Université Paris XII – Val de Marne

PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES

C.P. BRUTER

Sur la décomposition des champs de vecteurs

Mathématiques
UER Sciences
Av. Général de Gaulle
94010 CRÉTEIL Cedex

Sont pris en considération des textes écrits en langues anglaise et française portant sur:

- les mathématiques pures et appliquées — série brique
- les mathématiques et la philosophie naturelle — série verte

Are taken under consideration texts in English or French on :

- Pure and Applied Mathematics — brick series
- Mathematics and Natural Philosophy — green series

Série brique

. C.P. BRUTER — Topologie. *(Avant-Propos et Introduction, Topologie générale. Techniques de construction. Principaux objets. Techniques d'étude. Principales propriétés des variétés et espaces libres. Mouvement dans les variétés). 1981.*

. C.P. BRUTER — Mathématiques pour Elèves-Instituteurs. *(Avertissement. Quelques propriétés des nombres naturels. Une méthode pour construire entiers et rationnels. Motifs de base des constructions topologiques. Applications des deux grands théorèmes de la géométrie euclidienne à la théorie des nombres. Calcul des p-volumes. Nombres complexes et géométrie. Les groupes et le mouvement. Bibliographie. Appendices). 1982.*

. C.P. BRUTER — *Sur la décomposition des champs de vecteurs.*

Série verte

1. C.P. BRUTER — Système. Développement. Mémoire. *(Avant-propos. Topologie et Analyse des Systèmes. La théorie des systèmes est-elle une théorie ? Développement et morphogénèse. Contraintes globales, systèmes conservatifs et bifurcations. Mémoire collective, éléments de classification. Modification du comportement et métaphores géographiques). 1981.*

2 C.P. BRUTER — Considérations sur la philosophie et la pédagogie des Mathématiques . *(A paraître).*

AVERTISSEMENT

Le problème global de la décomposition des champs de vecteurs est loin d'être résolu. Je rassemble ici quatre textes portant sur la question.

Le premier, en anglais, résume la situation: il a été publié dans les actes d'un Colloque tenu à Orléans en Janvier 1982, portant sur les interactions non-potentielles; je participai à ce Colloque avec l'espoir de mieux comprendre la physique sous-jacente à ce problème de décomposition des champs de vecteurs.

Le second texte a été rédigé en 1978. On peut admettre aujourd'hui que le cercle des spécialistes ayant connaissance des résultats élémentaires qu'il contient est assez large. Ce texte figurait en deuxième partie d'un article dont la section 1 est à préciser. Les deux parties étant indépendantes l'une de l'autre, le referee suggérait, non sans raison, de publier la seconde partie ailleurs. J'ai choisi de l'inclure dans ce recueil qui constitue, me semble-t-il, un outil de travail pour le chercheur intéressé par le problème posé.

Le troisième texte est la note de J.Roels qui donne les premiers résultats locaux en dimension 2.

Le dernier texte, résultat de la collaboration entre Vilela Mendes et Taborda Duarte, résoud une question que j'avais suggérée à ce dernier de traiter: déterminer un algorithme pour obtenir la décomposition locale de Roels.

Bures, 7 Novembre 1982.

HADRONIC JOURNAL 5, 1748–1753 (1982)

INTERACTION BETWEEN CONSERVATIVE AND GRADIENT–LIKE SYSTEMS

C. P. Bruter
Mathématiques
Université Paris 12
F–94010 Creteil Cedex, France

Received February 3, 1982

Abstract

This paper is devoted to the taxonomy of physical forces through recent mathematical results.

INTERACTION BETWEEN CONSERVATIVE AND GRADIENT-LIKE SYSTEMS

C.P.BRUTER
Mathématiques, Université Paris 12

Abstract: This paper is devoted to the taxonomy of physical forces through recent mathematical results.

I. A few philosophical considerations

1. Scientific methodology proceeds from the global to the local. A typical example is given by the way the theoretician sets up the physical laws: he starts with global concepts and functions He looks at local variations, and deduces an equation which is locally valid.

The use of global entities is partly justified by the observed similarity of the behaviour of phenomena on the entire observational domain. The scientist feels he is confronted by a unique general phenomenon, which behaves locally slightly differently according to the value of the local coordinates. He wants to attach a corresponding global mathematical representation to the global phenomenon.

But in fact he has no means to grasp the whole. His apparati are only able to measure local variations of the phenomena. Thus he will be able to give a numerical sense only to local (partial) differential equations.

If the theorician is right in his formulation of the problem, the resolution of the local problems must give rise to the global functions, among others, from which the theorician has started. If this scope cannot be achieved, the problem is considered as ill-posed. For instance, W.SHI |5| has shown that the Navier-Stokes problem in the space-time $R^3 \times R$ is ill-posed when the speed are null on the boundary $\Sigma = S \times |0, T|$, or tangent to it - but not of course if their norms are infinitely small.

It may happen that the problem is well-posed only on a subdomain U of the whole domain under consideration. In that case, an interesting and open problem in the general case is to find the largest possible domain $\hat{U}$ on which the local solutions can be globalized.

2. Even from a computational point of view, the positio of the equal sign in an equation makes sense. But let us look only at the semantical point of view.

When one writes $\dot{x} = f(x,t)$, this symbolization means tha the value of the vector $\dot{x}$ is the preassigned function $f(x,t)$.

But if one writes $\dot{x} - f(x,t) = 0$, this symbolization means that the difference between $\dot{x}$ and $f(x,t)$ is always null: this is how a <u>conservation law</u> is typically written.

Non-conservative laws appear when inequalities like $A(t) \leq B($ are involved, as, for example, when realistic considerations on the thermodynamic states of the system or on the interplay among forces which act on it are taken into account.

Another non-conservative condition is the fact that time bears an arrow. Any mechanical model which ignores this condition i an incomplete one.

3. The first step of any scientific process is to set up a taxonomy. Physicists try to classify the entelechies they call forces, and to characterize each class by a mathematical law. They are used to distinguishing between two kinds of forces: conservativ and non-conservative forces. Physical considerations and mathematical results call for an improvement of this primary classification which we are going to consider now.

II <u>Some mathematical results</u>

1. An attempt was made by F.TAKENS | 6 | to classify vectorfields through a stratification process of increasing codimen sion. The basis of this stratification lies in mathematical conside rations. When the dimension n of the space on which the vectorfield are defined exceeds 5, there is no stratification. This negative re sult led me to think that the Takens'process of stratification was not really pertinent.

I thought that the classification of vectorfields should be made on more physical grounds, and should take into account the kno ledge we already have about vectorfields. We should try to decompos the vectorfields into gradient, hamiltonian, Morse-Smale vectorfiel components and so on | 2 | . I told THOM the idea. He then discussed it with ROELS who stated the following result which I shall easily prove later. In the sequel, everything will be C^{∞}.

