être irréfutables et invincibles, ils n'y doivent rien manquer ; »

[67] « Ne disons pas non plus que ceci est de l'eau, mais ce qui a toujours cette qualité, et ne parlons jamais d'aucun de ces éléments comme ayant de la stabilité ... » (**Timée**, 49 d)

Autre traduction : « ce que sans cesse nous voyions devenir tel puis tel, soit du feu, ce n'est pas *cela*, mais ce tel qu'il faut en chaque cas singulier appeler feu, ni appeler eau cela, mais *ce tel* toujours, ni n'en désigner jamais aucun autre comme s'il avait de la stabilité »

[68] « Donnons à la terre la forme cubique, car des quatre espèces la terre est la plus difficile à mouvoir et le plus tenace des corps, et ces qualités-là sont celles que doit particulièrement posséder le corps qui a les bases les plus stables. Or dans les triangles que nous avons supposés à l'origine, la base formée par des côtés égaux est naturellement plus stable que celle qui est formée de côtés inégaux, et des deux figures planes composées par les

deux triangles, le tétragone équilatéral est nécessairement une base plus stable, soit dans ses parties, soit dans sa totalité, que le triangle équilatéral. » (**Timée**, 55 d – e)

Autre traduction : « A la terre précisément, attribuons la forme cubique ; le plus immuable, en effet, des quatre genres, c'est la terre et, des corps, le plus plastique ; or, ces propriétés appartiennent principalement, c'est une nécessité, à celui qui a les bases les mieux assises. Or, en fait de base, parmi les triangles pris à l'origine pour hypothèses, ceux qui ont les côtés égaux en fournissent une naturellement mieux assise que ceux qui ont les côtés inégaux ; et, des deux surfaces équilatérales constitués à partir de chacun d'eux, le carré et le triangle, la première, dans ses parties et dans son ensemble, est plus stable nécessairement comme base. »

[69] « L'autre espèce, composée d'éléments plus grands et uniformes, est plus stable que la première et elle est pesante et compacte du fait de son homogénéité. » (**Timée**, 58 d – e)

Autre traduction : « Le genre au contraire qui est constitué de corpuscules gros et réguliers est plus stable que le premier ; »

[70] « Dès lors, comment pourrions avoir la moindre connaissance fixe sur des choses qui n'ont aucune espèce de fixité ? ... Donc aucune intelligence ou science ne possède la vérité parfaite ... Que la fixité, la pureté, la vérité et ce que nous appelons l'essence sans mélange se rencontrent dans les choses qui sont toujours dans le même état, sans changement ni alliage, ensuite dans les choses qui s'en rapprochent le plus, et que tout le reste doit être tenue pour secondaire et inférieur. » (**Philèbe**, 59 b – c)

Autre traduction : « Mais comment, quand il s'agit de ce qui ne possède pas la moindre stabilité, comment, eu égard à cela, pourrait-il se produire en nous quoi que ce fût de stable ? ... Ce ne sont donc point là des objets pour l'intelligence, non plus que pour une connaissance possédant la vérité absolue ... Ce sera ce qui est stable, ce qui est pur, ce qui est vrai, ce qu'enfin nous disons de bon aloi, il ne nous est possible

de le trouver que dans le domaine des objets dont j'ai parlé, dans ce qui, toujours immuable dans son identité, est au plus degré pur de tout mélange ; ou bien que c'est ce qui est au plus haut point apparenté à ces objets. Quant à tout le reste, il y a lieu de dire que ce sont choses de second rang et qui viennent après. » »

71] « Les a-t-on enchaînées, elles deviennent d'abord sciences, puis stables » (**Ménon**, 98 a)

Autre traduction : « Mais une fois qu'elles ont été ainsi liées, elles deviennent, en premier lieu, du savoir et, en second lieu, elles ont de la stabilité. »

[72] « te semble-t-il que ce qui est identique à soi-même et dans le même état relativement au même objet eût jamais existé sans la stabilité ? » (**Le Sophiste** 249 c)

Autre traduction : « Est-ce que, à ton avis, la conservation des mêmes rapports, l'immutabilité intrinsèque en relation avec le même objet, pourraient jamais exister à part de la stabilité ? »

[73] « Car c'est encore ici, comme précédemment, le même principe d'après lequel la nature mortelle cherche toujours, autant qu'elle le peut, la perpétuité et l'immortalité ; mais elle ne le peut que par la génération. » (**Le Banquet**, 207 d)

Autre traduction : « Dans ce cas, en effet, en vertu du même raisonnement que tout à l'heure, la nature mortelle cherche, dans la mesure où elle le peut, à se donner perpétuité, immortalité. Or, elle peut seulement par ce moyen, la génération, ... »

Par le contenu de ces quelques citations, on aurait pu en donner d'autres, on voit que Platon dégage le concept de stabilité : on ne le trouve aucunement exprimé avec la même présence, généralité et intensité dans les textes, ou ce qui nous en reste, de ses prédécesseurs. Ici, stabilité est essentiellement associé à fixité, immuabilité, immutabilité, perpétuité. Il n'en reste pas moins que le terme

est relatif à une moindre rigidité que ceux que l'on vient de recenser, une souplesse qui permet bien des nuances dans son emploi, dans son applicabilité.

Les deux dernières citations méritent une attention particulière. Ces citations, la [72] en particulier, montrent que Platon semble ériger le concept de stabilité en principe fondamental d'une absolue généralité. La citation suivante, [73], semble ne concerner que l'homme, mais l'on sait que Platon a une vision globale de l'univers,

[74] « Ainsi, à raisonner suivant la vraisemblance, il faut dire que ce monde, qui est un animal, véritablement doué d'une âme et d'une intelligence, a été formé par la providence d'un dieu. » (**Timée**, 31)

Autre traduction : « Ainsi donc, suivant un raisonnement vraisemblable, il faut dire que ce monde, vivant doué d'une âme et d'intelligence, c'est par la providence du Dieu qu'il est devenu. »

et l'homme est à l'image de cet univers. Par conséquent, on ne déformera pas le fonds de la pensée de Platon remplaçant dans la citation [73], homme par objet, et immortalité par stabilité.

Reprenons ici la conclusion du chapitre précédent :

« tout objet s'efforce de conserver sa stabilité spatio-temporelle ».

Ne paraît-il pas juste de rendre hommage à Platon en nommant de son nom ce principe essentiel, dont les applications sont immenses ?

À cette notion de stabilité, s'attache un cortège de notions, également présentes chez Platon, et que nous allons maintenant découvrir.

IV.2.5.2 *Finalité et extrémalité*

Le principe précédent exprime une finalité propre à tous les objets dont les modalités de réalisation sont à mettre au jour. Platon rappelle l'importance d'une telle finalité.

[75] « N'est-il pas juste de dire au contraire que tout zèle dispensé en pareil cas ne va point aux objets qu'on cherche à se procurer en vue d'autre chose, mais à celui en vue duquel on se procure tous les autres ? Bien que nous disions souvent que nous faisons cas de l'or et de l'argent, nous n'en disons pas moins une chose fausse ; en réalité, ce que nous plaçons au dessus de tout dans notre estime, c'est ce qui nous apparaît comme la fin en vue de laquelle nous recherchons de l'or et tous les biens que nous poursuivons. » (**Lysis**, 219 e)

Autre traduction : « Dans toute préoccupation de cette sorte, ce n'est pas de ces choses-là qu'on se préoccupe, de celles que l'on s'arrange en vue de quelque fin, mais bien de cette fin, en vue de laquelle sont arrangées toutes les choses de ce genre-là. Je ne nie pas que nous parlions maintes fois du cas extrême que nous faisons de l'or et de l'argent ; mais prenons garde que, d'être souvent répétée, l'assertion n'en soit pas pour cela plus vraie ! Ce que nous mettons au dessus de tout, c'est bien plutôt cette fin, quelle que puisse être la forme sous laquelle elle se présente, en vue de laquelle on s'arrange à posséder de l'or, aussi bien que tout ce qu'encore on s'arrange à avoir ! »

Cette finalité, qui se confond souvent de manière explicite avec l'utilité, est constamment présent dans l'œuvre de Platon, qu'il s'agisse de reconstruire l'animal ou de bâtir la cité.

Dans les situations régies par les lois de la physique classique, et qui sont sous l'emprise du champ gravifique ou de champs électromagnétiques, les états stables correspondent à des extrémums des potentiels locaux. Les représentations dans le langage mathématique des propriétés de ce monde physique, et d'une notion de stabilité adaptée, s'accordent avec cette réalité. Par un phénomène d'induction, d'une sorte de propagation et de reproduction, d'une sorte de mimétisme, les règles de comportements des objets les plus récents tendent à s'aligner sur celles des objets les plus anciens, à la stabilité éprouvée. Ce sont des positions, des états présentant des propriétés d'*extrémalité* qui seront recherchés (cf, par exemple, le paragraphe 2.4 de l'ouvrage **Sur la nature des**

mathématiques [NM]). Platon ne cesse d'encourager à les trouver. La citation suivante résume sans doute toutes celles qui vont dans le même sens.

[76] « S'il en est ainsi, me dis-je, l'esprit ordonnateur dispose tout et place chaque objet de la façon la meilleure. Si donc on veut découvrir la cause qui fait que chaque chose naît, périt ou existe, il faut trouver quelle est pour elle la meilleure manière d'exister ou de supporter ou de faire quoi que ce soit. En vertu de ce raisonnement, l'homme n'a pas autre chose à examiner, dans ce qui se rapporte à lui et dans tout le reste, que ce qui est le meilleur et le plus parfait, avec quoi il connaîtra nécessairement aussi le pire, car les deux choses relèvent de la même science. » (**Phédon**, 97 b – c)

Autre traduction : « S'il en est ainsi, pensais-je, l'esprit coordonnateur ordonne toutes choses et dispose chacune de la meilleur manière possible ; si donc on souhaitait, pour chaque chose, découvrir à quelle condition elle naît, périt ou existe, alors ce qu'à son sujet il était nécessaire de découvrir, c'est quelle est pour cette chose la meilleure manière possible, soit d'exister, soit de subir ou de produire n'importe quelle action ; dès lors, partant de cette conception, ce qu'il convenait le mieux à l'homme d'envisager, tant en ce qui le concerne lui-même personnellement qu'en ce qui concerne les autres choses, ce n'est rien d'autre que le parfait et ce qui vaut le mieux ; le même homme, c'est forcé, connaîtra aussi le pire, car c'est une même science qui leur relative. »

IV.2.5.3 *Rareté et singularité versus densité*

Les situations et phénomènes extrêmes, *singuliers*, semblent rares, l'observation peut paraître banale. Platon la relate, dans toute sa généralité d'une part, et en donne une illustration à laquelle est sans doute attachée bien des souvenirs.

