Université Paris XII – Val de Marne

PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES

C.P. BRUTER

Sur la décomposition des champs de vecteurs

Mathématiques
UER Sciences
Av. Général de Gaulle
94010 CRÉTEIL Cedex

Sont pris en considération des textes écrits en langues anglaise et française portant sur:

- les mathématiques pures et appliquées — série brique
- les mathématiques et la philosophie naturelle — série verte

Are taken under consideration texts in English or French on :

- Pure and Applied Mathematics — brick series
- Mathematics and Natural Philosophy — green series

Série brique

1. **C.P. BRUTER** Topologie. *(Avant-Propos et Introduction, Topologie générale. Techniques de construction. Principaux objets. Techniques d'étude. Principales propriétés des variétés et espaces libres. Mouvement dans les variétés). 1981.*

2. **C.P. BRUTER** Mathématiques pour Elèves-Instituteurs. *(Avertissement. Quelques propriétés des nombres naturels. Une méthode pour construire entiers et rationnels. Motifs de base des constructions topologiques. Applications des deux grands théorèmes de la géométrie euclidienne à la théorie des nombres. Calcul des p-volumes. Nombres complexes et géométrie. Les groupes et le mouvement. Bibliographie. Appendices). 1982.*

3. **C.P. BRUTER** *Sur la décomposition des champs de vecteurs.*

Série verte

1. **C.P. BRUTER** Système. Développement. Mémoire. *(Avant-propos. Topologie et Analyse des Systèmes. La théorie des systèmes est-elle une théorie ? Développement et morphogénèse. Contraintes globales, systèmes conservatifs et bifurcations. Mémoire collective, éléments de classification. Modification du comportement et métaphores géographiques). 1981.*

2. **C.P. BRUTER** Considérations sur la philosophie et la pédagogie des Mathématiques . *(A paraître).*

AVERTISSEMENT

Le problème global de la décomposition des champs de vecteurs est loin d'être résolu. Je rassemble ici quatre textes portant sur la question.

Le premier, en anglais, résume la situation: il a été publié dans les actes d'un Colloque tenu à Orléans en Janvier 1982, portant sur les interactions non-potentielles; je participai à ce Colloque avec l'espoir de mieux comprendre la physique sous-jacente à ce problème de décomposition des champs de vecteurs.

Le second texte a été rédigé en 1978. On peut admettre aujourd'hui que le cercle des spécialistes ayant connaissance des résultats élémentaires qu'il contient est assez large. Ce texte figurait en deuxième partie d'un article dont la section 1 est à préciser. Les deux parties étant indépendantes l'une de l'autre, le referee suggérait, non sans raison, de publier la seconde partie ailleurs. J'ai choisi de l'inclure dans ce recueil qui constitue, me semble-t-il, un outil de travail pour le chercheur intéressé par le problème posé.

Le troisième texte est la note de J.Roels qui donne les premiers résultats locaux en dimension 2.

Le dernier texte, résultat de la collaboration entre Vilela Mendes et Taborda Duarte, résoud une question que j'avais suggérée à ce dernier de traiter: déterminer un algorithme pour obtenir la décomposition locale de Roels.

Bures, 7 Novembre 1982.

HADRONIC JOURNAL 5, 1748–1753 (1982)

INTERACTION BETWEEN CONSERVATIVE AND GRADIENT–LIKE SYSTEMS

C. P. Bruter
Mathématiques
Université Paris 12
F–94010 Creteil Cedex, France

Received February 3, 1982

Abstract

This paper is devoted to the taxonomy of physical forces through recent mathematical results.

INTERACTION BETWEEN CONSERVATIVE AND GRADIENT-LIKE SYSTEMS

C.P.BRUTER
Mathématiques, Université Paris 12

Abstract: This paper is devoted to the taxonomy of physical forces through recent mathematical results.

I. A few philosophical considerations

1. Scientific methodology proceeds from the global to the local. A typical example is given by the way the theoretician sets up the physical laws: he starts with global concepts and functions He looks at local variations, and deduces an equation which is locally valid.

The use of global entities is partly justified by the observed similarity of the behaviour of phenomena on the entire observational domain. The scientist feels he is confronted by a unique general phenomenon, which behaves locally slightly differently according to the value of the local coordinates. He wants to attach a corresponding global mathematical representation to the global phenomenon.

But in fact he has no means to grasp the whole. His apparati are only able to measure local variations of the phenomena. Thus he will be able to give a numerical sense only to local (partial) differential equations.