2. <u>Roels 'result</u> | 3 | : <u>Let M be a 2 dimensional compact manifold, $\mathcal{X}$ a vectorfield on M, ω a symplectic form an M, g a riemannian metric on M, then there exists a local decomposition of $\mathcal{X}$ into a gradient and an hamiltonian vectorfield</u>.

Analysing this result, I saw that:

(i) Roels'result can be globalized: on M, globally $\mathcal{X} = \mathcal{H} + \mathcal{G}$.

(ii) The trajectories defined by $\mathcal{H}$ and $\mathcal{G}$ meet transversally (they are never tangent).

More generally, I could show the following result:

(iii) Let M be a (para-)compact manifold of any dimension. With respect to some precise equivalence relations, the vectorspace of conservative vectorfields on M is dual to the vectorspace of gr dient vectorfields on M.

Besides, the trajectories associated with a gradient vectorfiel meet transversally the trajectories associated with the correspon- ding conservative vectorfield.

Definitions: By conservative vectorfield is meant here a vectorfiel such that there is a function f: M → R, which is constant on each trajectory. Any such conservative vectorfield can be obtained from an associated hamiltonian vectorfield through multiplication by a function defined on M.

In the same way, I will say that a vectorfield on M is gradient-like if it can be obtained from a gradient vectorfield on through multiplication by a function defined on M.

Roels'result implies all at once that:

(iv) Any vectorfield on M is locally the sum of a gradient and an hamiltonian component.

I have proved all these results during the Portuguese confe- rences that Thom and I did at Lisboa and Porto in 1978. The proofs should appear with other results in |1 |.

Recently, an algorithm for finding such a local decompositio was given by VILELA-MENDES and TABORDA-DUARTE| 7 | .

Result (iv) is really trivial: you get it in building a 2-pl ne which contains the vector X of the field at a given point, and i applying Roels'lemma. But this result is very weak since through X there is an infinity of 2-planes. Besides, it is a local result, an for a physicist, the global result is fairly more significant.

The result (iii) suggests that the globalization can be got i the following way:

(v) Conjecture: Under the previous conditions, any vectorfield on M is the global sum of a gradient-like vectorfield and of a conse vative vectorfield.

A proof of this conjecture might lie in the properties of th fibration of the Grasmannians over X.

I suppose that for a physicist, the conjecture as such seems trivial.

A similar and classical result concerns the decomposition of vectorfields into a solenoïdal component and an irrotational componen

$$X = S + I$$

with curl $S = 0$ and div $I = 0$.

This result may also look quite natural to a physicist. It can be used to give a trivial proof of Roels'result, formulated in a less sophisticated way:

Proof: Let $S = (P(x,y),Q(x,y))$ and $I = (A(x,y),B(x,y))$. Since every thing is smooth, we can alwaysfind a differentiable function $G(x,y)$ such that $P = \frac{\partial G}{\partial x}$, $\int P dx = G$.

Then

$$\int \frac{\partial P}{\partial y} dx = \frac{\partial G}{\partial y} \quad , \text{ and since } \operatorname{curl}(P,Q) = 0,$$

$$\int \frac{\partial P}{\partial y} dx = \int \frac{\partial Q}{\partial x} dx = Q(x,y) = \frac{\partial G}{\partial y} \quad .$$

In other words, S is a gradient vector.

In the same way, put $A(x,y) = \frac{\partial H}{\partial y}$. Then $\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}$. Since $\operatorname{div}(A,B) = 0$, $\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial B}{\partial y}$. Thus, for a convenient choice of the "constant of integration",

$$B(x,y) = - \frac{\partial H}{\partial x} \quad .$$

I is an hamiltonian vector.

III An application

Gradient vector fields are of great interest from a mathema tical point of view because of the simplicity of their structure, and because of the relative ease for the study of their structural stability.

According to the conjecture, a great deal of observable phy sical and static morphologies should be derived from gradient-like vectorfields: let $H = T + U$ be an hamiltonian, U is a potential fun tion and T the kinetic energy. Suppose that around an attractor, th speeds of evolution be very weak: T is negligeable, and, close to th attractor, H behaves almost like U. In that case $X = H + G \simeq U + G$ behaves like a gradient vectorfield.

This consideration | 2 | justifies to a large extent the use of elementary catastrophe theory which is based on the correlations of structural stability between functions and gradient vectorfields

IV On the classification of forces

Roels'proof is based on the Hodge-De Rham's theorem: the vectorspace of differential p-forms is the direct sum of three spaces, a vectorspace of closed differential p-forms, a vectorspace of co-closed differential p-forms, and a vectorspace of both closed an co-closed or harmonic differential p-forms.

The question of the interest of this theorem arises. If we go back to vectorfields, it forces us to distinguish for instance gradient vectorfields including sinks or sources from gradient vectorfields without sinks or sources -harmonic vectorfields - and to refine the conjecture (v).

In the long run, it might be useful for the neophyte that the mathematician is , that the physicist who considers a specific kind of force, name at once the class to which the force belongs: full gradient, harmonic, full conservative. For instance, J.SALMON |4|, introducing "environmental forces" distinguishes between a dissipating force which should be of full gradient type, and a diffusion force which should be of harmonic type. Though we have some mathematical results on the properties of harmonic maps, it is not sure that we have achieved a full understanding of their physical nature.

BIBLIOGRAPHY

|1| C.P.BRUTER Sur une généralisation du système de Liénard-Van de Pol, J. of Diff. Equa.

|2| C.P.BRUTER Les Architectures du Feu (Réflexions sur les modèle dans les sciences) Flammarion, Paris, Mars 1982.*

|4| J.SALMON Le gradient du logarithme de la fonction de distribution et l'expérience , this journal.

|5| W.SHI Quelques notions élémentaires sur les équations aux dérivées partielles, preprint.

|6| F.TAKENS Singularities of vector fields, Publ. IHES, 43 (1974) 47-99.

|7| R.VILELA-MENDES, J.TABORDA-DUARTE Decomposition of vectorfield and mixed dynamics J.Math.Phys., 22, 7(1981) 1420-1422.

|3| J.ROELS Sur la décomposition locale d'un champ de vecteurs sur une surface symplectique en un gradient et un champ hamiltonie C.R.Ac.Sc,Paris, série A, 278 (1974) 29-31.

*Septembre 1982

Deuxième partie : décomposition des champs de vecteurs

2.1. Un théorème de dualité.

Dans ce qui suit, V désigne une variété de classe C^2 au moins, de dimension n, paracompacte, munie d'une métrique riemannienne g.