[77] « N'as-tu pas remarqué qu'en tout cela les extrêmes sont rares et peu nombreux et que les entre-deux abondent et sont en grand nombre ? » (**Phédon**, 90 a)

Autre traduction : « N’as-tu point observé que dans toutes les qualités du même genre les points culminants des extrêmes opposés sont rares et peu nombreux, tandis que les termes moyens ne manquent pas et surabondent ? »

[78] « N’est-il pas clair que, lorsqu’un tel homme entre en rapport avec les hommes, il n’a aucune connaissance de l’humanité ; car s’il en avait quelque connaissance, en traitant avec eux, il aurait jugé les choses comme elles sont, c’est-à-dire que les gens tout à fait bons et les gens tout à fait méchants sont en petit nombre les uns et les autres, et ceux qui tiennent le milieu en très grand nombre. » (**Phédon**, 89 e – 90 a)

Autre traduction : « et n’est-il pas clair que l’individu ainsi fait entreprenait d’user des hommes sans posséder de compétence au sujet des choses humaines ? Si en effet, je suppose, il en avait usé, étant compétent quant à la façon dont se comportent ces choses, ceux qui le sont tout à fait sont en petit nombre, les uns comme les autres, tandis que la majorité, ce sont ceux qui sont dans la moyenne. »

Les mathématiciens, à la recherche de la plus large vérité de leurs énoncés, ont naturellement été amenés à préciser l’étendue de validité des faits et des propriétés qu’ils présentaient.

Prenez la simple équation $x^2 - a = 0$ où a est un nombre réel non négatif ; une telle équation a presque toujours deux racines distinctes ; dans le cas « singulier », rare, où a est nul, les deux racines sont confondues (en l’occurrence elles sont également nulles). L’existence de racines distinctes pour l’équation proposée est par contre un phénomène *dense*, vrai pour presque toute valeur non négative de a . Un autre exemple, géométrique, qui a connu un grand succès, est celui-ci qui se généralise aisément : prenez dans l’espace usuel un plan, et une droite qui n’est pas dans le plan et le coupe en un point P, par exemple coloré en noir ; puis un point A, rouge, différent de P sur la droite, puis deux points B, bleu, et C, vert, différents de P dans le plan. Le trièdre de sommet P, et qui s’appuie sur les points A, B et C, constitue un repère pour l’espace usuel. On peut faire bouger

la droite, appelée une transversale au plan, de toutes les façons possibles, sauf à la placer toute entière dans le plan, et on obtiendra toujours un bon repère pour notre espace usuel. Pour cette propriété d'engendrer un bon repère pour notre espace, les transversales forment donc un ensemble *dense* dans l'ensemble constitué de toutes les droites passant par P et qui sont situées, ou non, dans le plan donné.

Ce qui n'est pas dense est rare, et ce qui est rare est en général singulier.

Et pour conclure ce paragraphe sur un point d'histoire qui figure dans une note de l'édition de **La République** dans l'édition Folio et qui réjouira le mathématicien: « le terme « dense » (*puknos*) était fréquemment employé par les théoriciens de la musique comme Aristoxène de Tarente et Théon de Smyrne. Il y aurait densité quand les intervalles entre les notes seraient faibles au point d'être inaudibles. »

IV.2.5.4 *Tempérance, démesure, contraire, harmonie : régulation*

En dehors des phénomènes naturels qui présentent dans leur constitution des caractères de stabilité intrinsèques, tous les objets, pour persister, se doivent d'être munis de systèmes internes qui régissent, régulent, c'est-à-dire maintiennent à l'intérieur de limites convenables, les propriétés de leurs diverses parties. Sans aucun doute, depuis des temps immémoriaux, sait-on que la tempérance s'oppose à la démesure destructrice (**Gorgias**, 490 – 491, **La République**, 430 – 432, **Les Lois**, 636, 696).

Chaque fois qu'il se penche sur la constitution de la cité et sur la formation du citoyen, Platon ne manque pas de rappeler ces données premières, ces concepts dont la généralité s'étend à tous les objets de la nature, comme l'avaient déjà envisagée les prédécesseurs de Platon : « *Ils ne comprennent pas comment ce qui lutte avec soi-même peut s'accorder : mouvements en sens contraire, comme pour l'arc et la lyre.* » notait Héraclite, ou encore, selon une autre version :

« *Tout, en se divisant, se réunit ; comme l'harmonie de l'archet et de la lyre.* »

[79] « C'est peut-être ce qu'Héraclite voulait dire, bien qu'il ne soit pas bien expliqué, quand il affirmait que l'unité s'opposant à elle-même produit l'accord, comme l'harmonie de l'arc et de la lyre. C'est une grande absurdité de dire que l'harmonie est une opposition ou qu'elle se forme d'éléments qui restent opposés ; mais peut-être voulait-il dire qu'elle est formée d'éléments auparavant opposés, l'aigu et le grave, mis en accord par ensuite par l'art musical. » (**Le Banquet**, 187 a – b)

Autre traduction : « ainsi, probablement, que veut aussi le faire entendre Héraclite, en dépit de la forme défectueuse dans laquelle il s'exprime : l'unité, dit-il, *se compose en s'opposant elle-même à elle-même, tout comme l'accord de l'arc et de la lyre.* Or il est d'une complète inconséquence de dire qu'un accord est une opposition, ou qu'il est constitué par des oppositions qui n'ont pas disparu. Ce que sans doute il voulait dire cependant, c'est que, d'une opposition antérieure de l'aigu et du grave, puis de leur conciliation, ultérieure, l'art musical fait un accord ; »

C'est dans le **Phédon** (de 92 à 105), dans une longue dissertation comportant des digressions variées, que Platon conçoit l'harmonie en soi, examine quelques aspects de son incarnation dans les contraires. Il faudra attendre le développement des techniques modernes d'observation et de représentation pour parvenir à tirer profit de la présence et de l'analyse approfondie de ces « contraires ».

Les réalisations mécanistes modernes de l'«harmonie» et de la «tempérance» remontent au régulateur de Watt (1788) et, par exemple, au système électrique oscillant dont le comportement est décrit par les équations de Liénard-Van der Pol.

Dans ces systèmes physiques, les influences réciproques des données et de leurs « contraires », dépendantes des caractéristiques du support, font l'objet de

mesures. Les équations lient les variations réciproques des vitesses d'évolution et de leurs accélérations, et permettent de simuler les comportements au cours du temps des divers composants de ces systèmes. L'idée générale est que l'action de l'un suscite la contre-réaction égale de l'autre de sorte que l'équilibre interne des forces soit toujours localement réalisé. La décomposition de systèmes complexes en systèmes plus élémentaires, des recompositions par superpositions et couplages de ces composants peuvent alors conduire à l'observation des comportements réels.

IV.2.5.5 *Le changement d'état : l'instant, la bifurcation*

Les discours de langage et de raison pures tenus par Platon sur le tout et la partie, le mouvement universel et l'immobilité, débouchent sur des contradictions. Celles-ci témoignent de nos difficultés à appréhender, à saisir les propriétés véritables de l'espace, difficultés qu'avaient, on l'a vu, relevées Platon. Il les retrouve tout naturellement lorsqu'il traite de la question du changement qui lui semble s'accomplir dans l'instant. Voyez comme il semble douloureusement se débattre, se noyant dans un lac d'antinomies (les trois citations suivantes s'enchaînent l'une après l'autre).

[80] « Et lorsque, étant en mouvement, il devient immobile, et qu'étant immobile, il passe au mouvement, il est évident qu'il n'est aucun temps. – Comment cela ? – Être d'abord immobile et ensuite se mouvoir, se mouvoir d'abord et être ensuite immobile, il n'est pas possible qu'il reçoive ces états sans changer. – Comment est-ce possible ? – Il n'y a pas de temps où une chose puisse être à la fois en mouvement et en repos. – Non, certainement. – Elle ne peut pas non plus changer sans changement. – Non, vraisemblablement. – Quand donc change-t-elle ? car on ne change ni quand on est en repos, ni quand on est mouvement, ni quand on est dans un temps. » (**Parménide**, 156 c – d)

Autre traduction : « Mais, lorsque, se trouvant en mouvement, il se met en repos, et lorsque, étant en repos, pour le mouvement, il change son état, il faut évidemment que, ce faisant, il ne soit absolument en aucun temps. – Comment cela ? – Être en repos antérieurement et, postérieurement, en repos, sans changement d'état il n'y aurait pas moyen d'éprouver ces affections. Comment serait-ce possible ? – Or, de temps, il n'en est point où il soit possible à un objet de n'être tout à la fois ni en mouvement, ni en repos. – Non, bien sûr ! – Et pourtant, il ne lui sera pas possible de changer son état, s'il n'y a pas changement d'état . – Non, bien sûr ! – Faudra-t-il donc qu'elle soit, cette situation étrange dans laquelle il se puisse trouver alors qu'il change d'état ? »

Continuons notre lecture, arrive le moment crucial.

[81] « Laquelle ? – L'instant ; car l'instant semble signifier quelque chose comme le point de départ d'un changement dans les deux directions. »
(**Parménide**, 156 d)

Autre traduction : « Laquelle donc ? – C'est l'instantané. Le terme d'instantané, en effet, semble signifier quelque chose comme le point départ du changement vers l'un ou l'autre état. »

Poursuivons :

[82] « Ce n'est pas en effet de l'immobilité encore immobile que part le changement, ni du mouvement encore mu qu'il se produit ; mais il y a cette étrange entité de l'instant qui se place entre le mouvement et le repos, sans être dans aucun temps, et c'est là que vient et de là que part le changement, soit du mouvement au repos, soit du repos au mouvement. – Cela pourrait bien être. - Donc l'un, s'il est vrai qu'il soit en repos et en mouvement, devra changer pour prendre l'un ou l'autre état ; car c'est la seule manière dont il puisse réaliser l'un et l'autre. Mais en changeant, il change instantanément, et pendant qu'il change, il ne saurait être en aucun temps, ni être alors en mouvement, ni être en repos. » (**Parménide**, 156 d – e)

Autre traduction : « Car ce n'est point à partir du repos encore en repos que s'effectue le changement, ni à partir du mouvement encore en mouvement que s'effectue le changement, ; mais l'instantané, cette nature d'étrange sorte, a sa situation dans l'entre-deux du mouvement et du repos ; dans le temps elle n'est nullement ; elle est le point d'arrivée et le point de départ du mobile qui change son état pour le repos, et de l'immobile qui change le sien pour le mouvement. »

La problématique du changement est évidemment importante. Une observation plus attentive de la réalité aurait quand même permis à Platon de surnager. Il lui a manqué en effet un examen plus approfondi des parties au sein du tout.

Voici deux images destinées à faire entendre que beaucoup est une question d'apparence, d'échelle dans la perception et dans l'observation, de niveau d'organisation et, au sein de chaque niveau, de nature et de propriétés des constituants.

Première image : si, à mille lieux d'ici, vous observez la terre à l'aide d'instruments rudimentaires, vous n'en verrez point les structures et les mouvements tectoniques internes, vous n'entendrez point les grondement souterrains, vous n'en verrez point la constitution.

Seconde image : une fusée ne part pas instantanément : elle d'abord a reçu un signal de mise à feu qu'un conducteur extérieur à la fusée lui a adressé ; un mouvement interne de combustion s'est enclenché, des rejets de combustion ont été projetés à l'extérieur de la fusée, elle a quitté son port d'attache lorsque la poussée a atteint un certain seuil.