If the theorician is right in his formulation of the problem, the resolution of the local problems must give rise to the global functions, among others, from which the theorician has started. If this scope cannot be achieved, the problem is considered as ill-posed. For instance, W.SHI |5| has shown that the Navier-Stokes problem in the space-time $R^3 x\ R$ is ill-posed when the speed are null on the boundary $\Sigma = Sx|0, T|$, or tangent to it - but not of course if their norms are infinitely small.

It may happen that the problem is well-posed only on a subdomain U of the whole domain under consideration. In that case, an interesting and open problem in the general case is to find the largest possible domain $\hat{U}$ on which the local solutions can be globalized.

2. Even from a computational point of view, the positio of the equal sign in an equation makes sense. But let us look only at the semantical point of view.

When one writes $\dot{x} = f(x,t)$, this symbolization means tha the value of the vector $\dot{x}$ is the preassigned function $f(x,t)$.

But if one writes $\dot{x} - f(x,t) = 0$, this symbolization means that the difference between $\dot{x}$ and $f(x,t)$ is always null: this is how a conservation law is typically written.

Non-conservative laws appear when inequalities like $A(t) \leq B($ are involved, as, for example, when realistic considerations on the thermodynamic states of the system or on the interplay among forces which act on it are taken into account.

Another non-conservative condition is the fact that time bears an arrow. Any mechanical model which ignores this condition i an incomplete one.

3. The first step of any scientific process is to set up a taxonomy. Physicists try to classify the entelechies they call forces, and to characterize each class by a mathematical law. They are used to distinguishing between two kinds of forces: conservativ and non-conservative forces. Physical considerations and mathematical results call for an improvement of this primary classification which we are going to consider now.

II Some mathematical results

1. An attempt was made by F.TAKENS | 6 | to classify vectorfields through a stratification process of increasing codimen sion. The basis of this stratification lies in mathematical conside rations. When the dimension n of the space on which the vectorfield are defined exceeds 5, there is no stratification. This negative re sult led me to think that the Takens'process of stratification was not really pertinent.

I thought that the classification of vectorfields should be made on more physical grounds, and should take into account the kno ledge we already have about vectorfields. We should try to decompos the vectorfields into gradient, hamiltonian, Morse-Smale vectorfiel components and so on | 2 | . I told THOM the idea. He then discussed it with ROELS who stated the following result which I shall easily prove later. In the sequel, everything will be C^∞.

2. Roels 'result| 3 |: Let M be a 2 dimensional compact manifold, $\mathcal{X}$ a vectorfield on M, ω a symplectic form an M, g a riemannian metric on M, then there exists a local decomposition of $\mathcal{X}$ into a gradient and an hamiltonian vectorfield.

Analysing this result, I saw that:

(i) Roels'result can be globalized: on M, globally $\mathcal{X} = \mathcal{H} + \mathcal{G}$.

(ii) The trajectories defined by $\mathcal{H}$ and $\mathcal{G}$ meet transversally (they are never tangent).

More generally, I could show the following result:

(iii) Let M be a (para-)compact manifold of any dimension. With respect to some precise equivalence relations, the vectorspace of conservative vectorfields on M is dual to the vectorspace of gradient vectorfields on M.

Besides, the trajectories associated with a gradient vectorfield meet transversally the trajectories associated with the corresponding conservative vectorfield.

Definitions: By conservative vectorfield is meant here a vectorfiel such that there is a function f: M → R, which is constant on each trajectory. Any such conservative vectorfield can be obtained from an associated hamiltonian vectorfield through multiplication by a function defined on M.

In the same way, I will say that a vectorfield on M is gradient-like if it can be obtained from a gradient vectorfield on through multiplication by a function defined on M.

Roels'result implies all at once that:

(iv) Any vectorfield on M is locally the sum of a gradient and an hamiltonian component.

I have proved all these results during the Portuguese conferences that Thom and I did at Lisboa and Porto in 1978. The proofs should appear with other results in |1 |.

Recently, an algorithm for finding such a local decompositio was given by VILELA-MENDES and TABORDA-DUARTE| 7 | .

Result (iv) is really trivial: you get it in building a 2-pl ne which contains the vector X of the field at a given point, and i applying Roels'lemma. But this result is very weak since through X there is an infinity of 2-planes. Besides, it is a local result, an for a physicist, the global result is fairly more significant.

The result (iii) suggests that the globalization can be got i the following way:

(v) Conjecture: Under the previous conditions, any vectorfield on M is the global sum of a gradient-like vectorfield and of a conse vative vectorfield.