Considérons l'espace $\mathcal{I}(V)$ des champs de vecteurs C^∞ sur V, admettant des intégrales premières f. Par intégrale première, il faut entendre ici une fonction $f : V \to \mathbb{R}$, différentiable, et de valeur constante sur chaque trajectoire. On considère sur $\mathcal{J}(V)$ la relation d'équivalence $R : X \, R \, X'$ si et seulement si f est identique à f'. On définit sur l'espace quotient $\mathcal{G}^*(V) = \mathcal{J}(V)/R$ une structure d'espace vectoriel réel, en posant, pour tout λ réel, $\lambda X = X'$ si et seulement si $\lambda f = f'$, $\lambda X + \lambda' X' = X''$ si et seulement si $\lambda f + \lambda' f' = f''$. Parallèlement, on définit sur $\mathcal{G}(V)$, espace des champs de vecteurs gradients C^∞ sur V, une structure d'espace vectoriel réel, en posant, pour tout λ réel $\lambda X = X'$ si et seulement si $X = -\text{grad } f$ entraîne $X' = -\text{grad } \lambda f$, $\lambda X + \lambda' X' = X''$ si et seulement si $\text{grad } \lambda f + \text{grad } \lambda' f' = \text{grad } f''$.

<u>Théorème 16: $\mathcal{G}^*(V)$ et $\mathcal{G}(V)$ sont isomorphes en tant qu'espaces vectoriels.</u>

La démonstration résulte immédiatement du lemme suivant :

<u>Lemme 17:Il existe une bijection entre champs de vecteurs X^* sur V possédant des intégrales premières f, et champs de vecteurs gradients sur V. Si X est en bijection avec X^* les trajectoires associées à X sont transverses aux trajectoires associées à X^*.</u>

<u>Démonstration</u> : Soit x un point régulier du champ X^*, situé sur la trajectoire $\mathcal{T}$, et $X^*(x)$ la valeur du champ en ce point. Puisque la valeur de f est invariante le long de $\mathcal{T}$, la dérivée de Lie de f dans la direction $X^*(x)$ est nulle : $X^*(x) \cdot f = df(X^*(x)) = 0$. Identifions $df \in T^*_x V$ avec l'élément $X(x) = \text{grad } f_x \in T_x V$ par l'isomorphisme naturel entre espaces tangent et cotangent, pour une métrique riemannienne quelconque g définie sur V. Si $X^*(x) = 0$, on pose $X(x) = 0$. Alors pour la métrique choisie, le produit scalaire $\langle X(x), X^*(x)\rangle = 0$. Ainsi, $= \{X(x) \mid x \in V\}$ est un champ de vecteurs gradients défini par f, orthogonal et donc transversal, au champ $\mathcal{G}^*$. Etant données les propriétés de X^* dans $\mathcal{G}^*(V)$, l'application $\mathcal{G}^* \to \mathcal{G}$ est injective.

Réciproquement, l'application $G^* \to G$ est surjective. En effet, tout système gradient défini par le champ X sur V possède des lignes de niveau situées en position transverse par rapport à ses trajectoires. On peut considérer ces lignes de niveau comme les trajectoires associées à un champ de vecteurs X^* sur V, qui possède évidemment des intégrales premières f : leur valeur, sur chaque trajectoire, est égale, à une constante près, à la "hauteur" du niveau de cette trajectoire.

Q.E.D.

Ce résultat général suggère que tout champ de vecteurs pourrait s'obtenir par combinaison d'un champ de vecteurs gradients et d'un champ de vecteurs X_I admettant une intégration première (rappelons que si V est de dimension paire, pour toute forme symplectique ω sur V, existe un champ hamiltonien $Y_{H,\omega}$ tel qu'en tout point x, $X_I(x) = Y_{H,\omega}(x) \cdot g(x)$ ou g est une fonction sur V : par suite, toute décomposition de g induit une décomposition correspondante de X_I

Une telle décomposition existe si V est de dimension 2 - elle fut le point de départ de cette étude . J. Roels a démontré le résultat significatif suivant dont nous reproduisons l'énoncé originel [13] :

<u>Lemme 18 : Sur une surface tout champ de vecteurs est localement la somme d'un champ hamiltonien et d'un champ de gradient pour la métrique euclidienne.</u>

La démonstration du lemme de Roels appelle plusieurs remarques.

2.2. <u>Remarques et problèmes ouverts.</u>

<u>Remarque 1</u> : Cette démonstration s'appuie pour l'essentiel sur le théorème de Kodaira-Hodge-De Rham selon lequel toute forme différentielle de degré p,ξ, est <u>somme directe</u> d'une forme fermée de degré p,α, d'une forme cofermée de degré p,β, et d'une forme harmonique de degré p,γ. Par conséquent si ξ est nul, il en est de même de α, β et γ.

La forme ξ correspond au champ donné $X(x)$, la forme fermée α à la composante hamiltonienne $X_H(x)$, la forme cofermée $\beta + \gamma = \eta$ à la composante gradient $X_G(x)$. Les correspondances entre les formes et leurs images sont des isomorphismes. Il en résulte que le lemme de Roels est valide en tout point x de la surface V, que ce point soit régulier ou singulier pour le champ X.

Remarque 2 (Lichnerowicz) : Dans le cas où V est kählérienne, la décomposition précédente correspond à celle de la forme image d'un vecteur holomorphe en somme d'une 1-forme fermée et d'une 1-forme produit par l'opérateur de structure complexe d'une 1-forme fermée.

Remarque 3 : Cette remarque est exrpimée par la proposition suivante dont la démonstration du théorème a montré le caractère de généralité :

Proposition 19 : Les champs de vecteurs X_H et X_G sont en position transverse.

Démonstration : α_x est l'image de $X_H(x)$ par l'application $\overline{\omega}$ où $\overline{\omega} : T_xV \to T_x^*V$ est telle que $i_{X_H}(\omega) = \alpha, \omega$ désignant une 2-forme de rang 2 sur V. Supposons que X_H et X_G ne soient pas en position transverse. Alors il existe un scalaire non nul λ tel que $X_H = \lambda X_G$. Par suite $\overline{\omega}(X_H) = \lambda\overline{\omega}(X_G)$, en d'autres termes $\alpha = \lambda\eta$. Cette dernière relation contredit le fait que α et η appartiennent à deux facteurs différents de la décomposition de ξ en somme directe.

Q.E.D.

Remarque 4 : Nous supposerons ici que tout voisinage U de x dans V ne contient pas de sous-ensemble dense de points singuliers.