Ainsi les parties d'un tout s'organisent en général entre elles de manière très complexe, ont tendance à être de composition très différente. Parvenu à un certain stade d'analyse, leur constitution et les manières dont elles interagissent en général nous échappent. L'immobilité n'est souvent qu'apparente, parce qu'elle peut n'être que de surface et si lente que nous ne la percevons pas ; inversement, le changement apparaît instantané lorsque les modifications locales

qui affectent l'objet échappent encore à notre perception, trop rapides et simultanément trop nombreuses pour pouvoir être détectés par nous. Au moment où se produit une bifurcation, la structure qui la précède connaît des dégénérescences extrêmement rapides accompagnées d'un remodelage également très rapide dans une nouvelle structure adaptées aux nouvelles contraintes qui sont apparues. Un discours absolu à la Platon sur les rapports entre le tout et les parties n'est pas de mise. Il aurait bénéficié des avancées techniques de l'observation, sans doute son propos aurait été différent.

Quoiqu'il en soit, il revient à Platon d'avoir fait jouer un rôle important à l'instant comme donnée à partir de laquelle peut se produire un changement d'état, et parfois en deux directions. Dans les formalisations actuelles, l'instant est souvent représenté par un point d'un espace de dimension a priori quelconque. Il convient de faire observer ici qu'il est possible de concevoir des modèles où le point se déploie avec le temps, et cela, il y a bien des façons de l'imaginer.

Dans le langage des mathématiciens, ce point - ou l'objet mathématique - à partir duquel plusieurs types d'évolution sont possibles, et parfois de manière simultanée, est appelé un point de bifurcation. La théorie de la bifurcation est foncièrement liée à la théorie du changement. Ce terme de bifurcation apparaît certes rarement dans l'œuvre de Platon, il ne l'emploie encore que dans son sens géographique ; mais sa présence prédispose, par le fait sous-jacent, à une acception plus générale du terme.

[83] « Mais le voyage n'est pas ce que dit le Télèphe d'Eschyle. ... Il me paraît, au contraire, qu'il y a beaucoup de bifurcations et de détours, ce que je conjecture d'après les cérémonies pieuses et les rites pratiqués sur terre. » (**Phédon**, 108 a)

Autre traduction : « or, à ce qu'on dit, la route n'est pas telle que le prétend le Télèphe d'Eschyle ... ; mais en réalité, le chemin a semble-t-il, nombre de bifurcations,

de carrefours : la preuve de ce que je dis, je la tire des rites et des coutumes qui se pratiquent ici. »

[84] « Car ce qui amène à la lumière les plantes et les animaux, chacun à son tour, et les éprouve en soi-même, est dédoublé, comme plus haut le nom de Zeus qui a été coupé en deux et prononcé par les uns *Zèna* et par les autres *Dia*. » (**Cratyle**, 410 d)

Autre traduction : « En effet les choses qui poussent, celles qui naissent, les promouvoir tour à tour à la lumière, en éprouver la valeur intrinsèque, cela, comme auparavant pour la bifurcation du nom de Zeus vers l'appellation, ici de *Div*, là de *Zèn*, ... »

IV.2. 6 Platon et la physique théorique

On peut créditer Pythagore d'avoir fondé la première école de physique théorique. Les adeptes tentaient de décrire le monde à partir des nombres, de la tétractys et de la proportion. Platon a poursuivi dans cette voie, faisant appel aux découvertes géométriques du groupe aux travaux duquel il a sans doute participé et qui a découvert les solides platoniciens. Les physiciens théoriciens d'aujourd'hui procèdent de même, créant des représentations utilisant les objets mathématiques les plus récents.

Dans tous les cas, le point de départ est une conception en partie atomistique de la nature. Les « particules » les plus fines de niveau $n_0, \dots, n_k$ s'assemblent, on est loin de savoir toujours comment, en particules moins fines de niveau $n_1, \dots, n_{k+1}$. Aristote reproche à Platon d'avoir manqué de réalisme en partant d'un niveau n_0 auquel sont associés des triangles, qui ne sont pas des solides. Platon donne une réponse implicite (**Timée**, 53 c), notant que les faces des corps solides qu'il considère peuvent être triangulées, de sorte qu'il voit dans le triangle le générateur de ces corps ; ce à quoi Aristote aurait dû répondre : mais pourquoi alors ne pas prendre en considération les arêtes de ces corps qui permettent de générer les triangles ? Ces « particules » n'auraient pas moins de

bien fondé que celles dont on se sert aujourd'hui dans certaines théories, aussi invérifiables, pour l'instant, que celle de Platon sur le plan expérimental, de conception très pythagoricienne comme celle des cordes, sortes de tiges vibratoires qui peuvent se fermer sur elles-mêmes. Et puisque le terme tige est employé, libre à chacun d'imaginer que la tige qui porte une fleur est semblable à une telle tige vibratoire, dont les ventres s'incarneraient dans les feuilles, sortes d'approximations réalisées par la nature des surfaces planes sans épaisseur considérées par Platon.

Moins, bien sûr, que l'édifice qu'il a construit, sa démarche est encore résolument moderne, et les solides platoniciens n'ont pas fini d'intriguer et d'inspirer les mathématiciens d'aujourd'hui.

IV.2. 7 Le Hasard, la Nécessité, et les antinomies platoniciennes

Un ouvrage fort prisé d'un prix Noble de médecine, François Jacob, porte ce titre, **Le Hasard et la Nécessité** ; mais certes, là n'est pas la raison qui a justifié le choix de l'en-tête de ce dernier paragraphe. C'est bien sûr la thématique de fonds qui retient l'attention, celle du déterminisme : la présence, les états de chaque chose, de chaque objet, sont-ils établis, fixés dès l'origine des temps, ou bien contribuent-ils chacun, par quelque forme de volonté propre, à façonner le devenir de l'univers ?

Jusqu'au vingtième siècle, la constance apparente des lois et des comportements physiques permettaient d'adhérer à la croyance en un déterminisme absolu dit laplacien. L'impossibilité depuis de rendre compte des états instantanés des objets du monde subatomique a contribué plus d'un à les éloigner de cette conviction et à les installer dans le doute.

On pourrait nommer tout aussi bien platonicien le déterminisme laplacien car le Dieu platonicien, selon une traduction du Timée, « calcule » c'est-à-dire prévoit et établit tout, en fonction des « lois fixées par le Destin » qui, elles, dictent la nécessité. On remarque ici la disjonction entre les lois de la nature et le Dieu. Si

Laplace l'a éliminé, Platon a encore besoin de ce père symbolique et protecteur, selon une traduction « qu'il nous faut comme sauveur » (**Timée**, 48 d), et qui, de surcroît, selon les habitudes culturelles de l'époque, reste entouré d'un cortège de divinités :

[85] « Quant aux autres divinités, exposer et connaître leur génération est une tâche au-dessus de nos forces : il faut s'en rapporter à ceux qui en ont parlé avant nous. » (**Timée**, 40 d)

Autre traduction : « En ce qui concerne les autres Divinités, exposer et connaître leur genèse est une tâche au-dessus de nous ; il faut s'en rapporter à ceux qui l'ont exposée avant nous ; »

Par ailleurs, ce Dieu mythique, avec les divinités qui l'accompagnent, est celui qui porte ce que Platon nomme ici « l'intelligence » (**Timée**, 52 e), terme non défini et qui désigne essentiellement la conceptualisation comme il apparaît d'après ces lignes :

[86] « Si l'intelligence et l'opinion vraie sont deux genres distincts, ces idées existent parfaitement en elles-mêmes : ce sont des formes que nous ne pouvons percevoir par les sens, mais seulement par l'esprit. Si, au contraire, comme il semble à quelques-uns, l'opinion vraie ne diffère en rien de l'intelligence, il faut admettre que tout ce que nous percevons par le corps est ce qu'il y a de plus certain. » (**Timée**, 51 d)

Autre traduction : « Si l'intelligence et l'opinion vraie sont deux genres distincts, il faut absolument accorder l'être à ces objets en soi, réalités que nous ne pouvons percevoir, mais concevoir seulement ; si au contraire, comme il paraît à certains, l'opinion vraie ne diffère de l'intelligence en rien, tous les objets, cette fois, que nous percevons par l'intermédiaire du corps doivent être posés comme les plus assurés. »

Dans la logique platonicienne, l'homme est une image souvent imparfaite de Dieu, et par conséquent, si l'homme conçoit avant de réaliser selon les lois causales, Dieu également, qui en fait est conçu à l'image de l'homme, conçoit également par son intelligence avant d'incarner :

[87] « Il faut ajouter à notre exposition ce qui naît par l'action de la nécessité ; car la génération de ce monde est le résultat de l'action combinée de la nécessité et de l'intelligence. Toutefois l'intelligence a pris le dessus sur la nécessité en lui persuadant de diriger au bien la plupart des choses qui naissent. » (**Timée**, 47e – 48 a)

Autre traduction : « c'est par l'union de la nécessité et de l'intellect qu'il fut engendré. Mais l'intellect commandait à la nécessité ; il la persuadait de mener à la meilleure fin le plus grand nombre de ses effets ; c'est dans ce sens et suivant ces voies, par l'action d'une nécessité soumise à une persuasion raisonnable, qu'ainsi, dès le principe, s'est constitué cet Univers. »

On pourrait déduire de l'ensemble de ces premiers propos que Platon croit en une détermination stricte de l'univers et de ses composants. Cependant, il ne manque pas de souligner par ailleurs la présence d'une forme de hasard ontologique, puisqu'il ne cherche pas à en connaître les origines possibles, ni à vérifier si les phénomènes qu'il observe et qui lui paraissent sous l'emprise du hasard, relèvent bien du qualificatif attaché à ce nom.

[88] « Il nous faut parler des deux espèces de cause mais traiter à part celles qui agissent avec intelligence et produisent des effets bons et beaux, puis celles qui, destituées de raison, agissent toujours au hasard et sans ordre. » (**Timée**, 46 e)

Autre traduction : « nous devons indiquer, aussi bien l'une que l'autre, les deux espèces de causes, mais en séparant celles qui, pleines d'intelligence, sont ouvrières de beaux et bons effets, et celles qui, isolées de la réflexion, produisent à tout coup leur effet au hasard et sans ordre. »

De sorte que,

[89] « Nous autres, qui participons grandement du hasard et de l'accidentel, il est naturel que nous parlions aussi au hasard. » (**Timée**, 34 c)

Autre traduction : « C'est nous donc plutôt, dont le hasard et l'aventure sont assez le partage, qui parlons un peu de même façon ... »

La citation suivante fait voir tous les aspects de la position de Platon, et sans celle de bien des penseurs de l'Antiquité.