A proof of this conjecture might lie in the properties of th fibration of the Grasmannians over X.

I suppose that for a physicist, the conjecture as such seems trivial.

A similar and classical result concerns the decomposition of vectorfields into a solenoïdal component and an irrotational componen

$$X = S + I$$

with curl S = 0 and div I = 0.

This result may also look quite natural to a physicist. It can be used to give a trivial proof of Roels'result, formulated in a less sophisticated way:

Proof: Let $S = (P(x,y),Q(x,y))$ and $I = (A(x,y),B(x,y))$. Since every thing is smooth, we can alwaysfind a differentiable function $G(x,y)$ such that $P = \frac{\partial G}{\partial x}$, $\int P dx = G$.

Then

$$\int \frac{\partial P}{\partial y} dx = \frac{\partial G}{\partial y}$$

, and since $\operatorname{curl}(P,Q) = 0$,

$$\int \frac{\partial P}{\partial y} dx = \int \frac{\partial Q}{\partial x} dx = Q(x,y) = \frac{\partial G}{\partial y} .$$

In other words, S is a gradient vector.

In the same way, put $A(x,y) = \frac{\partial H}{\partial y}$. Then $\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}$. Since $\operatorname{div}(A,B) = 0$, $\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial B}{\partial y}$. Thus, for a convenient choice of the "constant of integration",

$$B(x,y) = - \frac{\partial H}{\partial x} .$$

I is an hamiltonian vector.

III An application

Gradient vector fields are of great interest from a mathematical point of view because of the simplicity of their structure, and because of the relative ease for the study of their structural stability.

According to the conjecture, a great deal of observable physical and static morphologies should be derived from gradient-like vectorfields: let $H = T + U$ be an hamiltonian, U is a potential function and T the kinetic energy. Suppose that around an attractor, th speeds of evolution be very weak: T is negligeable, and, close to th attractor, H behaves almost like U. In that case $X = H + G \simeq U + G$ behaves like a gradient vectorfield.

This consideration |2| justifies to a large extent the use of elementary catastrophe theory which is based on the correlations of structural stability between functions and gradient vectorfields

IV On the classification of forces

Roels'proof is based on the Hodge-De Rham's theorem: the vectorspace of differential p-forms is the direct sum of three spaces, a vectorspace of closed differential p-forms, a vectorspace of co-closed differential p-forms, and a vectorspace of both closed an co-closed or harmonic differential p-forms.

The question of the interest of this theorem arises. If we go back to vectorfields, it forces us to distinguish for instance gradient vectorfields including sinks or sources from gradient vectorfields without sinks or sources -harmonic vectorfields - and to refine the conjecture (v).

In the long run, it might be useful for the neophyte that the mathematician is , that the physicist who considers a specific kind of force, name at once the class to which the force belongs: full gradient, harmonic, full conservative. For instance, J.SALMON | 4 |, introducing "environmental forces" distinguishes between a disipating force which should be of full gradient type, and a diffusion force which should be of harmonic type. Though we have some mathematical results on the properties of harmonic maps, it is not sure that we have achieved a full understanding of their physical nature.

BIBLIOGRAPHY

| 1 | C.P.BRUTER Sur une généralisation du système de Liénard-Van de Pol, J. of Diff. Equa.

| 2 | C.P.BRUTER Les Architectures du Feu (Réflexions sur les modèle dans les sciences) Flammarion, Paris, Mars 1982.*

| 4 | J.SALMON Le gradient du logarithme de la fonction de distribution et l'expérience , this journal.

| 5 | W.SHI Quelques notions élémentaires sur les équations aux dérivées partielles, preprint.

| 6 | F.TAKENS Singularities of vector fields, Publ. IHES, 43 (1974) 47-99.

| 7 | R.VILELA-MENDES, J.TABORDA-DUARTE Decomposition of vectorfield and mixed dynamics J.Math.Phys., 22, 7(1981) 1420-1422.

| 3 | J.ROELS Sur la décomposition locale d'un champ de vecteurs sur une surface symplectique en un gradient et un champ hamiltonie C.R.Ac.Sc,Paris, série A, 278 (1974) 29-31.

*?Septembre 1982

Deuxième partie : décomposition des champs de vecteurs

2.1. Un théorème de dualité.

Dans ce qui suit, V désigne une variété de classe C^2 au moins, de dimension n, paracompacte, munie d'une métrique riemannienne g.