Soient x et x' deux points de U, et $c:[0,1] \to V$ un chemin différentiable joignant x et x'. Supposons que $X(c(t)) = X(t,c)$ appartienne à un champ de vecteurs différentiables sur V. Munissons l'espace des champs de vecteurs différentiables et l'espace des 1-formes différentielles sur V de la C^∞-topologie de Whitney. Alors, par l'isomorphisme $\overline{\omega}$, la variation différentiable avec t de $X(t,c)$ se traduira par une variation différentiable de $\overline{\omega}(X(t,c)) = \xi(t,c)$, ainsi que des formes $\alpha(t,c)$, $\eta(t,c)$ et $\eta'(t,c)$ où $\eta'(t,x)$ désigne la 1-forme localement fermée telle que $\overline{\omega}(\eta(t,c)) = \overline{g}$ $\overline{\omega}^*(\eta(t,c)) = \overline{g}^*(\eta'(t,c)) = X_G(t,c)$: l'application $\overline{g}^*_{c(t)} : T^*_{c(t)}V \to T_{c(t)}V$ est l'isomorphisme inverse qui à tout vecteur X de T_xV associe la forme linéaire $g_{c(t)}(X)$, issue de la métrique riemannienne g. Par suite le champ des vecteurs $X(x)$ sur U, défini par une section différentiable $s_{X|U}$ du fibré tangent $TV_{|U}$ par l'intermédiaire des isomorphismes ω^* et $\overline{g}^*$, a pour images dans le fibré associé des 1-formes extérieures sur V, les sections différentiables $s_{\eta|U}$, et $s_{\eta'|U}$ et $s_{\alpha|U}$.

On peut par conséquent :

i) étendre le théorème local sur toute l'étendue d'un voisinage quelconque du point x de V .

ii) exprimer l'énoncé du théorème local dans le langage des germes de champs de vecteurs.

Remarque 5 : L'extension du lemme de Roels se heurte à de sérieuses difficultés. La première, celle de la parité de la dimension de la variété V , peut être levée rapidement. Car si V n'est pas de dimension paire, on construit $V' = V \times [0,1]$ que l'on munit du champ de vecteurs $(X(x),0)$, et sur laquelle on travaille. On supposera donc désormais que V est de dimension paire.

On peut alors donner une version très locale du lemme de Roels pour une variété V de dimension quelconque, en procédant ainsi. On peut toujours trouver, a priori, une 2-forme symplectique sur V de sorte que $X(x)$ admette en x une décomposition (en composantes gradient et hamiltonienne) qui appartienne à T_xV . Soit en effet un système de coordonnées locales $(y_1,\ldots,y_n)$ pour lequel $X(x) = \partial/\partial y_1$. On opère un changement de coordonnées locales; le nouveau système s'écrit par exemple $(z_1 = y_1 , z_2 = y_1 + y_2 , z_3 = y_3,\ldots,z_n = y_n)$. Dans ce système, $X(x)$ appartient à la sous-variété de dimension 2 (z_1, z_2) . Munissons V d'une 2-forme symplectique

$$\omega(z) = dz_1 \wedge dz_2 + \text{autres termes ne contenant pas } dz_1 \text{ ni } dz_2 .$$

Alors $X(x)$ est, dans le sous-espace (z_1,z_2) somme d'une composante hamiltonienne et d'une composante gradient pour la métrique $g_{|(z_1,z_2)}$ et la 2-forme $\omega(z)_{|(z_1,z_2)}$. Par conséquent, par injection triviale, $X(x)$ admet la même décomposition pour la métrique g et la forme $\omega(z)$ sur V , dont les composantes appartiennent à T_xV .

On remarquera cependant que, dans le système de coordonnées locales (z_i) d'origine x , la composante gradient s'écrit :

$$X_G(x) = \frac{\partial\psi}{\partial z_1}(z_1(x),z_2(x)dz_1 + \frac{\partial\psi}{\partial z_2}(z_1(x),z_2(x))dz_2$$

Elle ne dérive pas, en général, d'un potentiel défini globalement sur V .

La composante hamiltonienne ne pose pas moins de problèmes. Soit $h(z)$ la valeur de la fonction d'énergie associée au champ hamiltonien local. Par suite des propriétés de continuité et de différentiabilité, il existe une fonction H définie sur V dont la valeur en chaque point x est $h(x)$. On sait alors qu'existe un champ hamiltonien $Y_{H,\omega}$ sur V tel que $i_{Y_{H,\omega}}\omega = -dH$. Mais, en général, les champs X_H et $Y_{H,\omega}$ ne sont pas colinéaires.

On en est donc réduit, pour l'instant, à considérer des cas particuliers, comme celui où le champ de vecteurs donné définit sur la variété V un feuilletage de codimension $n-2$. On peut alors étendre le lemme de Roels sur V.

Problèmes ouverts :

1. Une première classe de problèmes est celle de l'étude des champs de vecteurs dont la forme différentielle associée est soit fermée, soit co-fermée, soit harmonique.

2. Un second problème est celui de trouver un algorithme efficace qui mette en évidence la décomposition d'un champ de vecteurs donné sur une variété riemannienne de dimension 2, muni d'une forme symplectique, en ses composantes hamiltonienne et gradient.

3. Lorsque le système est du type L, la décomposition est évidente. L'hamiltonien est égal à $-[k\frac{u^2}{2} + \frac{1}{k}\int g(x)dx]$, alors que $k\int F(x)dx$ est le potentiel d'où dérive le champ de gradients. On constate que nous n'avons pas exploité, dans cette étude, la connaissance de la manière dont se décompose le champ donné. Cependant, le théorème de décomposition prend sans doute son principal intérêt lorsque s'annule l'une des composantes gradient ou hamiltonienne, et que l'on s'intéresse alors aux questions de stabilité et de bifurcation. Une application de ce théorème venant à l'appui de la théorie des catastrophes a été proposée dans [7]. De toute façon, à supposer donné un champ de vecteurs décomposable en somme d'un champ de gradients et d'un champ possédant une intégrale première, il reste à préciser les résultats que l'on peut déduire de l'existence d'une telle décomposition.

4. On notera, pour conclure, qu'il ne semble pas qu'on ait jusqu'à présent exploité le phénomène de dualité entre systèmes gradients et systèmes conservatifs pour l'étude de la bifurcation de ces derniers, alors que la bifurcation des systèmes gradients est maintenant chose connue.

==========

==

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 278 (2 janvier 1974) Série A — 29

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Sur la décomposition locale d'un champ de vecteurs d'une surface symplectique en un gradient et un champ hamiltonien.* Note (*) de M. **Jacques Roels**, présentée par M. André Lichnerowicz.

Le problème de la décomposition des champs de vecteurs sur les variétés symplectiques nous a été posé par R. Thom lors de notre séjour à l'I. H. E. S.

Une variété symplectique est une variété munie d'un 2-forme ω fermée et non dégénérée. On sait alors qu'il existe un système de cartes symplectiques où on a

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (dx^i \wedge dx^{n+i}).$$

Il s'agit de trouver une structure riemannienne adéquate pour résoudre le problème. Les tenseurs g et ω étant non dégénérés, engendrent des isomorphismes musicaux du fibré tangent dans le fibré cotangent. On a

$$\omega^b : \quad TM \to T^*M,$$
$$X \to \xi = i_X \omega = \omega(X, .)$$

et en coordonnées locales si

$$X = \sum_{i=1}^{n} \left[X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} + X^{n+i}(x) \frac{\partial}{\partial x^{n+i}} \right],$$

on trouve

$$\omega^b(X) = \sum_{i=1}^{n} [-X^{n+i}(x)\, dx^i + X^i(x)\, dx^{n+i}].$$

L'isomorphisme inverse $T^*M \to TM$ se note $\omega^\#$.

