C. R. Acad. Sc. Paris, t. 273, p. 9-10 (5 juillet 1971) Série A

THÉORIE DES MATROÏDES. — *Déformations des matroïdes.* Note (*)
de M. **Claude P. Bruter**, présentée par M. André Lichnerowicz.

Soit M (E, $\mathfrak{S}$) un matroïde défini sur l'ensemble E de cardinal n, connexe et *élagué* : on entend par là que, quel que soit $e \in E$, les représentations géométriques associées à M et à M.(E — e) sont différentes. $\mathcal{B}$ désigne l'ensemble des bases de M; leur cardinal commun est b. Existe-t-il un rapport entre le matroïde donné et le matroïde équilibré [(1), chap. 3] défini sur le n-ensemble E dont toute b-partie est une base de ce matroïde noté M (= ; n, b]? La réponse est positive, et ce rapport peut s'établir au moyen de la notion de déformation [(1), chap. 3]. Le résultat est le suivant :

Théorème. — *Il existe une séquence de déformations* $h_1, \ldots, h_q$ *qui permettent de passer du matroïde* M[=; n, b] *au matroïde* M (E, $\mathfrak{S}$).

Ce théorème suggère une méthode pour dénombrer les matroïdes; il est également utile à l'étude des symétries des représentations géométriques des matroïdes et de leurs brisures.

Les lemmes suivants sont en particulier nécessaires pour l'établir :

Lemme 1. — *Étant donné un matroïde connexe* M *de codimension* k, *par tout point de la représentation géométrique associée à* M *passent au moins* k *droites connexes et distinctes.*

Démonstration. — Soit S un point de cette représentation géométrique. Supposons d'abord $k = 1$: le lemme est trivialement vrai. Supposons le lemme vrai jusqu'à l'entier naturel $k - 1$, et que S repose dans un k-plan P_k. S repose en particulier dans un P_{k-2} plan connexe contenu dans P_k. Il existe, d'après [(2), 4.26], deux $(k-1)$-plans P_{k-1} et P'_{k-1} distincts et connexes P_k qui se rencontrent suivant P_{k-2}. D'après l'hypothèse de récurrence, S repose sur $k - 1$ droites au moins de P_{k-1} : $D_1, \ldots, D_{k-2}, D_{k-1}$ et $k - 1$ droites au moins de P'_{k-1} : $D_1, \ldots, D_{k-2}, D'_{k-1}$. D_{k-1} et D'_{k-1} sont distinctes sinon P_{k-1} et P'_{k-1} seraient identiques contrairement à l'hypothèse. On en déduit le lemme.

C. Q. F. D.

Lemme 2. — *Soit* M *un matroïde connexe, élagué, représenté géométriquement par un k-plan. Tout point de la géométrie associée à* M *repose sur exactement* k *droites connexes et distinctes si et seulement si le matroïde est équilibré.*

Démonstration. — Supposons que le matroïde équilibré M (E, $\mathfrak{S}$) défini sur l'ensemble E de cardinal n ait pour codimension $k : k + 1$ éléments de E sont nécessaires et suffisants pour représenter l'ensemble des stigmes de M. Par suite, chaque stigme possède au moins $n-k$ éléments. Mais puisque M est équilibré, tous les stigmes ont par définition même cardinal; celui-ci ne peut être que $n-k$. Par [(1), 2.10] toute droite repose sur $n-k+1$ stigmes et sur $n-k+1$ éléments. Puisqu'une droite repose sur deux points distincts [(2), 4.22], le nombre de droites distinctes reposant sur S, toutes connexes, est égal à k.

Montrons la proposition réciproque. Elle est vraie si $k=1$. Nous la supposons également vraie jusqu'à l'entier naturel $k-1$. Montrons qu'elle l'est encore pour k. Soit S un point de la géométrie associée à M. Par ce point passent k droites $D_1, \ldots, D_k$. La droite D_k s'écrit $D_k = S \cup S_k$ avec $S_k = (S - (e \cup \ldots \cup e_m)) \cup (f_{k,0} \cup \ldots \cup f_{k1})$ où e_i (resp. $f_{k,j}$) élément de S (resp. de $S_k - S$) subdivise e (resp. $f_{k,0}$), et cela d'après [(2), 4.26] et [(1), 3.1]. De plus, l'élément $f_{k,0}$ est spécifique de D_k par ces mêmes théorèmes de construction des droites : $f_{k,0} \in D_j$ si et seulement si $j=k$. La codimension du matroïde engendré par ce faisceau de droites est k; il se confond avec le matroïde M. Puisque celui-ci est élagué $M' = M.(E - f_{k,0})$ est un matroïde de codimension $k-1$ qui contient $D_1, \ldots, D_{k-1}$ mais non D_k. D'après le lemme 1, par tout point de M passent au moins $k-1$ droites. Par suite, S repose exactement sur $k-1$ droites dans M. Nous pouvons renouveler cet argument pour tout autre point S' de $M \times (E - f_{k,0})$. Par l'hypothèse de récurrence celui-ci est équilibré. On en déduit que la droite D_k est minimale. On fait alors parcourir à S la droite D_k, et on renouvelle les arguments précédents : les faisceaux de droites qui s'appuient sur D_k et d'une manière plus générale toutes les droites du matroïde M seront minimales : ce qui établit que M est équilibré.

C. Q. F. D.

Si donc M, de codimension k, n'est pas équilibré, il existe au moins un point S de sa géométrie associée qui repose sur plus de k droites.

On montre alors qu'on peut faire éclater ce point S en constellations de points formant des k-simplexes, l'opération inverse de cet éclatement étant ce que nous avons appelé une déformation.

(*) Séance du 21 juin 1971.

(1) C. P. Bruter, *Éléments de Théorie des Matroïdes*, Publ. Départ. Math., Brest, 1970.
(2) W. T. Tutte, *Lectures on Matroïds* (*J. Res. Nat. Bur. Stand.*, 69-B, 1965).

Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
avenue Victor-Le Gorgeu,
29 N-*Brest, Finistère*
et 33, *boulevard Dubreuil*, 91-*Orsay*,
Essonne.