[90] « Dès lors, en songeant à tout cela, on serait porté à soutenir, comme je le faisais précisément tout à l'heure, qu'aucun mortel n'est l'auteur d'aucune législation, et que presque toutes les actions humaines sont affaire de hasard. Mais, si c'est un fait que tout cela, quand on le dit de la navigation, de la conduite des navires, de la médecine, de l'art militaire, peut passer pour être ce qu'il faut dire, c'est pourtant un fait aussi, au rebours, qu'on dit pareillement ce qu'il faut quand, en ces mêmes matières, on dit ...—
CLIN. : Que dit-on ? — L'ATH. : Que la divinité et, avec le concours de la Divinité, Hasard et Occasion Favorable gouvernent la totalité des affaires humaines ; que ces deux collaborateurs de la Divinité doivent être suivis d'un troisième, et qui est nôtre, l'Art. » (**Lois**, 709 b)

Ainsi, au temps de Platon, la question du déterminisme n'est pas posée, et donc ne fait pas débat. Le réalisme de notre philosophe, qui lui permet de dégager quelques principes participant de la création et de l'évolution des objets, s'accompagne ici d'humilité : à travers sa remarque sur les divinités, il nous dit que les choses sont ainsi, sans que l'on en connaisse encore les raisons. De ce point de vue, le savant moderne est résolument platonicien.

Pas davantage donc que l'antinomie déterminisme – indéterminisme, celle qui oppose la continuité à la discontinuité n'a été envisagée par Platon. Il a par contre bien sûr repris celles dont on discourtait déjà au temps de ses

prédécesseurs, et dont quelques-unes ont déjà été évoquées, et qui sont proches de la dernière, continuité versus discontinuité : ce sont celles qui opposent la partie au tout, le fini à l'infini, le limité à l'illimité, l'instant à la durée, le repos au mouvement. Son approche très logiciste de ces questions ne pouvait sur le fonds qu'aboutir à des impasses. Cela dit, quand bien même les progrès ont été immenses, tant sur le plan de la représentation que sur le plan de la connaissance du monde physique vers l'immensément grand autant que vers l'infiniment petit, les opinions modernes sur ces questions ne sont guère plus avancées.

APPENDICE 1

Extrait du chapitre II⁵⁷ de l'ouvrage [10] :

...
« A l'inverse, des efforts patients et ardents de réflexion sur ces textes peuvent conduire à des réussites exceptionnelles. L'attitude de Maxwell est en tout point exemplaire, et son témoignage, qu'il expose avec tant de ferveur, est capital pour la défense et l'illustration de nos points de vue.

2.3 Les leçons de Maxwell

« Avant de commencer l'étude de l'électricité, je pris la résolution de ne pas lire des mathématiques sur ce sujet, avant d'avoir parcouru *les Recherches expérimentales sur l'électricité* de Faraday. Je savais que l'on pensait qu'il y avait une divergence de vue sur la manière dont Faraday d'une part et les mathématiciens de l'autre concevaient les phénomènes, si bien qu'aucune des parties n'était satisfaite du langage de l'autre. J'étais également convaincu que ce désaccord ne provenait pas d'une erreur d'un côté ou de l'autre. Je dois cette conviction à sir William Thomson ; je lui dois également l'essentiel de ce que j'ai appris sur le sujet, par son aide, ses conseils, ses publications.

En poursuivant l'étude de Faraday, je perçus que sa méthode de concevoir les phénomènes, bien que n'étant pas exprimée sous la forme conventionnelle de symboles mathématiques, était également de type mathématique. Je découvris que ces méthodes pouvaient s'exprimer dans les formes mathématiques ordinaires, et ainsi être comparées à celles des mathématiciens professionnels.

Par exemple, Faraday voyait dans son esprit des lignes de force traversant tout espace là où les mathématiciens voyaient des centres de force attirant à

⁵⁷ Ce chapitre est la reprise partielle d'un article paru sous le titre *La Formule et le Fait* dans trois revues : *Bulletin du Groupe d'Etudes des Rythmes biologiques*, vol.8, n° 6, 1976, 185-200 ; *Economies et Sociétés*, n° 29, 1977, 533-552 ; *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement public*, n° 309, 1977, 471-492.

distance : Faraday recherchait le siège du phénomène dans l'action réelle qui se produisait dans le milieu ; les mathématiciens étaient sûrs de l'avoir trouvé dans un pouvoir d'action à distance, agissant sur les fluides électriques.

Après avoir traduit en mathématiques ce que je considérais comme étant les idées de Faraday, je trouvais qu'en général les résultats des deux méthodes coïncidaient, de sorte que les deux méthodes permettaient d'expliquer les mêmes phénomènes et de déduire les mêmes lois d'action ; mais je trouvais aussi que la méthode de Faraday ressemblait à celles dans lesquelles, partant du tout, on arrive aux parties par l'analyse, tandis que les méthodes mathématiques ordinaires étaient fondées sur le principe qui consiste à prendre d'abord en considération les parties pour construire par synthèse le tout.

Je trouvais également que quelques-unes des méthodes de recherche les plus fertiles découvertes par les mathématiciens pouvaient être exprimées de bien meilleure façon dans les termes, les idées de Faraday, que dans leur forme originale. »

Maxwell poursuit dans sa préface, deux pages plus loin : « Je me suis limité presque entièrement au traitement mathématique du sujet, mais je recommanderais à l'étudiant, après qu'il eut appris, si possible expérimentalement, quels sont les phénomènes à observer, de lire avec soin *les Recherches expérimentales sur l'électricité* de Faraday. Il y trouvera un compte-rendu historique, strictement contemporain, de quelques-unes des découvertes et recherches électriques les plus grandes, réalisées dans un ordre de succession qui aurait pu difficilement être amélioré si le résultat en avait été connu dès le début, et exprimées dans le langage d'un homme qui porte beaucoup d'attention à la description précise des opérations scientifiques et de leurs résultats.

L'étudiant aura intérêt à lire les mémoires originaux sur le sujet qu'il travaille, quel que soit celui-ci ; car la science est toujours plus complètement assimilable quand on l'étudie dans son état naissant. »

Toutes ces lignes sont extraites de la préface de son traité [15]. Dans le cours de ce livre, au volume 2, il incite à nouveau le lecteur à se pencher sur l'ouvrage de Faraday. Voici en quels termes : « 528. La découverte par Oersted de l'action magnétique d'un courant électrique a conduit, par un processus direct de raisonnement, à la découverte de la magnétisation par les courants électriques, et de l'action mécanique entre les courants électriques. Cependant, ce ne fut pas avant 1831 que Faraday, qui avait essayé depuis quelque temps de produire des courants électriques par une action magnétique ou électrique, découvrit les conditions de l'induction magnéto-électrique. La méthode employée par Faraday dans ses recherches était fondée sur un appel constant à l'expérience connue, moyen de vérification de ses idées, et sur l'approfondissement constant de celles-ci sous l'influence directe de l'expérience. Dans ses publications sur ses recherches, nous trouvons ces idées exprimées dans un langage qui est d'autant mieux adapté à une science naissante qu'il est quelque peu étranger au style des physiciens accoutumés à établir des formes mathématiques de pensée.

La recherche expérimentale par laquelle Ampère établit les lois de l'action mécanique entre les courants électriques est l'une des plus brillantes réussites de la science.

L'ensemble, théorie et expériences, semble avoir jailli pleinement adulte et tout armé du cerveau du « Newton de l'Electricité ». La forme en est parfaite, la précision inattaquable, et se résume en une formule d'où l'on peut déduire tous les phénomènes, et qui demeurera la formule cardinale de l'électro-dynamique.

Cependant, la méthode d'Ampère, bien que moulée dans une forme inductive, ne nous permet pas de suivre la formation des idées qui l'ont guidé. Nous pouvons difficilement croire qu'Ampère a vraiment découvert la loi de l'action au moyen des expériences qu'il décrit. Nous en venons à soupçonner – en fait, il nous le dit lui-même – qu'il a découvert cette loi par un procédé qu'il ne nous montre pas et qu'après avoir construit une démonstration parfaite, il a ôté toute trace de l'échafaudage au moyen duquel il l'avait bâtie.

Faraday, au contraire, nous montre aussi bien ses échecs que ses expériences réussies, ses idées latentes aussi bien que celles qui se sont développées, et le lecteur, si inférieur à lui en pouvoir d'induction, éprouve encore plus de sympathie que d'admiration ; il est tenté de croire que si l'occasion lui en était offerte, il pourrait, lui aussi, devenir un découvreur. Tout étudiant devrait donc lire les recherches d'Ampère comme un splendide exemple du style scientifique dans la présentation d'une découverte, mais il devrait aussi étudier Faraday pour cultiver un esprit scientifique, au moyen de l'action et de la réaction qui se produiront entre les faits nouveaux présentés par Faraday et les idées qui prendront naissance dans son propre esprit.

Ce fut peut-être un bénéfice pour la science que Faraday, bien que pleinement conscient des formes fondamentales de l'espace, du temps et de la force, n'ait pas été un mathématicien déclaré. Il n'était pas tenté de se plonger dans les nombreuses recherches intéressantes de pure mathématique que ses découvertes lui auraient suggérées si elles avaient été présentées sous une forme mathématique, et il ne se sentait obligé ni de forcer ses résultats à prendre une forme acceptable au goût mathématique de l'époque, ni de les exprimer sous une forme peu susceptible d'être attaquée par les mathématiciens. Il eut ainsi la liberté de faire son travail personnel, d'accorder ses idées à ses faits, et de les exprimer dans un langage naturel et non technique. »

2.4 Sur la première leçon : « Il faut prendre l'idée de celui-là même qui l'a inventée »

Cette formule d'Alain résume la première leçon que nous rappelle Maxwell. Leçon, antique, on la trouve déjà chez Platon, mais tant de fois négligée ! la lecture du créateur apporte plus à l'entendement, enrichit davantage que ne semble pouvoir le faire n'importe quel épigone.

La pédagogie universitaire pourrait tenir compte de cette remarque. Le professeur renvoie-t-il assez l'étudiant à la lecture des fondateurs ? Comme on le

fait dans le secondaire pour les lettres classiques, on pourrait également réunir des textes scientifiques importants, et passer quelques heures à les commenter. Un professeur d'histoire des sciences serait chargé de ce rôle. A un niveau plus élevé, l'étudiant rédigerait un petit rapport sur l'historique d'une découverte contemporaine, afin, principalement, que soit suscité en lui l'intérêt pour la pensée d'autrui.

Il fut un temps, en France, où l'on ne dédaignait pas ce contact avec les maîtres du passé. Ainsi Alfred Kastler, lorsqu'il était à l'École normale, dut faire un exposé sur Ampère. Qui peut apprécier, avec exactitude, l'incidence secrète de ce petit travail d'histoire sur la carrière du prix Nobel ? L'école française de physique aurait-elle gagné à la lecture des traités de Maxwell [15] et de Thomson et Tait [23], qui dormaient dans les réserves de la bibliothèque de l'École normale (les pages 41 à 96 du second de ces traités [édition de 1891] n'étaient même pas découpées) ? Des expériences de formation « nouvelle » portant sur quelques décennies permettraient sans doute d'asseoir la valeur d'une réponse.

Il va sans dire que la doctrine qui est présentée ici est applicable à toutes les disciplines. Les éditeurs y trouveraient leur compte : on publierait à nouveau les ouvrages des grands précurseurs, et si possible leurs éditions princeps où l'on peut goûter la fraîcheur de la première pensée.