D'autre part on peut aussi considérer un isomorphisme obtenu à partir de la structure riemannienne

$$g^b : \quad TM \to T^*M,$$
$$X \to g(X, .)$$

qui en coordonnées locales s'exprime

$$g^b(X) = \sum_{i=1}^{2n} \left(\sum_{j=1}^{2n} g_{ij} X^j \right) dx^i.$$

L'isomorphisme inverse de $T^*M \to TM$ se note $g^\#$.

Un champ de vecteurs hamiltonien X_H est l'image par $\omega^\#$ d'une forme exacte dH tandis qu'un champ de vecteurs gradient Y_S est l'image par $g^\#$ d'une forme exacte dS. Au champ de vecteurs X correspond par l'isomorphisme musical une 1-forme $\xi = \omega^b(X)$. Par le théorème de Hodge-de Rham on a sur tout compact une décomposition unique

$$\xi = dH + \eta,$$

où η est une 1-forme de codifférentielle nulle qui est dans ce cas-ci la divergence du champ de vecteurs $g^{\#}(\eta)$.

Le champ de vecteurs X se décompose donc dans tout compact de manière unique

$$X = X_A + Y,$$

où X_H est un champ de vecteur hamiltonien et Y un champ de vecteurs tel que

$$\operatorname{div}(g^{\#}(\omega^b(Y))) = 0.$$

Le champ de vecteur $Y = g^{\#}(\alpha)$ où α est soumis à la condition

$$\operatorname{div}(g^{\#}(\omega^b(g^{\#}(\alpha)))) = 0.$$

Pour résoudre le problème il faudrait que $\alpha = dS$. En passant aux coordonnées symplectiques locales on a

$$\alpha = \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i \, dx^i,$$

$$g^{\#}(\alpha) = \sum_{i=1}^{2n} \left(\sum_{j=1}^{2n} g^{ij} \alpha_j \right) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

$$\omega^b(g^{\#}(\alpha)) = \sum_{i=1}^{n} \left[-\left(\sum_{j=1}^{2n} g^{n+i,j} \alpha_j \right) dx^i + \left(\sum_{j=1}^{2n} g^{ij} \alpha_j \right) dx^{n+i} \right],$$

$$g^{\#}(\omega^b(g^{\#}(\alpha))) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} g^{ki} g^{n+k,j} \left(\alpha_i \frac{\partial}{\partial x^j} - \alpha_j \frac{\partial}{\partial x^i} \right).$$

Si on choisit une structure riemannienne constante ce qui est toujours possible localement on a

$$\operatorname{div}(g^{\#}(\omega^b(g^{\#}(\alpha)))) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} g^{ki} g^{n+k,j} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} \right).$$

Pour une surface $n = 1$, on trouve

$$\operatorname{div}(g^{\#}(\omega^b(g^{\#}(\alpha)))) = g\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x^2} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x^1} \right),$$

où g est le carré de l'élément de volume. Si $\operatorname{div}(g^{\#}(\omega^b(g^{\#}(\alpha)))) = 0$, α est fermée et par le lemme de Poincaré elle est localement exacte.

On a donc le

THÉORÈME. — *Sur une surface tout champ de vecteurs est localement la somme d'un champ hamiltonien et d'un champ gradient pour la métrique euclidienne.*

Il est intéressant de voir ce que donne le théorème dans le voisinage des singularités non triviales des champs de vecteurs du plan.

1. FOYER. — Le champ de vecteurs

$$(\lambda x - \mu y) \frac{\partial}{\partial x} + (\mu x + \lambda y) \frac{\partial}{\partial y}$$

est la somme du champ de vecteurs $-\mu\, y\, (\partial/\partial x)+\mu\, x\, (\partial/\partial y)$ qui est un champ hamiltonien de fonction $H(=-(\mu/2)\,(x^2+y^2)$ et d'un champ de vecteurs gradient $\lambda\, x\, (\partial/\partial x)+\lambda\, y\, (\partial/\partial y)$ de fonction $S=(\lambda/2)\,(x^2+y^2)$. Il est intéressant de voir géométriquement que pour le premier champ des trajectoires sont des cercles centrés à l'origine et pour le second ce sont des droites passant par l'origine. Ce résultat est assez intuitif.

2. Nœud a une tangente. — Le champ de vecteurs

$$(\lambda x+\lambda y)\frac{\partial}{\partial x}+\lambda y\frac{\partial}{\partial y}$$

est la somme du champ de vecteurs

$$\left(\frac{\lambda}{5}x+\frac{3\lambda}{5}y\right)\frac{\partial}{\partial x}-\left(\frac{2\lambda}{5}x+\frac{\lambda}{5}y\right)\frac{\partial}{\partial y}$$

qui est un champ hamiltonien de fonction

$$H=\frac{\lambda}{5}\left(x^2+xy+\frac{3}{2}y^2\right)$$

et d'un champ de vecteurs gradient

$$\left(\frac{4\lambda}{5}x+\frac{2\lambda}{5}y\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left(\frac{2\lambda}{5}x+\frac{6\lambda}{5}y\right)\frac{\partial}{\partial y}$$

de fonction

$$S=\frac{2\lambda}{5}x^2+\frac{2\lambda}{5}xy+\frac{3\lambda}{5}y^2.$$

Ici l'intuition géométrique fait défaut; en effet, le champ de vecteurs hamiltonien possède évidemment à l'origine un centre et les trajectoires sont des ellipses tandis que le champ de vecteurs gradient possède à l'origine un nœud à deux tangentes.

(*) Séance du 22 octobre 1973.

Institut de Mathématiques,
2, *chemin du Cyclotron,*
1348 *Louvain-la-Neuve,*
Belgique.

Decomposition of vector fields and mixed dynamics

R. Vilela Mendes and J. Taborda Duarte
CFMC-Instituto Nacional de Investigação Cientifica, Av. Gama Pinto, 2-1699 Lisboa Codex, Portugal

(Received 16 July 1980; accepted for publication 20 January 1981)

Some theorems are proved concerning the decomposition of vector fields into gradient and Hamiltonian components. A constructive method to carry out one of the decompositions is applied to some three- and four- dimensional dynamical models.