Considérons l'espace $\mathcal{I}(V)$ des champs de vecteurs C^∞ sur V, admettant des intégrales premières f. Par intégrale première, il faut entendre ici une fonction $f : V \to \mathbb{R}$, différentiable, et de valeur constante sur chaque trajectoire. On considère sur $\mathcal{J}(V)$ la relation d'équivalence R : $\mathcal{X} R \mathcal{X}'$ si et seulement si f est identique à f'. On définit sur l'espace quotient $\mathcal{G}^*(V) = \mathcal{J}(V)/R$ une structure d'espace vectoriel réel, en posant, pour tout λ réel, $\lambda\mathcal{X} = \mathcal{X}'$ si et seulement si $\lambda f = f'$, $\lambda\mathcal{X} + \lambda'\mathcal{X}' = \mathcal{X}''$ si et seulement si $\lambda f + \lambda' f' = f''$. Parallèlement, on définit sur $\mathcal{G}(V)$, espace des champs de vecteurs gradients C^∞ sur V, une structure d'espace vectoriel réel, en posant, pour tout λ réel $\lambda\mathcal{X} = \mathcal{X}'$ si et seulement si $\mathcal{X} = -\mathrm{grad}\, f$ entraîne $\mathcal{X}' = -\mathrm{grad}\,\lambda f$, $\lambda\mathcal{X} + \lambda'\mathcal{X}' = \mathcal{X}''$ si et seulement si $\mathrm{grad}\,\lambda f + \mathrm{grad}\,\lambda' f' = \mathrm{grad}\, f''$.

Théorème 16: $\mathcal{G}^*(V)$ et $\mathcal{G}(V)$ sont isomorphes en tant qu'espaces vectoriels.

La démonstration résulte immédiatement du lemme suivant :

Lemme 17: Il existe une bijection entre champs de vecteurs $\mathcal{X}^*$ sur V possédant des intégrales premières f, et champs de vecteurs gradients sur V. Si $\mathcal{X}$ est en bijection avec $\mathcal{X}^*$ les trajectoires associées à $\mathcal{X}$ sont transverses aux trajectoires associées à $\mathcal{X}^*$.

Démonstration : Soit x un point régulier du champ $\mathcal{X}^*$, situé sur la trajectoire $\mathcal{T}$, et $X^*(x)$ la valeur du champ en ce point. Puisque la valeur de f est invariante le long de $\mathcal{T}$, la dérivée de Lie de f dans la direction $X^*(x)$ est nulle : $X^*(x) \,.\, f = df(X^*(x)) = 0$. Identifions $df \in T^*_xV$ avec l'élément $X(x) = \mathrm{grad}\, f_x \in T_xV$ par l'isomorphisme naturel entre espaces tangent et cotangent, pour une métrique riemannienne quelconque g définie sur V. Si $X^*(x) = 0$, on pose $X(x) = 0$. Alors pour la métrique choisie, le produit scalaire $\langle X(x), X^*(x)\rangle = 0$. Ainsi, $= \{X(x) \mid x \in V\}$ est un champ de vecteurs gradients défini par f, orthogonal et donc transversal, au champ $\mathcal{G}^*$. Etant données les propriétés de $\mathcal{X}^*$ dans $\mathcal{G}^*(V)$, l'application $\mathcal{G}^* \to \mathcal{G}$ est injective.

Réciproquement, l'application $G^* \to G$ est surjective. En effet, tout système gradient défini par le champ X sur V possède des lignes de niveau situées en position transverse par rapport à ses trajectoires. On peut considérer ces lignes de niveau comme les trajectoires associées à un champ de vecteurs X^* sur V , qui possède évidemment des intégrales premières f : leur valeur, sur chaque trajectoire, est égale, à une constante près, à la "hauteur" du niveau de cette trajectoire.

Q.E.D.

Ce résultat général suggère que tout champ de vecteurs pourrait s'obtenir par combinaison d'un champ de vecteurs gradients et d'un champ de vecteurs X_I admettant une intégration première (rappelons que si V est de dimension paire, pour toute forme symplectique ω sur V , existe un champ hamiltonien $Y_{H,\omega}$ tel qu'en tout point x , $X_I(x) = Y_{H,\omega}(x) \cdot g(x)$ ou g est une fonction sur V : par suite, toute décomposition de g induit une décomposition correspondante de X_I).