Chez les naturalistes, l'œuvre de Buffon, par exemple, gagnerait, semble-t-il, à être mieux connue. On sait l'intérêt que portait ce grand savant aux mathématiques ; les travaux et les réflexions qu'elles lui ont inspirés gardent toute leur jeunesse. Ses idées sur la perception physiologique [7] mériteraient encore d'être examinées. Et ces lignes ne pourraient-elles pas intéresser les embryologistes : « Les vrais ressorts de notre organisation ne sont pas ces muscles, ces veines, ces artères, ces nerfs, que l'on décrit avec tant d'exactitude et de soin ; il existe, comme nous l'avons dit, des forces intérieures dans les corps organisés, qui ne suivent point du tout les lois de la mécanique grossière que nous avons imaginée, et à laquelle nous voudrions tout réduire : au lieu de connaître

ces forces par leurs effets, on a tâché d'en écarter jusqu'à l'idée ; on a voulu les bannir de la philosophie : elles ont reparu cependant, et avec plus d'éclat que jamais, dans la gravitation, dans les affinités chimiques, dans les phénomènes de l'électricité... » ? »

[Les titres des autres paragraphes de ce chapitre, liés à l'histoire des sciences, sont les suivants :

2.5 Sur la seconde leçon : les dangers de l'algèbre

2.6 L'irrationnel contre l'algèbre

2.7 La nouveauté et le moyen terme]

APPENDICE II

1. Extrait de l'ouvrage de C. G. Jung, *Psychologie de l'Inconscient* [37] (où il présente à nouveau sa notion d'« *images archétypes* »)

« Considérons, par exemple, l'une des plus grandes idées qui soient nées au cours du XIX^e siècle, l'idée de la conservation de l'énergie. Elle fut émise par Robert Mayer. C'était un médecin, et non un physicien ou un philosophe de la nature auxquels on serait tenté d'attribuer la création d'une idée de cette sorte. Or, il importe de savoir que cette idée n'a pas été, au sens propre du terme, créée par Robert Mayer. Elle n'a pas été non plus engendrée par la confluence de conceptions ou d'hypothèses scientifiques alors existantes ; elle s'est développée chez son créateur, à la manière d'une plante. Mayer écrivant à Griesinger, en 1844, s'exprimait ainsi : « Ce n'est pas en un effort de réflexion , à ma table de travail, que j'ai trouvé cette théorie. » Il continue sa lettre en communiquant à son correspondant certaines observations physiologiques qu'il avait faites de 1840 à 1841 comme médecin de bord et il enchaîne en ces termes : « si l'on veut éclaircir des questions physiologiques, la connaissance des processus physiques est indispensable, à moins qu'on ne préfère prendre ces choses sous l'angle métaphysique, ce qui me répugne infiniment. Je m'en suis donc tenu à la physique et me suis adonné à celle-ci avec une telle passion que – ce qui porterait bien des gens à rire de moi – je me souciais fort peu du continent lointain où nous abordions et que je préférais demeurer à bord où je pouvais travailler sans interruption et où, certaines heures, je me sentais comme *inspiré* ; rien de semblable, à ma souvenance, ne m'est jamais arrivé ni avant ni après. Quelques éclairs de pensée qui me traversèrent l'esprit – c'était en rade de Surabaja – furent aussitôt poursuivis avec ardeur et me conduisirent encore à de nouveaux sujets. Ces temps-là sont passés, mais un examen à tête reposée *de ce qui a alors émergé en moi* m'a appris qu'il s'agissait d'une vérité qui *non*

seulement peut être sentie subjectivement, mais qui, encore, peut être prouvée objectivement. Cette démonstration pourra-t-elle être faite par un homme aussi peu versé en physique que moi, c'est ce que naturellement il ne m'appartient pas de juger. »

Helm, dans son ouvrage *Energetik*², émet l'opinion que la pensée nouvelle de Robert Mayer ne s'est pas dégagée peu à peu, par une étude et une réflexion approfondie des conceptions traditionnelles qu'on se faisait de la force, mais qu'elle appartenait à ces idées intuitivement perçues, qui, provenant d'autres domaines de l'esprit, s'emparent, pour ainsi dire, de la pensée, et l'obligent à transformer dans leur sens les conceptions traditionnelles.

La question qui se pose maintenant est de savoir d'où provenait l'idée nouvelle qui s'est imposée à la conscience avec une puissance si élémentaire. Et d'où tirait-elle cette force, qui dominait tellement le conscient qu'elle le soustrayait aux impressions multiples d'un premier voyage aux Tropiques ? Il n'est pas aisé de répondre à ces questions ! Si nous appliquons nos conceptions à ce cas, notre explication devrait être celle-ci : *l'idée de l'énergie et de sa conservation doit être une idée originelle qui sommeille dans l'inconscient collectif*. Cette conclusion nous oblige naturellement à prouver qu'une telle image originelle existait véritablement dans l'histoire de l'esprit humain et qu'elle fit sentir son influence à travers des milliers d'années. De fait, cette preuve peut être réellement apportée sans difficultés particulières : *les religions les plus primitives, dans les contrées les plus diverses du globe, sont fondées sur cette image*. Ce sont les *religions dites dynamistes*, dont la pensée unique et déterminante consiste à affirmer l'existence d'une force magique partout présente et qui est comme le centre de toutes choses¹. Taylor, le savant anglais bien connu, de même que Frazer ont commis le malentendu de prendre cette

¹ Robert Mayer : *Kleinere Schriften und Briefe*, Stuttgart, 1893, p. 213. *Brief an Wilhelm Griesinger*, 16 juin 1844.

² G. F. Helm, *Die Energetik nach ihrer geschichtlichen Entwicklung*, Leipzig, 1898, p. 20.

¹ Cette force est appelée « mana ». Voir N. SOEDERBLOM, *Das Werden des Gottesglaubens*, Leipzig, 1916.

idée pour de l'animisme. En réalité, par leur représentation d'une force, les primitifs n'entendent point du tout des âmes ou des esprits, mais vraiment quelque chose que le savant américain Lovejoy² désigne de façon pertinente sous le nom de « primitive energetics ». Cette notion correspond à une représentation de l'âme, de l'esprit, de Dieu, de santé, de force physique, de fertilité, de magie, d'influence, de puissance, de considération, de médicament, ainsi que de certains états d'âme qui se caractérisent par le déclenchement d'affects. Chez certaines peuplades polynésiennes, « Mulungu » (c'est précisément le nom de cette conception de l'énergie qu'ont les primitifs) est esprit, âme, être démoniaque, magie, considération ; et s'il se produit quelque chose d'inattendu et qui fait sensation, ces Polynésiens crient « Mulungu ». Cette notion de force est aussi chez les primitifs la première figuration de la conception de Dieu. Cette image, au cours de l'histoire, s'est développée en des variations toujours nouvelles. Dans l'Ancien Testament, la force magique brûle dans le buisson ardent et illumine la figure de Moïse ; dans les Evangiles, elle pleut du ciel, incarnant le Saint-Esprit sous formes de langues de feu. Chez Héraclite, elle apparaît comme l'énergie de l'univers, comme un « feu éternellement vivant » ; chez les Perses, elle est la splendeur du feu de « l'haôma », de la grâce divine ; chez les stoïciens, on la retrouve dans la *chaleur originelle*, la force du destin. Dans les légendes du moyen âge, elle apparaît comme l'auréole, le nimbe de sainteté, et elle s'échappe, flamme rougeoyante, du toit de la chaumière dans laquelle le saint est en extase. Dans leurs visions, les saints voient le rayonnement de cette force comme un soleil, comme la plénitude de la lumière. D'après une conception ancienne, c'est l'âme elle-même qui est cette force. La notion de son immortalité comporte sa *conservation*, et dans la représentation bouddhique et primitive de la métempsycose (ou migration des

² Arthur O. LOVEJOE, *The Fundamental Concept of the Primitive Philosophy in The Monist*, vol. XVI, 1906, p. 361.

âmes) se trouve exprimée *son aptitude illimitée aux métamorphoses, jointes à sa conservation constante.*

Cette idée est donc inscrite depuis des temps immémoriaux dans le cerveau humain. C'est pourquoi elle se trouve disponible dans l'inconscient de chacun de nous. Il n'est besoin que de certaines conditions pour l'en faire surgir. Celles-ci, manifestement, étaient remplies chez Robert Mayer. »

2. Exemples de lagrangiens

« L'énergie sera toujours définie, dans un premier temps, comme une forme quadratique sur un espace de fonctions dépendant elles-mêmes de la vitesse ou du flux. L'action ... sera l'intégrale au cours du temps d'une telle énergie : les fonctions que l'on vient de considérer doivent être supposées de carré intégrable ; elles forment, par définition, un espace de Hilbert.

La mécanique classique et la physique ne cessent de considérer des formes quadratiques qui se présentent sous une forme agréable, et sont appelées des *lagrangiens homogènes*.

Soit $X(x)$ un vecteur « vitesse » d'origine x et dont la longueur dépend du point considéré. R désigne une matrice symétrique ($r_{ij} = r_{ji}$) et $X'(x)$ le vecteur transposé du vecteur $X(x)$.

L'expression

$$T(X(x)) = \frac{1}{2} X'(x) R X(x)$$

est appelé un lagrangien homogène. Il peut avoir l'une des significations suivantes :

<i>Nombre T</i>	<i>Vecteur X</i>	<i>Matrice R</i>
1. énergie cinétique	Vitesse	Masse d'inertie
2. énergie cinétique	Vitesse	Moment d'inertie
3. énergie de	angulaire	Coefficient de
dissipation	Vitesse	frottement

4. énergie cinétique magné- tique	Courant	Coefficient de self-induction
5. énergie de dissipation électrique	Courant	Résistance électrique
6. énergie de dissipation thermodynamique	Flux	Résistance thermodynamique
7. densité d'énergie	Champ de vecteurs forces électriques	Constante diélectrique

En mécanique classique, l'expression $L = T - U$ où T est un lagrangien homogène, U un potentiel, s'appelle un *lagrangien*.⁵⁸ »

3. Les équations d'Euler-Lagrange

Soit $S = \int_t^{t'} L(q, q') d\tau$ l'action associée au lagrangien $L(q, q')$, où $q(\tau)$ est

la position de la particule sur sa trajectoire. Une légère modification de cette trajectoire se traduirait par une légère modification correspondante de cette position, elle deviendrait $q(\tau) + \delta q(\tau)$: $\delta q(\tau)$ caractérise donc la *variation* de la trajectoire à la date τ . Notons que cette trajectoire doit passer, aux dates t et t' , par les positions $q(t)$ et $q(t')$, ce qui impose que :

$$\delta q(t) = \delta q(t') = 0.$$

$q'(\tau)$, de son côté, deviendrait $q'(\tau) + \delta q'(\tau)$, où $\delta q'(\tau) = (\delta q(\tau))'$ (cf la note 32).