PACS numbers: 03.20. + i

1. DECOMPOSITION OF VECTOR FIELDS

A classical dynamical system is defined by the couple (M,X), M being a differentiable manifold and X a C^r vector field. The study of simple ways to describe general vector fields will lead therefore to a parametrization and classification of classical dynamical systems. A step in this direction was taken by Roels[1] who proved that in a two-dimensional symplectic manifold every vector field is locally the sum of a Hamiltonian and a gradient field. Our purpose in this paper is to obtain similar decompositions for N-dimensional manifolds. The proof of the main result uses the following local lemma.

Lemma : Let R^N (N even) be endowed with the canonical scalar product. Then on every compact neighborhood Ω there are $N-1$ nondegenerate 2-forms α_i with the properties :

(a) $d\alpha_i = 0$,

(b) $\alpha_i \wedge \underbrace{\cdots}_{N/2} \wedge \alpha_i = (N/2)!v$ (v volume form on R^N),

(c) $*\alpha_i = \dfrac{1}{(N/2-1)!}\, \alpha_i \wedge \underbrace{\cdots}_{N/2-1} \wedge \alpha_i$,

(d) $*\alpha_i \wedge \alpha_j = 0, \quad i \neq j$,

and such that given a C^∞ 2-form η, there are $N-1$ C^∞ functions a_i and a 2-form α satisfying locally:

(1) $\delta\alpha = \delta\eta$,

(2) $\alpha = \sum_{i=1}^{N-1} a_i\alpha_i$.

For the proof one uses an Euclidean coordinate system. In these coordinates a constructive recipe for a set of 2-forms α_i is

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= dx^1 \wedge dx^2 + dx^{i_{13}} \wedge dx^{i_{14}} + \cdots + dx^{i_{1N-1}} \wedge dx^{i_{1N}},\\
\alpha_2 &= dx^1 \wedge dx^3 + dx^{i_{23}} \wedge dx^{i_{24}} + \cdots + dx^{i_{2N-1}} \wedge dx^{i_{2N}},\\
&\cdots\\
\alpha_{N-1} &= dx^1 \wedge dx^N + dx^{i_{N-1\,3}} \wedge dx^{i_{N-1\,4}} + \cdots\\
&\quad + dx^{i_{N-1\,N-2}} \wedge dx^{i_{N-1\,N}},
\end{aligned} \tag{1.1}$$

where in α_p the numbers $1, p+1, i_{p3}, i_{p4}, \cdots, i_{pN}$ are an even permutation of $1\cdots N$, and no elementary 2-form $dx^i \wedge dx^j$ appears more than once in (1.1). For example, for $N = 4$ and 6, one has

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4,\\
\alpha_2 &= dx^1 \wedge dx^3 + dx^4 \wedge dx^2,\\
\alpha_3 &= dx^1 \wedge dx^4 + dx^2 \wedge dx^3,\\
\alpha_1 &= dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4 + dx^5 \wedge dx^6,\\
\alpha_2 &= dx^1 \wedge dx^3 + dx^2 \wedge dx^5 + dx^4 \wedge dx^6,\\
\alpha_3 &= dx^1 \wedge dx^4 + dx^2 \wedge dx^6 + dx^3 \wedge dx^5,\\
\alpha_4 &= dx^1 \wedge dx^5 + dx^2 \wedge dx^4 + dx^3 \wedge dx^6,\\
\alpha_5 &= dx^1 \wedge dx^6 + dx^2 \wedge dx^3 + dx^4 \wedge dx^5.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

It is straightforward to check that for general N the forms constructed according to (1.1) are nondegenerate and satisfy the conditions (a)–(d). Clearly for $N \geqslant 6$ one does not obtain a unique set.

To prove the lemma, one should now check that given a smooth 2-form η it is possible to find $N-1$ functions a_i such that

$$\delta \sum_{i=1}^{N-1} a_i\alpha_i = \delta\eta. \tag{1.3}$$

In Euclidean coordinates the codifferential of a 2-form β reads $\delta\beta = \partial_j\beta_{ij}\, dx^i$. Therefore, from the knowledge of the α_i forms (1.1), one writes (1.3) as a simple first-order partial differential system. To avoid the introduction of cumbersome index notation we will merely illustrate this for $N = 4$ and $N = 6$:

$$\begin{vmatrix} \partial_2 & \partial_3 & \partial_4 \\ -\partial_1 & -\partial_4 & \partial_3 \\ \partial_4 & -\partial_1 & -\partial_2 \\ -\partial_3 & \partial_2 & -\partial_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} = \sum_j \partial_j \eta_{ij},$$

$$\begin{vmatrix} \partial_2 & \partial_3 & \partial_4 & \partial_5 & \partial_6 \\ -\partial_1 & \partial_5 & \partial_6 & \partial_4 & \partial_3 \\ \partial_4 & -\partial_1 & \partial_5 & \partial_6 & -\partial_2 \\ -\partial_3 & \partial_6 & -\partial_1 & -\partial_2 & \partial_5 \\ \partial_6 & -\partial_2 & -\partial_3 & -\partial_1 & -\partial_4 \\ -\partial_5 & -\partial_4 & -\partial_2 & -\partial_3 & -\partial_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} = \sum_j \partial_j \eta_{ij}.$$

The general rule for writing the matrix of partial derivatives in

$$\sum_{j=1}^{N-1} M(\partial)_{ij} a_j = \sum_{j=1}^{N} \partial_j \eta_{ij} \quad (i = 1\cdots N) \tag{1.4}$$

is that, if the form $dx^i \wedge dx^j$ occurs in α_r, then the i, r and j, r matrix elements are ∂_j and $-\partial_i$.

By a smooth truncation of $\Sigma\partial_j\eta_{ij}$ outside the neighborhood Ω, one replaces the system (1.4) by

 0022-2488/81/071420-03$1.00

$$\sum_{j=1}^{N} M(\partial)_{ij} a_j = u_i \quad (i = 1 \cdots N), \tag{1.5}$$

where the u_i are $C_0^\infty(R^N)$ functions that coincide with $\Sigma \partial_j \eta_{ij}$ in Ω. The solutions of (1.5) will also coincide with solutions of (1.4) in Ω.

The system (1.5) has $N-1$ unknowns a_j and N equations. However, not all equations are independent because by construction

$$\sum_{i=1}^{N} \xi_i M(\xi)_{ij} = 0 \quad (j = 1 \cdots N-1).$$

Eliminating one of the rows in $M(\partial)_{ij}$, one is led to a system of $N-1$ equations with $N-1$ unknowns,

$$\sum_{j=1}^{N-1} \tilde{M}(\partial)_{ij} a_j = u_i \quad (i = 1 \cdots N-1), \tag{1.6}$$

whose det $\tilde{M}(\xi)$ is not identically zero.

The existence of a fundamental solution ($\tilde{M}(\partial)E = \delta \mathbb{1}$) follows from the existence of a fundamental solution for the differential operator with constant coefficients det $\tilde{M}(\partial)$.[2] From the fundamental solution, by convolution with the C_0^∞ functions u_i, one finally proves the existence of C^∞ solutions a_j to (1.4) in Ω.