Une telle décomposition existe si V est de dimension 2 - elle fut le point de départ de cette étude . J. Roels a démontré le résultat significatif suivant dont nous reproduisons l'énoncé originel [13] :

<u>Lemme 18</u> : <u>Sur une surface tout champ de vecteurs est localement la somme d'un champ hamiltonien et d'un champ de gradient pour la métrique euclidienne</u>.

La démonstration du lemme de Roels appelle plusieurs remarques.

2.2. <u>Remarques et problèmes ouverts</u>.

<u>Remarque 1</u> : Cette démonstration s'appuie pour l'essentiel sur le théorème de Kodaira-Hodge-De Rham selon lequel toute forme différentielle de degré p,ξ , est <u>somme directe</u> d'une forme fermée de degré p,α , d'une forme cofermée de degré p,β , et d'une forme harmonique de degré p,γ . Par conséquent si ξ est nul, il en est de même de α , β et γ .

La forme ξ correspond au champ donné $X(x)$, la forme fermée α à la composante hamiltonienne $X_H(x)$, la forme cofermée $\beta + \gamma = \eta$ à la composante gradient $X_G(x)$. Les correspondances entre les formes et leurs images sont des isomorphismes. Il en résulte que le lemme de Roels est valide en tout point x de la surface V , que ce point soit régulier ou singulier pour le champ X .

Remarque 2 (Lichnerowicz) : Dans le cas où V est kählérienne, la décomposition précédente correspond à celle de la forme image d'un vecteur holomorphe en somme d'une 1-forme fermée et d'une 1-forme produit par l'opérateur de structure complexe d'une 1-forme fermée.

Remarque 3 : Cette remarque est exrpimée par la proposition suivante dont la démonstration du théorème a montré le caractère de généralité :

Proposition 19 : Les champs de vecteurs X_H et X_G sont en position transverse.

Démonstration : α_x est l'image de $X_H(x)$ par l'application $\bar{\omega}$ où $\bar{\omega} : T_xV \to T_x^*V$ est telle que $i_{X_H}(\omega) = \alpha, \omega$ désignant une 2-forme de rang 2 sur V. Supposons que X_H et X_G ne soient pas en position transverse. Alors il existe un scalaire non nul λ tel que $X_H = \lambda X_G$. Par suite $\bar{\omega}(X_H) = \lambda\bar{\omega}(X_G)$, en d'autres termes $\alpha = \lambda\eta$. Cette dernière relation contredit le fait que α et η appartiennent à deux facteurs différents de la décomposition de ξ en somme directe.

Q.E.D.

Remarque 4 : Nous supposerons ici que tout voisinage U de x dans V ne contient pas de sous-ensemble dense de points singuliers.

Soient x et x' deux points de U, et $c:[0,1] \to V$ un chemin différentiable joignant x et x'. Supposons que $X(c(t)) = X(t,c)$ appartienne à un champ de vecteurs différentiables sur V. Munissons l'espace des champs de vecteurs différentiables et l'espace des 1-formes différentielles sur V de la C^∞-topologie de Whitney. Alors, par l'isomorphisme $\bar{\omega}$, la variation différentiable avec t de $X(t,c)$ se traduira par une variation différentiable de $\bar{\omega}(X(t,c)) = \xi(t,c)$, ainsi que des formes $\alpha(t,c)$, $\eta(t,c)$ et $\eta'(t,c)$ où $\eta'(t,x)$ désigne la 1-forme localement fermée telle que $\bar{\omega}(\eta(t,c)) = \bar{g}$ $\bar{\omega}^*(\eta(t,c)) = \bar{g}^*(\eta'(t,c)) = X_G(t,c)$: l'application $\bar{g}^*_{c(t)} : T^*_{c(t)}V \to T_{c(t)}V$ est l'isomorphisme inverse qui à tout vecteur X de T_xV associe la forme linéaire $g_{c(t)}(X)$, issue de la métrique riemannienne g. Par suite le champ des vecteurs $X(x)$ sur U, défini par une section différentiable $s_{X|U}$ du fibré tangent $TV_{|U}$ par l'intermédiaire des isomorphismes ω^* et $\bar{g}^*$, a pour images dans le fibré associé des 1-formes extérieures sur V, les sections différentiables $s_{\eta|U}$, et $s_{\eta'|U}$ et $s_{\alpha|U}$.

On peut par conséquent :

i) étendre le théorème local sur toute l'étendue d'un voisinage quelconque du point x de V.

ii) exprimer l'énoncé du théorème local dans le langage des germes de champs de vecteurs.