L'action serait alors $\int_t^{t'} L(q+\delta q, q'+\delta q') d\tau$. Un développement du lagrangien,

limité au premier ordre, donne la relation :

$$L(q + \delta q, q' + \delta q') = L(q, q') + \delta q \frac{\partial L}{\partial q}(q, q') + \delta q' \frac{\partial L}{\partial q'}(q, q').$$

Elle conduit à une variation de l'action :

⁵⁸ Extrait de [10], pages 141-142.

$$\delta S = \int_t^{t'} [\delta q \frac{\partial L}{\partial q}(q, q') + \delta q' \frac{\partial L}{\partial q'}(q, q')] d\tau$$

Compte tenu de la relation $\delta q' = (\delta q)'$, le second terme de cette intégrale, intégré par partie, a pour valeur :

$$\int_t^{t'} (\delta q)' \frac{\partial L}{\partial q'}(q, q') d\tau = [\delta q(t') \frac{\partial L}{\partial q'}(q(t'), q'(t')) - [\delta q(t) \frac{\partial L}{\partial q'}(q(t), q'(t))] - \int_t^{t'} \delta q \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial q'} \right) d\tau .$$

$$\text{Puisque } \delta q(t) = \delta q(t') = 0, \int_t^{t'} \delta q' \frac{\partial L}{\partial q'}(q, q') d\tau = - \int_t^{t'} \delta q \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial q'} \right) d\tau .$$

Par suite :

$$\delta S = \int_t^{t'} \left[\frac{\partial L}{\partial q}(q, q') - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial q'} \right) \right] \delta q d\tau .$$

Selon le principe de Fermat-Maupertuis, une trajectoire physique rend minimale la dépense d'énergie pour accomplir le trajet. Si donc on la modifie de δq et qu'elle reste une trajectoire physique, la variation δS sera nulle. Cela impose que le terme entre crochet dans l'expression de δS soit nul ; d'où, dans chaque direction i du mouvement, la relation dite équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0$$

4. Les relations de réciprocité

Du principe selon lequel le travail total accompli par une force $F(s)$, lors d'un déplacement le long d'un chemin paramétré par s et joignant deux points a et b , est indépendant du chemin choisi, résulte que ce travail s'écrit $U(b) - U(a) = \int_a^b F(s).ds$ où $U(s)$ est une fonction dite *potentiel*, du type de celles considérées par Gauss (cf la fin du paragraphe II.1.2), dont la valeur ne dépend donc que de la position spatiale s .

Considérons alors deux chemins c' et c'' joignant a et b , et désignons par $U(s')$ la valeur de la fonction potentielle en un point s' situé sur le chemin c' , par $U(s'')$ la valeur de la fonction potentielle en un point s'' situé sur le chemin c'' .

Par le principe précédent,

$$U(b) - U(a) = \int_a^b F'(s').ds' = \int_a^b F''(s'').ds''$$

où $F'(s')$, respectivement $F''(s'')$, est la force le long du chemin c' , respectivement c'' .

Perturbons le potentiel donné de sorte qu'il devient $U + \delta U$, avec pour propriétés :

$$\delta U(a) = \delta U(b) = 0, U(s') = U(s'') + \delta U(s''), U(s'') = U(s') + \delta U(s').$$

Avec ce nouveau potentiel $U + \delta U$, la force le long du chemin c' devient F'' , celle le long du chemin c'' devient F' , et l'on a alors :

$$\int_a^b F''(s').ds' = \int_a^b F'(s'').ds''^{59}$$

Un grand nombre de lois dites de réciprocité, (celle de Lars Onsager (1903-1976) en physico-chimie, de Tellegen pour les réseaux électriques, ...) ne sont que des variantes de cette égalité et donc du principe précité, où l'on considère des puissances (quantités de travail par unité de temps) et non des travaux.

5. Extrait du traité de *Thermodynamique* de Poincaré [51] :

« **48. Dernières idées de Sadi Carnot.** – Déjà, dans les dernières pages du mémoire dont nous venons d'esquisser les principales lignes, Carnot conçoit des doutes sur la légitimité de la conservation du calorique.

⁵⁹ J'ai donné cette propriété élémentaire en 1981, dans un cours de DEA fait auprès de physiciens : Chapitre IV (Contraintes globales, systèmes conservatifs et bifurcations) in *Système, Développement, Mémoire*, Publ. Math. Paris 12, ISSN 0761-3059/01.

Parmi les raisons qui l'ont amené à ce doute les expériences de Rumford et de Davy sur le frottement tiennent probablement le premier rang. Mais des raisons d'une autre nature semblent aussi avoir contribué à ce changement d'idées.

A cette époque la discussion entre les partisans de la théorie de l'émission et les partisans de la théorie des ondulations de la lumière était à sa période aiguë et les arguments de ces derniers commençaient à avoir une portée décisive pour le triomphe de la théorie qu'ils soutenaient. La lumière paraissait donc déjà devoir être considérée comme une manifestation du mouvement moléculaire. D'autre part, des expériences récentes montraient l'identité de la lumière et de la chaleur rayonnante ; cette dernière devait donc également provenir d'un mouvement. Il devenait dès lors naturel de considérer l'état thermique d'un corps comme résultant du mouvement de ses molécules matérielles et de voir dans la chaleur une transformation des mouvements sensibles. D'ailleurs cette hypothèse n'était pas nouvelle ; elle avait été introduite deux siècles auparavant, mais sans aucune raison scientifique, par François Bacon, puis par Boyle, puis reprise plus tard par Euler. La théorie de Fresnel n'apportait donc, en réalité, qu'une confirmation partielle d'une hypothèse déjà ancienne.

49. Quoi qu'il en soit, quelque temps avant sa mort prématurée, Carnot possédait sur la chaleur des idées tout à fait conformes à nos idées actuelles. Il les consigna dans des Notes manuscrites qui restèrent ignorées jusqu'en 1871 ; leur lecture ne laisse aucun doute sur l'importance des progrès qui seraient résultés d'une publication plus hâtive.

Nous y trouvons en effet :

« La chaleur n'est autre chose que la puissance motrice, ou plutôt le mouvement qui a changé de forme. C'est un mouvement dans les particules du corps. Partout où il y a destruction de force motrice, il y a en même temps production de chaleur en quantité précisément proportionnelle à la quantité de puissance motrice détruite. Réciproquement : partout où il y a destruction de

chaleur, il y a destruction de puissance motrice », et « l'on, peut poser en thèse générale que la puissance motrice est en quantité invariable dans la nature ; qu'elle n'est jamais, à proprement parler, produite ou détruite. A la vérité, elle change de forme, c'est-à-dire qu'elle produit tantôt un genre de mouvement, tantôt un autre, mais elle n'est jamais anéantie . »

Pouvait-on exprimer de manière plus claire et plus précise le principe de la conservation de l'énergie ?

Carnot donne le même nombre exprimant le nombre d'unités de chaleur correspondant à l'unité de puissance motrice : la production de 1 unité de puissance (1000^{kg} élevés à 1^{m}) nécessite la destruction de 2, 70 unités de chaleur. De ces nombres on déduit 370 pour l'équivalent mécanique de la chaleur.

Carnot ne dit pas comment il est parvenu au nombre qu'il indique pour l'équivalent calorifique de la puissance motrice. Il est cependant probable qu'il l'a déduite des chaleurs spécifiques des gaz. Si l'on fait le calcul en prenant pour C et c les valeurs admises à l'époque, on trouve en effet le nombre de Carnot. C'est aussi ce même nombre que Mayer obtient 15 ans plus tard par cette méthode. »

On rapprochera ce texte de Poincaré de celui de la seconde conférence de Tait [54] qui, à propos du lien entre chaleur et mouvement, évoque Bacon mais aussi Locke, et, en termes plus précis, Rumford et Davy qui en 1812 écrit: « La cause immédiate du phénomène de la chaleur est un mouvement, ... »

APPENDICE III

1. Voici d'abord un exemple très élémentaire où l'on déduit aisément des invariants physiques à partir de la connaissance du lagrangien. Considérez d'abord l'ensemble des nombres réels comme représentant les diverses occurrences du temps, il a la structure de groupe : à tout nombre positif t est associé son symétrique négatif $-t$. Ce groupe peut être vu comme celui des translations temporelles qui conduisent de la date 0 à la date t , que celle-ci soit antérieure ou postérieure à la date d'origine 0. Dire que le lagrangien L est invariant par une telle translation revient à écrire que la dérivée de ce lagrangien par rapport au temps est nulle : l'énergie lagrangienne est donc conservée au cours du temps. De leur côté, les translations dans l'espace forment également un groupe, et l'on peut également supposer que le lagrangien est invariant par rapport à une translation dans l'espace, de sorte que, dans le cas d'une seule variable d'espace q , $\frac{dL}{dq} = F = 0$, et, puisque $F = \frac{d}{dt}(p)$, l'impulsion p reste constante au cours du temps et donc également par translation spatiale.

2. Un énoncé moderne du théorème est le suivant⁶⁰:

« Soit une symétrie infinitésimale de l'action $S = \int L(x, u(x), du(x))dx$ opérant sur l'espace des positions (x généralise le temps t , il appartient à un ouvert W de $\mathbf{R}^m$, $u(x)$ désigne maintenant le vecteur des $q_i(t)$ (i variant de 1 à n), $u : W \rightarrow \mathbf{R}^n$ est donc une application de l'ouvert temporel généralisé W dans l'espace à n dimensions des positions, $du(x)$ généralise les $q'_i(t)$; $U(u(x))$ est un vecteur en $u(x)$ défini par l'action locale du groupe des transformations infinitésimales sur $\mathbf{R}^n$ laissant S invariant). Soit u un point critique de S (i.e. une valeur de u qui rend S extrémal) : alors est nulle la divergence du champ de vecteurs J sur W de composantes :

$$J^k(x) = \sum_{1 \leq i \leq n} U^i(u(x)) \frac{\partial L}{\partial u_k^i}(x, u(x), du(x))$$

⁶⁰ Cf Frédéric Hélein *Constant Mean Curvature Surfaces, Harmonic Maps and Integrable Systems*, Birkhäuser, Basel, 2001.

$$0 = \text{Div } J = \sum_{1 \leq k \leq m} \frac{\partial J^k}{\partial x^k} . \gg$$

Lorsque le groupe de transformations opère sur W à travers le champ de vecteurs X , l'expression de $J^k(x)$ devient :

$$J^k(x) = \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq m} X^j(x) \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \frac{\partial L}{\partial u^i_k}(x, u(x), du(x)) - X^k(x) L(x, u(x), du(x)) dx$$

Un théorème d'invariance bien antérieur, qui se place dans le même esprit que les théorèmes de Noether, a été introduit par Liouville. Il énonce que la divergence Dg du champ géodésique g sur le fibré tangent TM d'une variété différentiable M est nulle, en d'autres termes que le flot géodésique, auquel est associé un groupe local de difféomorphismes G , conserve la forme volume. Tout comme l'obtention des trajectoires d'un système hamiltonien, celle des géodésiques provient de la résolution d'un problème variationnel. Les théorèmes de Noether et de Liouville appartiennent donc à une même famille plus générale de problèmes. De fait, le résultat de Liouville peut s'obtenir directement à partir de l'action $\int L dt$ du lagrangien classique réduit à $L = \frac{1}{2} \dot{x}^2$ où x désigne ici la variable d'espace, la position du mobile dans M .

Les extensions récentes se placent naturellement dans le cadre des espaces de jets au-dessus de la variété des états, munie d'une connexion adéquate. Mais c'est en fait le fibré des k -formes sectorielles⁶¹ au-dessus de cette variété qu'il faudrait prendre en considération pour obtenir la meilleure généralisation. Sur le fond mathématique, ces extensions n'apportent rien de neuf.