For $N = 4$ the lemma is equivalent to the statement that there is a self-dual α such that $\delta\alpha = \delta\eta$. In this case one can apply the Hodge–de Rham theorem to write $\eta = d\beta + \delta\gamma$, and choosing $\alpha = d\beta + {}^*d\beta$, one proves the assertion in a coordinate free manner. Unfortunately, we could not find a similar proof for higher dimensions.

On the other hand, the coordinatewise proof of the lemma and in particular the system (1.4) provides a constructive method to obtain in practice the decomposition of vector fields whose existence is asserted in the following theorem.

Theorem 1: Given an N-dimensional (N even) C^∞-manifold we can find for every $x \in M$ a nbd Ω of x, a Riemannian metric $\tilde{g}$, and $N-1$ symplectic forms $\tilde{\alpha}_i$ on Ω such that every vector field X defined on the nbd can be decomposed into one gradient and $N-1$ Hamiltonian fields.

Proof: Let $\phi: \Omega \to R^N$ be a chart around x such that $\phi(x) = 0$. Defining $\tilde{g}$ as the pullback by ϕ of the Euclidean metric, and $\tilde{\alpha}_i$ as $\phi^*(\alpha_i)$, we observe that the 2-forms $\tilde{\alpha}_i$ have the same properties as the forms α_i in the lemma.

Let $\tilde{g}^b: \mathfrak{X}(\Omega) \to \Omega^1(\Omega)$ be the isomorphism from the vector fields onto the 1-forms induced by $\tilde{g}$, and $\tilde{g}^\#$ its inverse. By the Hodge–de Rham theorem and Poincaré's lemma,

$$\tilde{g}^b(X) = dS + \delta\tilde{\eta}.$$

Hence $X = \tilde{g}^\#(dS) + \tilde{g}^\#(\delta\tilde{\eta})$, and $\tilde{g}^\#(dS)$ is a gradient vector field. For $\delta\tilde{\eta}$ we can write $\delta\tilde{\eta} = \delta(\Sigma_i^{N-1} b_i \tilde{\alpha}_i)$, where b_i are C functions defined on Ω, simply by carrying $\tilde{\eta}$ to R^N by the chart and applying the lemma. We have then

$$\tilde{g}^\#(\delta\tilde{\eta}) = \sum_i^{N-1} \tilde{g}^\#(\delta(b_i \tilde{\alpha}_i)).$$

It remains to prove that each $\tilde{g}^\#(\delta(b_i\tilde{\alpha}_i))$ is a Hamiltonian vector field for the symplectic form $\tilde{\alpha}_i$. This follows from a computation that uses the properties of the $\tilde{\alpha}_i$ and the equalities $i(Z)\alpha = \tilde{*}(\tilde{*}\alpha \wedge \tilde{g}^b(Z))$, and

$$\tilde{*}i(Z)\tilde{v} = -(-1)^N \tilde{g}_b(Z),$$

where $\tilde{*}$ and $\tilde{v}$ are the Hodge star and the volume form associated to $\tilde{g}$:

$$\begin{aligned} i(\tilde{g}^\# \delta(b_i\tilde{\alpha}_i))\tilde{\alpha}_i &= -i(\tilde{g}^\# \tilde{*}(db_i \wedge \tilde{*}\tilde{\alpha}_i))\tilde{\alpha}_i \\ &= -\tilde{*}(\tilde{*}\tilde{\alpha}_i \wedge \tilde{*}(db_i \wedge \tilde{*}\tilde{\alpha}_i)) \\ &= \frac{-1}{(N/2-1)!} \tilde{*}(\tilde{\alpha}_i \wedge \underbrace{\cdots \wedge \tilde{\alpha}_i}_{N/2-1} \wedge i(\tilde{g}^\# db_i)\tilde{\alpha}_i) \\ &= \frac{-1}{(N/2)!} \tilde{*}i(\tilde{g}^\# db_i)(\underbrace{\tilde{\alpha}_i \wedge \cdots \wedge \tilde{\alpha}_i}_{N/2}) = -\tilde{*}i(\tilde{g}^\# db_i)\tilde{v} \\ &= db_i \end{aligned}$$

The theorem states that, locally at least, one can erect a system of $N-1$ symplectic forms that together with the metric form a fixed framework enabling us to decompose any smooth motion into elementary gradient and Hamiltonian components. This is the situation that seems to be the most useful for the applications. However, there exists a different decomposition problem when for a given vector field one is allowed to choose either a metric or a symplectic form adapted to that particular vector field. The following results are almost trivial consequences of the "flow box" theorem.[3]

Theorem 2: Let X be a vector field on a Riemannian manifold M_g. Then for each $p \in M_g$ there is a neighborhood Ω of p and a symplectic form ω_X on Ω such that X is decomposed in, at most, one gradient and one Hamiltonian vector field.

Proof: Take $p \in M$. Either $X(p) \neq 0$ or $X(p) = 0$. If $X(p) \neq 0$ by the flow box theorem there is a neiborhood Ω and a local diffeomorphism $\phi: \Omega \to R^N$, $\phi(y) = (y_1, \ldots, y_N)$ such that $\phi_*(X) = \partial/\partial y_1$. Then $\phi_*(X)$ is Hamiltonian for the canonical symplectic form $\omega = \Sigma_{i=1}^{N/2} dy_{2i-1} \wedge dy_{2i}$ in R^N. Then X is Hamiltonian in Ω for $\phi^*\omega = \omega_X$.

If $X(p) = 0$, take X_g any gradient vector field (for the metric g) such that $X_g(p) \neq 0$. Then $Y = X + X_g$ does not vanish at p and we can apply the above argument so that Y is Hamiltonian, i.e., $X = X_g - Y$ as stated.

Theorem 2': Let X be a vector field on a symplectic manifold M_ω. Then for each $p \in M$, there is a neighborhood and a Riemannian metric g_X on Ω such that X is decomposed in, at most, one gradient and one Hamiltonian vector field.

Proof: Take $p \in M$. Either $X(p) \neq 0$ or $X(p) = 0$. If $X(p) \neq 0$ by the flow box theorem we can find a nbd of p and a metric g_X on Ω such that X be gradient. If $X(p) = 0$, we choose a Hamiltonian vector field X_ω such that $X_\omega(p) \neq 0$. Then we take $Y = X + X_\omega$ and apply again the same argument.

Although simpler than those of Theorem 1, these decompositions are probably of little practical value because to find the flow box coordinate system is equivalent to finding the orbits. Hence, to write such a decomposition should not be much simpler than to find an exact solution of the equations of motion.