Remarque 5 : L'extension du lemme de Roels se heurte à de sérieuses difficultés. La première, celle de la parité de la dimension de la variété V, peut être levée rapidement. Car si V n'est pas de dimension paire, on construit $V' = V \times [0,1]$ que l'on munit du champ de vecteurs $(X(x),0)$, et sur laquelle on travaille. On supposera donc désormais que V est de dimension paire.

On peut alors donner une version très locale du lemme de Roels pour une variété V de dimension quelconque, en procédant ainsi. On peut toujours trouver, a priori, une 2-forme symplectique sur V de sorte que $X(x)$ admette en x une décomposition (en composantes gradient et hamiltonienne) qui appartienne à T_xV. Soit en effet un système de coordonnées locales $(y_1,\ldots,y_n)$ pour lequel $X(x) = \partial/\partial y_1$. On opère un changement de coordonnées locales; le nouveau système s'écrit par exemple $(z_1 = y_1,\ z_2 = y_1 + y_2,\ z_3 = y_3,\ldots,z_n = y_n)$. Dans ce système, $X(x)$ appartient à la sous-variété de dimension 2 (z_1, z_2). Munissons V d'une 2-forme symplectique

$$\omega(z) = dz_1 \wedge dz_2 + \text{autres termes ne contenant pas } dz_1 \text{ ni } dz_2 .$$

Alors $X(x)$ est, dans le sous-espace (z_1,z_2) somme d'une composante hamiltonienne et d'une composante gradient pour la métrique $g_{|(z_1,z_2)}$ et la 2-forme $\omega(z)_{|(z_1,z_2)}$. Par conséquent, par injection triviale, $X(x)$ admet la même décomposition pour la métrique g et la forme $\omega(z)$ sur V, dont les composantes appartiennent à T_xV.

On remarquera cependant que, dans le système de coordonnées locales (z_i) d'origine x, la composante gradient s'écrit :

$$X_G(x) = \frac{\partial\psi}{\partial z_1}(z_1(x),z_2(x)dz_1 + \frac{\partial\psi}{\partial z_2}(z_1(x),z_2(x))dz_2$$

Elle ne dérive pas, en général, d'un potentiel défini globalement sur V.

La composante hamiltonienne ne pose pas moins de problèmes. Soit $h(z)$ la valeur de la fonction d'énergie associée au champ hamiltonien local. Par suite des propriétés de continuité et de différentiabilité, il existe une fonction H définie sur V dont la valeur en chaque point x est $h(x)$. On sait alors qu'existe un champ hamiltonien $Y_{H,\omega}$ sur V tel que $i_{Y_{H,\omega}} \omega = -dH$. Mais, en général, les champs X_H et $Y_{H,\omega}$ ne sont pas colinéaires.

On en est donc réduit, pour l'instant, à considérer des cas particuliers, comme celui où le champ de vecteurs donné définit sur la variété V un feuilletage de codimension $n-2$. On peut alors étendre le lemme de Roels sur V .

Problèmes ouverts :

1. Une première classe de problèmes est celle de l'étude des champs de vecteurs dont la forme différentielle associée est soit fermée, soit co-fermée, soit harmonique.

2. Un second problème est celui de trouver un algorithme efficace qui mette en évidence la décomposition d'un champ de vecteurs donné sur une variété riemannienne de dimension 2, muni d'une forme symplectique, en ses composantes hamiltonienne et gradient.

3. Lorsque le système est du type L , la décomposition est évidente. L'hamiltonien est égal à $-[k \frac{u^2}{2} + \frac{1}{k} \int g(x)dx]$, alors que $k \int F(x)dx$ est le potentiel d'où dérive le champ de gradients. On constate que nous n'avons pas exploité, dans cette étude, la connaissance de la manière dont se décompose le champ donné. Cependant, le théorème de décomposition prend sans doute son principal intérêt lorsque s'annule l'une des composantes gradient ou hamiltonienne, et que l'on s'intéresse alors aux questions de stabilité et de bifurcation. Une application de ce théorème venant à l'appui de la théorie des catastrophes a été proposée dans [7] . De toute façon, à supposer donné un champ de vecteurs décomposable en somme d'un champ de gradients et d'un champ possédant une intégrale première, il reste à préciser les résultats que l'on peut déduire de l'existence d'une telle décomposition.

4. On notera, pour conclure, qu'il ne semble pas qu'on ait jusqu'à présent exploité le phénomène de dualité entre systèmes gradients et systèmes conservatifs pour l'étude de la bifurcation de ces derniers, alors que la bifurcation des systèmes gradients est maintenant chose connue.

===========

==