Par ailleurs G étant donné, et ayant une signification physique bien établie, on peut s'interroger sur la possibilité de procéder à des extensions de G qui soient pertinentes sur le plan physique.

⁶¹ J. Enrico WHITE *The Method of Iterated Tangents with Applications in Local Riemannian Geometry*, Pitman, Boston.London.Melbourne, 1982.

Supposons donné un groupe G dont un élément générique g dépende des valeurs d'une fonction f continue et dérivable jusqu'à l'ordre k . Pour simplifier, f ne dépend que du paramètre unidimensionnel s .

Naturellement, on pourra introduire des raffinements : par exemple, on peut associer à un élément g du groupe une mesure « quantique » de présence par l'intermédiaire de la fonction $f(s)$; tant que toute perturbation de s et de f , pouvant affecter une ou plusieurs dérivées de f , maintient cette mesure au-delà d'une certaine valeur, du même ordre de grandeur par exemple que celle de la longueur de Planck soit 10^{-33} , on considèrera que g existe ; l'objet sera alors peut-être vu comme stable par rapport à un certain difféomorphisme affectant les espaces des f et de s . Ces notions doivent être traités dans le cas d'exemples précis.

Une autre remarque : plaçons-nous dans le cas particulier où un objet dans un état s est représenté par une fonction dépendant de paramètres $x_i(s)$ liés à l'état de s . Pour simplifier, supposons de l'objet soit représenté par une fonction polynomiale $p(x)$ qui, pour l'état s de l'objet, prend la valeur a : l'équation $p(x) = a$ possède des solutions caractérisées par le groupe de permutation des racines de l'équation $p(x) - a = 0$. Si p n'est pas un polynôme mais une fonction, on peut toujours approcher celle-ci d'aussi près que l'on veut par un polynôme (selon le théorème classique de Stone-Weierstrass). Si donc un objet est représenté par une fonction mathématique, il est toujours possible d'associer une famille de groupes liés à son état. On peut alors s'interroger sur la signification physique de ces groupes : dans quelle mesure sont-ils le reflet de l'équilibre interne de l'objet, de sa stabilité ?

Il peut y avoir stabilité d'un état, il peut y avoir également stabilité du comportement. Un comportement peut se représenter par une fonction (qui possède donc un groupe de symétries internes), voire par une famille de fonctions, un opérateur, la question préalable étant celle de la définition de l'objet

d'étude. Du point de vue symbolique, le mode de traitement est très voisin que la variable q désigne un état, une fonction u ou un opérateur H .

Si beaucoup de progrès ont été réalisés, deux questions importantes restent encore insuffisamment étudiées :

- celle de l'effet stabilisateur et associatif des résonances,
- celle de l'effet, comme l'indique un théorème de Smale, déstabilisateur et disruptif des couplages entre systèmes dynamiques.

BIBLIOGRAPHIE

Avant –propos et Chapitres I & II

- [1] ANAXIMANDRE in G. COLLI *La Sagesse grecque*, II, L'éclat, Paris, 1991.
- [2] ARCHIMEDE *De l'équilibre des plans ou centres de gravité de plans*, in *Les œuvres complètes d'Archimède*, tome 1, Vaillant-Carmanne, Liège, 1960.
- [3] ARISTOTE *La Métaphysique*, Vrin, Paris, 1966.
- [4] ARISTOTE *Organon*, Vrin, Paris, 1969.
- [5] ARISTOTE *Physique*, Flammarion, Paris, 2000.
- [6] ARISTOTE *Physique et Métaphysique*, PUF, Paris, 1966.
- [7] Jean BERNOULLI *Die Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band II, Birkhauser Verlag, Basel, 1955.
- [8] Jean BERNOULLI *Propositiones variae mechanico-dynamicae* (1726), in *Opera Omnia*, 1742, t. 4, N° CLXXVII, Georg Olms, Hildersheim, 1968.
- [9] Daniel BERNOULLI *Die Werke von Daniel Bernoulli*, Band 3, Mechanik, David Speiser Ed., Birkhauser, 1987.
- [10] Claude-Paul BRUTER *Les Architectures du Feu, Considérations sur les Modèles*, Flammarion, Paris, 1982.
- [11] Claude-Paul BRUTER *Topologie et Perception, tome I, Bases Philosophiques et Mathématiques*, 2^{ème} édition, Maloine, Paris, 1985.
- [12] Claude-Paul BRUTER *Interaction between conservative and gradient-like systems*, Hadronic Journal, 5, 1982, 1748-1753 et *Sur la décomposition des champs de vecteurs*, Publ. Mathématiques, Univ. Paris 12, 1982 (ISSN : 0762-0012/03).
- [13] Claude-Paul BRUTER *Comprendre les Mathématiques*, Odile Jacob, Paris 1996.
- [14] Georges-Louis BUFFON *De l'Homme*, François Maspéro, Paris, 1971.
- [15] Lazare CARNOT *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul infinitésimal* (1797), Blanchard, Paris, 19.

[16] Sadi CARNOT *Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance*, Paris, Bachelier, 1824, et Paris, Blanchard, 1953.

[17] Guy CHANFRAY–Gérard SMADJA *Les particules et leurs symétries*, Masson, Paris 1997.

[18] Boris DOUBROVINE–Sergei NOVIKOV–Anatolij FOMENKO *Géométrie contemporaine*, 2 vol., Editions Mir, Moscou, 1982.

[19] Pierre DUHEM *La théorie physique, son objet, sa structure* Paris, 1906 et Marcel Rivière & Cie, 1914, ainsi que :
http://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/philo/textesph/Duhem_theorie_physique.pdf -

[20] Pierre DUHEM *L'Aube du Savoir*, Hermann, Paris, 1977.

[21] Pierre DUHEM *Traité d'Energétique ou de thermodynamique générale*, 2 vol., Gauthier-Villars, 1911, et Jacques Gabay, Paris, 1977.

[22] Albert EINSTEIN *La théorie de la relativité restreinte et générale, exposé élémentaire*, Gauthier-Villars, Paris, 1976.

[23] Albert EINSTEIN *Réflexions sur l'électrodynamique, l'éther, la géométrie et la relativité*, Gauthier-Villars, Paris, 1972.

[24] Michel FICHANT *La réforme de la dynamique*, Vrin, Paris, 1994.

[25] Wilton FILHO *La Mécanique de Lagrange*, Editions Karthala, Paris, 1994.

[26] Galileo GALILEI *Dialogues Concerning the two New Sciences (Discorsi e Dimostrazioni matematiche intorno à due nuoue Scienze attenenti alla Mecanica & i Movimenti Locali*, Leida, 1638), Dover, New York, 1954.

[27] Galileo GALILEI *Dialogues sur les deux grands Systèmes du Monde*, Paris, Seuil, 1992 (*Dialogue Dans lequel, lors de rencontres pendant quatre journées, on discoure des deux plvs grands systèmes dv monde Ptoléméen et Copernicien*, Florence, 1632).

[28] Carl Friedrich GAUSS *Allgemeine theorie des erdmagnetismus*, 1838, in C.F. Gauss *Werke*, Fünfter Band, Göttingen, 1877, p.119.

[29] Carl Friedrich GAUSS *Allgemeine Lehrsätze...*, 1840, in C.F. Gauss *Werke*, Fünfter Band, Göttingen, 1877, p.195.

- [30] Hermann GRASSMANN *Lineale Ausdehnungslehre*, 1844 (1^e édition), et 1862, dernière édition, traduite par L.C. Kannenberg *Extension Theory*, Am. Math. Soc. , 2000.
- [31] William Ronald HAMILTON *The Mathematical Papers of Sir R.W. Hamilton*, vol. II, Cambridge University Press, 1940.
- [32] Thomas HEATH *Mathematics in Aristotle*, Thoemmes Press, Bristol, 1998.
- [33] Hermann von HELMHOLTZ *Ueber die Erhaltung der Kraft*, Berlin, 1847 (*Mémoire sur la conservation de la force*, Paris, 1869).
- [34] Chritiaan HUYGHENS *De Motu corporum ex percussione*, in *Oeuvres Complètes*, Société hollandaise des Sciences, La Haye, 1888-1950, tome XVI.
- [35] Chritiaan HUYGHENS *Extrait d'une lettre de M. Huyghens à l'Auteur du Journal et Règles du mouvement dans la rencontre des corps*, in *Journal des Sçavants*, Lundi 18 Mars 1669 , in *Oeuvres Complètes*, Société hollandaise des Sciences, La Haye, 1888-1950, tome VI, p. 384-385, et tome XVI, p.179-181.
- [36] James Prescott JOULE *On the existence of an equivalent relation between heat and the ordinary forms of mechanical power*, in *Phil. Magazine*, XXVII, 205.
- [37] Carl Gustav JUNG *Psychologie de l'Inconscient*, Le Livre de Poche, Paris, 2005.
- [38] Emmanuel KANT *Premiers Principes Métaphysiques de la Science de la Nature*, Vrin, Paris , 1971.
- [39] Joseph-Louis LAGRANGE *Mécanique Analytique*, Chez la Veuve Desaint, Paris, 1788, nouvelle édition, Paris, 1888.
- [40] Pierre Simon de LAPLACE *Exposition du Système du Monde* 1796, Œuvres, Imprimerie Royale, t.6 1846.
- [41] Gottfried Wilhelm LEIBNIZ *Leibnizens mathematische Schriften*, t.6, Schmidt, Halle, 1860.
- [42] Gottfried Wilhelm LEIBNIZ *Opusculs philosophiques choisis* (traduits par P. Schrecker), Vrin, Paris, 1969.

- [43] Gottfried Wilhelm LEIBNIZ *Philosophical Texts* (traduits par R. Francks et R.S. Woolhouse), Oxford University Press, 1998.
- [44] Jacqueline LUBET–Bernard POURPRIX *L'Aube de la Physique de l'Energie, Helmholtz rénovateur de la dynamique* Vuibert-Adapt, Paris, 2004
- [45] Ernst MACH *Die Mechanik in ihrer Entwicklung* (paru en français sous le titre *La mécanique, exposé historique et critique de son développement*)
- [46] Julius Robert von MAYER *Bemerkungen über die Kräfte des Undelebten Natur, Annalen of Wöhler & Leibig, 43, 233, 1842* (Remarques sur les Forces de la Nature Inorganique, *Annales de Chimie et de Pharmacie*).
- [47] Julius Robert von MAYER *Schriftten und Brieffe*, Verlag der J.G. Cotta'schen Buchhandlung Nachfolge, Stuggart, 1893.
- [48] Isaac NEWTON *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687) University of California Press, Berkely, 1960.
- [49] Wilhelm OSTWALD *Energie*, par Internet, aux éditions éditions Vigdor, Paris, 2003.
- [50] PLATON *Phèdre, Œuvres complètes*, Gallimard, Paris, 1943-1950.
- [51] Henri POINCARÉ *Thermodynamique* Gauthier-Villars, Paris, 1906 (2^e édition) et Jacques Gabay, Paris, 1995.
- [52] William RANKINE *On the reconstruction of the mechanical energy of the universe, Philosophical Magazine*
- [53] William RANKINE *On the General Law of the Transformation of Energy*
- [54] William RANKINE *Outlines of the Science of Energetics*
- [55] Peter Guthrie TAIT *Lectures on some Recent Advances in Physical Science*, London : Macmillan (1st ed. 1876; 2nd ed. 1876; 3rd ed. 1885) (*Conférences sur quelques-uns des progrès récents de la physique*, F. Fetscherin et Chuit, Paris, 1886).
- [56] René THOM *Stabilité structurelle et morphogénèse*, Inter-éditions, Paris, 1984.