The results in this paper imply that general classical motions are mixed Hamiltonian or mixed Hamiltonian-gradient systems. Besides the obvious parametrization usefulness of such decompositions they may also provide new ways of studying classical systems, for example by developing a perturbative theory of gradient deformations of Hamilton-

ian systems. Preliminary results in this direction indicate that at least it is then simple to establish necessary conditions for the existence of constants of motion in dissipative systems.[7]

2. EXAMPLES

The proofs of Theorem 1 and the lemma provide a constructive method to obtain the corresponding decomposition once a vector field X is given. In Euclidean coordinates the function S of the gradient part is obtained as a solution of the Poisson equation

$$\Delta S = \operatorname{div} X,$$

and with the choice of the symplectic forms (1.1) the Hamiltonian functions are obtained by solving the differential system (1.4). Using this method on finds:

= for the van der Pol oscillator,

$$\dot{x} = y \qquad = \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}, \qquad S = \alpha\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}\right),$$

$$\dot{y} = \alpha(1 - x^2)y - x \qquad = \frac{\partial S}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x},$$

$$H = \frac{y^2}{2} - \alpha\left(x - \frac{x^3}{3}\right)y + \frac{x^2}{2}.$$

= for Rossler's model for "hyperchaos,"[4]

$$\dot{x} = -y - z \qquad = \frac{\partial S}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H'}{\partial z},$$

$$\dot{y} = x + \frac{y}{4} + w \qquad = \frac{\partial S}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial H'}{\partial w},$$

$$\dot{z} = 3 + xz \qquad = \frac{\partial S}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial w} - \frac{\partial H'}{\partial x},$$

$$\dot{w} = -\frac{z}{2} + 0.05w \qquad = \frac{\partial S}{\partial w} - \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\partial H'}{\partial y},$$

with

$$S = \tfrac{1}{6}x^3 + 0.3w^2/2 \quad H = -\tfrac{1}{2}(x^2 + y^2) + \tfrac{1}{4}z^2 + 3w,$$
$$H' = -\tfrac{1}{2}x^2 z - \tfrac{1}{2}z^2 - \tfrac{1}{2}w^2 - \tfrac{1}{4}yw.$$

Systems of odd dimensionality N may always be imbedded into a $(N+1)$-dimensional manifold, the same methods become applicable and one obtains:

= for the Lorenz model[5]

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y \qquad = \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y},$$

$$\dot{y} = -xz + rx - y \qquad = \frac{\partial S}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x},$$

$$\dot{z} = xy - bz \qquad = \frac{\partial S}{\partial z},$$

with

$$S = \tfrac{1}{2}\sigma x^2 - \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{2}bz^2 + xyz,$$
$$H = \tfrac{1}{2}y^2(\sigma - z) + x^2(z - \tfrac{1}{2}r).$$

= for the Gause–Lotka–Volterra equations (3 species)[6]

$$\dot{x} = x(1 - x - \alpha y - \beta z) = \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H'}{\partial z},$$

$$\dot{y} = y(1 - \beta x - y - \alpha z) = \frac{\partial S}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x},$$

$$\dot{z} = z(1 - \alpha x - \beta y - z) = \frac{\partial S}{\partial z} - \frac{\partial H'}{\partial x},$$

with

$$S = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - \tfrac{1}{6}(2 + \alpha + \beta)(x^3 + y^3 + z^3),$$
$$H = -\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)xy^2 + y(\tfrac{1}{2}\beta x^2 + \alpha xz),$$
$$H' = -\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)xz^2 + z(\tfrac{1}{2}\alpha x^2 + \beta xy).$$

AKNOWLEDGMENTS

The authors are grateful to Professor Claude Bruter for bringing to their attention the potential value of generalizing Roels' Theorem.

[1] J. Roels, C. R. Acad. Sci. Ser. A **278**, 29 (1974).
[2] L. Hörmander, *Linear Partial Differential Operators* (Springer, Berlin, 1969), Chap. III.
[3] F. Dumortier, "Singularities of vector fields," IMPA math. monogr. No. 32, Rio de Janeiro, 1978, p. 8.
[4] O. E. Rossler, Phys. Lett.A **71**, 155 (1979).
[5] E. N. Lorenz; J. Atmos. Sci. **20**, 130 (1963).
[6] R. M. May, W. J. Leonard, SIAM J. Appl. Math. **29**, 243 (1975).
[7] J. T. Duarte and R. V. Mendes, "Deformation of Hamiltonian dynamics and constants of motion in dissipative systems" preprint CFMC, E-15/80.

CENTRO DE FISICA DA MATÉRIA CONDENSADA
AV. DO PROF. GAMA PINTO, 2 — LISBOA 4
TELEFS. 77 33 25/33 38/39 11/42 97/47 57

Lisbonne 19 Octobre 1981.

Cher Claude :

On se souvient des exposés que tu nous as faits il y a quelques années sur le thème des décompositions et je pense que nous avons réussi à résoudre le problème. Nous sommes donc bien reconnaissants de nous l'avoir proposé. Nous avons continué à travailler sur le sujet et nous avons appliqué le théorème de décomposition à un cas où il y a un arc de champs de vecteurs avec des constants de mouvement.

À présent je travaille en collaboration avec J. Dias de Deus sur les endomorphismes de l'intervalle.

Il serait intéressant si tu pouvais nous visiter de nouveau.

Meilleures amitiés de

J. Taboada

UNIVERSITÉ PARIS 12 (Paris Val-de-Marne)

MATHÉMATIQUES
U E R Sciences
Av. du Général de Gaulle
94010 CRETEIL CEDEX
Tél. : (1) 898.92.24

Créteil, le 29 Octobre 1981

A R.VILELA MENDES et J.TABORDA DUARTE
CFMC

Chers Amis,

J'ai bien reçu, non sans surprise, votre tiré à part, et vous en remercie.

On peut considérer en effet comme résolu dans son principe le problème de la recherche d'une décomposition locale d'un champ de vecteurs. Mais deux problèmes restent mal réglés: celui de l'unicité de la décomposition, celui de l'extension en général du local au global.

Je vous avais déjà présenté l'énoncé et la démonstration du théorème 2, et c'est à ce niveau que se pose le problème de l'unicité. Vous trouverez dans le texte ci-joint -vous en connaissez la teneur, et j'espère que nos collègues amèricains se décideront un jour à le publier - au niveau de la remarque 5 un aperçu des difficultés que présentent ces questions.

Je vous fais parvenir par ailleurs deux volumes de mes publications: Topologie d'une part, Système-Développement-Mémoire d'autre part. Un autre ouvrage sur les modèles dans les sciences, intitulé Les Architectures du Feu devrait paraître chez Flammarion en Février-Mars 82.

J'ai énormément de travail cours, exposés, administration, recherche, et ne pourrais guère venir, si vous le souhaitez, avant Mai 82. J'encourage en ce moment ceux que je rencontre à travailler sur la bifurcation.

Avec mon meilleur souvenir,

C.P.BRUTER

BURESS/YVETTE