[57] William THOMSON Sir Lord Kelvin, *Mathematical and Physical Papers*, vol. 1, Cambridge University Press, 1882.

[58] William THOMSON–Peter Guthrie TAIT *Treatise on Natural Philosophy*, Cambridge University. Press, 2 vol., 1879.

[59] Jacques VIRET *Topologie et Psychologie*, à paraître.

BIBLIOGRAPHIE

CHAPITRE III

[1] George Biddell AIRY On a method of regulating the clock-work for equatoreals *Monthly notices of the Royal Astronomical Society*, 11 (1840) 249-267.

[2] Jean d'ALEMBERT *Opuscles mathématiques ou mémoires sur différents sujets de Géométrie, de Méchanique, d'Optique, d'Astronomie, &c.* Tome premier, MDCCLXI, chez David, rue et vis-à-vis la grille des Mathurins, avec approbation et privilège du Roi.

[3] Alexandre ANDRONOV – Lev PONTRJAGIN Systèmes grossiers, *Doklady* (1937) 14, 247-250.

[4] René BAIRE *Oeuvres Scientifiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1990.

[5] Daniel BERNOULLI *Hydrodynamica sive de viribus et motibus fluidorum commentarii*, Joohannus Reinholdi Dulsekeri, Bâle, 1738.

[6] George David BIRKHOFF http://www.ams.org/online_bks/coll9/
— — — *Dynamical systems*, Amer. Math. Soc., Providence, 1927.

[7] Georges BOULIGAND *Sur la stabilité des propositions mathématiques*, Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sc. (5) 21 (1935), 277-282 et 776-779.

[8] Marcel BONVALET, *Phénomènes linéaires*, Masson, Paris, 1994.

- [9] M.J. BOUSSINESQ *Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale*, Gauthier-Villars, Paris, 1878.
- [10] M.J. BOUSSINESQ *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Gauthier-Villars, Paris, 1879.
- [11] Claude Paul BRUTER, *Sur la nature des mathématiques*, Gauthier-Villars, Paris 1973
- [12] Claude Paul BRUTER Bifurcation : un concept interdisciplinaire, *Actes du 114^e congrès national des sociétés savantes*, Editions du CTHS, Paris, 1992, p. 59-71.
- [13] Claude Paul BRUTER La notion de singularité et ses applications, *Revue Inter. de Systémique*, vol 4, n°3 (1889) p. 437-458.
- [14] Claude Paul BRUTER, Bifurcation and continuity, in *Dynamical systems, a renewal of mechanism* (S. Diner, D. Fargue, G. Lochak Ed.) World Scientific, Singapore, 1986, p. 70-74.
- [15] Claude Paul BRUTER Les formes du continu, in *De la Science à la Philosophie* (M. Espinoza Ed.) L'Harmattan, Paris, 2001, p. 61-78.
- [16] Claude Paul BRUTER, *Topologie et Perception* (3 vol.) t.1 1974-1985, t.2 1976, t.3 1986, Maloine, Paris.
- [17] Claude Paul BRUTER Eléments pour une biologie théorique, in L. Boi (Ed.) *Symétrie, brisures de symétries et complexité ne mathématiques, physique et biologie*, Peter Lang , Bern-... , 2005, pp. 223-247.
- [19] Arthur CAYLEY *On linear transformations*, Cambridge & Dublin Math. Journal, 1(1846) 104-122, in The collected mathematical papers of Arthur Cayley
- [20] Sujoy CHAKRABORTY – Munibur Rahman CHOWDHURY Arthur Cayley and the Abstract Group Concept, *Mathematical Magazine*, **78**, 4, 2005, 269-282.
- [21] William Kingdom CLIFFORD in J.C. Maxwell On reciprocal diagrams in space and their relation to Airy's function of stress, *Proc. London Math. Soc.* 2 (1886-1869) 60-61.

[22] Pierre DUHEM *Traité d'Energétique ou de thermodynamique générale*, 2 vol., Gauthier-Villars, 1911, et Jacques Gabay, Paris, 1977.

[23] Galileo GALILEI *Dialogues sur les deux grands Systèmes du Monde*, Paris, Seuil, 1992 (Dialogue Dans lequel, lors de rencontres pendant quatre journées, on discoure des deux plvs grands systèmes dv monde Ptoléméen et Copernicien, Florence, 1632).

[24] HELMHOLTZ Ueber die Tatsache welche der Geometrie zu Grunde liegen 1868

[25] Eberhard HOPF Abzweigung einer periodischen Losung von einer stationären Losung eines Differential-systems, *Ber. Math. Phys. Kl. Sächs. Acad. Wiss. Leipzig*, 94 (1942) 1-22.

[26] Adolf HURWITZ Ueber die Bedingungen unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt , *Mathematische Annalen* 46 (1895) 273-284.

[27] N. E. JOUKOVSKY *Sur la stabilité du mouvement*, Mémoires Scientifiques de l'Université Impériale de Moscou (section physico-mathématique), Moscou, 1882.

[28] Felix KLEIN *Le programme d'Erlangen*, Gauthiers-Villars, Paris, 1974.

[29] Yvette KOSMAN-SCHWARZBACH *Les théorèmes de Noether, Invariance et lois de conservation au XX^e siècle*, Les Éditions de l'École Polytechnique, Palaiseau, 2004.

[30] Joseph-Louis LAGRANGE *Mécanique Analytique*, Chez la Veuve Desaint, Paris, 1788, nouvelle édition, Paris, 1888.

[31] Pierre Simon de LAPLACE *Exposition du Système du Monde* 1796, Œuvres, Imprimerie Royale, t .6 1846, et *Œuvres complètes de Laplace*, Gauthier-Villars, Paris (dernier tome, XIV, MCMXII).

[32] Gottfried Wilhelm LEIBNIZ *Opusculs philosophiques choisis* (traduits par P. Schrecker), Vrin, Paris, 1969.

[33] Alexandre LIAPOUNOFF *Problème général de la stabilité du mouvement*, Annales de la faculté de Toulouse, deuxième série, Tome IX, 1907, (Editions Jacques Gabay, Paris, 1988)

(http://archive.numdam.org/ARCHIVE/AFST/AFST_1907_2_9_/AFST_1907_2_9__203_0/AFST_1907_2_9__203_0.pdf)

- [34] James Clerk MAXWELL On the stability of motion of Saturn's rings, *Scientific papers of J.C. Maxwell*, Dover, New York, 1890, t.1, 288-376.
- [35] James Clerk MAXWELL On governors, *Proc. Royal Soc. of London*, 16 (1868) 270-283.
- [36] John MAY Stable algebraic topology 1945-1966, in *History of Topology* (I.M. James ed.) North Holland-Elsevier, Amsterdam, 1999.
- [37] Emmy NOETHER Invariante Variationsprobleme *Göttinger Nachrichten* (1918) 235-257 et *Gesammelte Abhandlungen/ Collected papers* (N. Jacobson ed.), Springer-verlag, Heidelberg, 1983.
- [38] Henri POINCARÉ Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. *Acta Math.* 13 (1890), 1-270.
- [39] Henri POINCARÉ Sur les courbes définies par des équations différentielles, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 4^e série, t.1, (1885) 167-244.
- [40] Henri POINCARÉ Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation, *Acta Math.* t. VII, (1885), p.259-380.
- [41] H. POINCARÉ, *Science et méthode* Flammarion, Paris, 1908 et Editions Kimé, Paris, 2000.
- [42] Siméon Denis POISSON Mémoire sur les équations générales de l'équilibre des corps solides élastiques et des fluides, *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 20^e Cahier, 13 (1831) 1-174.
- [43] Edward J.ROUTH *A treatise on the stability of a given state of motion* Macmillan London, 1877.
- [44] David RUELLE –Floris TAKENS On the nature of turbulence, *Comm. Math. Phys.*, 20 (1981)167-192 ; 23, 343-344.
- [45] Stephen SMALE 1966. Structurally stable systems are not dense, *American Journal of Mathematics* **88**, 491–496.
- [46] Baruch SPINOZA *Ethique*, Garnier-Flammarion, Paris, 1965.
- [47] William THOMSON–Peter Guthrie TAIT *Treatise on Natural Philosophy*, Cambridge University. Press, 2 vol., 1879.
- [48] Balthasar VAN DER POL Forced oscillations in a circuit with nonlinear resistance (receptance with reactive triode), *Phil. Mag.*, 3, 65-80.

[49] Balthasar VAN DER POL- J.VAN DER MARK The Heartbeat considered as a Relaxation oscillation, and an Electrical Model of the Heart, *Phil. Mag. Suppl.* 6, (1928) pp 763--775

[50] Léonard De VINCI *Le Traité de la Peinture*, Jean de Bonnot, Paris, 1977.

BIBLIOGRAPHIE

Chapitre IV

Les Penseurs Grecs avant Socrate, De Thalès de Milet à Prodicos, Garnier, Paris, 1964

C.P. BRUTER : [IC] *De l'intuition à la controverse*, Blanchard, Paris, 1982

[AC] *Les Architectures du Feu, Considérations sur les Modèles dans le Sciences*, Flammarion, Paris 1982

[TP] *Topologie et Perception*, 3 vol., Maloine-Doin, Paris, (1974 & 1985 pour le vol. 1, respectivement 1976 et 1986 pour les vol. 2 et 3)

[NM] *Sur la Nature des Mathématiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1973

[PE] Quand le peintre s'approprie l'espace, *Tangente*, Hors
Série n° 23, M 05446, pp 24-27, 2005

DESCARTES *Œuvres philosophiques*, Garnier, Paris, 1963

PLATON :

Chez Garnier-Flammarion : LE BANQUET – PHÈDRE, LA
RÉPUBLIQUE, SECOND ALCIBIADE – HIPPIAS
MINEUR – PREMIER ALCIBIADE – EUTHYPHRON –
LACHÈS – CHARMIDE – LYSIS – HIPPIAS MAJEUR
– ION, PROTAGORAS – EUTHYDÈME – GORGIAS –
MÉNEXÈNE – MÉNON – CRATYLE, THÉÉTÈTE –
PARMÉNIDE, SOPHISTE – POLITIQUE – PHILÈBE –
TIMÉE – CRITIAS

Chez GF Flammarion : GORGIAS, LACHÈS – EUTHYPHRON

Chez la Société d'édition « Les belles lettres » : LES LOIS (XI-XII)
– EPINOMIS

Chez Gallimard, Bibliothèque de la Pléiade : ŒUVRES
COMPLÈTES

Chez Princeton University Press : Collected Dialogues (E.
Hamilton & H. Cairns Ed.) Vth Printing, 1969.