Economie appliquée, tome XXXVII - 1984 - N° 1, pp. 123-141

Catastrophes locales en économie

C.P. Bruter

1. INTRODUCTION

Il ne faut pas attendre de révélations de la part des mathématiciens s'occupant d'économie. La mathématique ne propose en général que des techniques, l'économie au contraire demande du jugement. La matière est complexe. Max Planck l'avait bien compris, qui déserta bientôt la recherche économique pour la recherche physique où la collecte des données est plus facile, leur interprétation plus sûre, et où la causalité, liée à la stabilité des phénomènes, ne semble guère souffrir d'exceptions. Mon propos sera donc très modeste. Il ne fera pas appel aux théories rationnelles anciennes, dans lesquelles l'artifice est trop grand pour que les praticiens de l'économie puissent en retirer un bénéfice visible. Les articles consacrés à l'économie, historique ou quotidienne, dans lesquels les auteurs font preuve de beaucoup de bon sens, ne contiennent presque jamais d'allusion à la théorie de l'utilité ni à celle des jeux. On parle de ces théories, surtout à l'école, par souci historique, et en tablant sur un effet positif qu'elles pourraient avoir sur la formation de la pensée. Formuler l'espoir que l'exposé qui va suivre atteindra un objectif culturel de cet ordre est peut-être une illusion et une vanité.

2. ÉLÉMENTS DE BASE DE LA REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DE L'ÉCONOMIE

Un *espace économique* consiste en la donnée de trois espaces fondamentaux: l'*espace des localisations*, l'*espace des transformations* ou des *décisions*, l'*espace des propriétés*.

L'espace des localisations se compose de deux ensembles identiques: le premier est l'*espace de localisation des objets économiques*, le second est l'*espace de localisation des décideurs*.

Ces deux espaces sont bâtis à partir des *espaces substrats* que sont l'*espace-temps* R^4, et l'*espace-source* $E_T = \mathrm{E} \times \{-\infty, \mathrm{T}\}$ où E désigne un domaine de l'*espace ambiant* R^3, homéomorphe à une

boule D_3, et T une valeur du temps, que nous apellerons l'*horizon économique*.

Les espaces de localisation des objets économiques et des décideurs sont chacun une réplique de l'ensemble $P(E_T)$ des parties de E_T. Un élément O_i de l'espace $P(E_T)$ des objets économiques est bien sûr un *objet économique*. Un élément D_k de l'espace $P(E_T)$ des décideurs est un *décideur*.

Il existe par ailleurs deux espaces discrets, ordonnés par un indice temporel, respectivement des *types d'objets* et des *types de décideurs*. Soit OT l'espace des types d'objets: un type d'objet o_i est indicé par la date i où il apparaît pour la première fois dans l'histoire étendue sur la durée $[-\infty, T]$. Pareillement, si DT est l'espace des types de décideurs, un tel type est noté d_k, où k désigne la date de la première apparition de ce type de décideur au cours de l'histoire de même durée que la précédente. Ces espaces induisent sur les espaces de localisation des relations d'équivalence, par l'intermédiaire d'applications de chacun de ces espaces sur l'espace des types qui lui est associé: deux éléments sont équivalents s'ils appartiennent à la contre-image par l'*application de nomenclature* d'un type donné. On pourra noter respectivement par O et par D, les espaces quotients ainsi définis.

Il résulte de nos définitions qu'il existe une bijection naturelle entre décideurs et objets économiques: tout décideur est en particulier un objet économique, tout autant que l'air que nous respirons, l'eau de mer dans laquelle nous nous baignons. Inversement, tout objet économique est un décideur *potentiel*. Le domaine occupé par un cyclone est un décideur physique actif. Le domaine de l'espace-temps occupé par un chef d'état qui dort, est un décideur *muet*.

Introduisons l'espace des propriétés. A chaque élément de l'espace des objets économiques, on associe un espace numérique $R(O_i)$ dont la dimension dépend de l'objet O_i. Cet espace est celui *des valeurs potentielles* des propriétés de l'objet considéré. Les *valeurs effectives* sont données par des applications (appelées *sections*) de O_i dans $(Ta)^0R(O_i) = R(O_i)$, ..., $(Ta)^kR(O_i)$, ...: le point représentatif situé dans le k-ième espace tangent à $R(O_i)$ représente la rapidité d'évolution d'ordre k des propriétés de l'objet ($k = 1$ correspond à ce qu'on nomme d'ordinaire la vitesse, $k = 2$ à l'accélération). On suppose naturellement ces espaces munis de métriques convenables.

Ces valeurs se répartissent en deux groupes: celui des *valeurs d'état* x, et celui des *valeurs de contrôle* u. A chaque point de l'espace de localisation des décisions, est également attachée la famille d'espaces $(Ta)^kR(D_i)$ décrite ci-dessus. La donnée d'un espace de localisation et de l'espace des propriétés qui lui est attaché en tout point s'appelle un *espace fibré* dont la *base* est l'espace de localisation, la *fibre* l'espace des propriétés.

A la date t, l'*état* de l'économie est défini par les valeurs effectives des propriétés en chaque point de $P(E_t) = P(E) \times \{t\}$. On note par FO_t (respectivement FD_t) la *feuille* des valeurs potentielles des propriétés en chaque point de l'espace de localisation local (du point du vue temporel). On note par $I_{t't}$: $FO_{t'} \rightarrow FD_t$ une application, appelée *application d'information* ou de *connaissance*, qui associe aux valeurs potentielles de l'état de l'économie en t', la connaissance que l'on peut en avoir à l'instant t: si cette application est l'identité, l'information est *totale*, elle est *nulle* si FO_t, en est le noyau. Si t' est inférieur à t, la connaissance en question est celle du *passé en t'*. Si t est inférieur à t', la connaissance est celle d'une *anticipation en t'*. Ces applications d'information forment un sous-espace de l'espace des applications du *fibré des décisions* dans lui-même.

Ce cadre général est élémentaire et classique, même si le lecteur est peu familier avec le langage géométrique dans lequel il est présenté. Nous allons maintenant introduire des conditions plus restrictives, compte tenu du fait mathématique suivant: la connaissance de l'évolution d'une situation, à partir d'une situation initiale donnée, est entièrement déterminée si, par ailleurs, on connaît en tout lieu les vitesses avec lesquelles cette évolution s'accomplit, sous réserve de conditions d'homogénéité des espaces substrats que nous pouvons considérer ici comme satisfaites.

La connaissance des situations est équivalente à celle de leur vitesse d'évolution, et l'on peut se demander ce que l'on gagne à supposer connues ces vitesses. Deux raisons militent en leur faveur: elles sont souvent du point de vue pratique accessibles, elles peuvent apporter des renseignements intéressants sur la stabilité des évolutions. On retiendra le résultat général suivant:

> Dès que les nombres de variables d'état et de variables de contrôle dépassent certaines valeurs, qui sont faibles (comme dans certains cas respectivement 3 et 8), la stabilité structurelle de l'évolution n'est pas générique: le mode d'évolution peut considérablement changer si on perturbe quelque peu les variables de contrôle.

La conséquence de ce résultat, sur le plan de l'observation des phénomènes économiques, est évidente: ces évolutions ont peu de chance de rester longtemps stables. C'est la raison pour laquelle, les courbes de variation des indicateurs économiques en fonction du temps présentent de manière constante des zigzags. Ils désespèrent les économistes et les hommes politiques. Les uns et les autres ont bien tort de ne pas faire preuve de plus de sérénité. La stabilisation, à moins d'envisager l'anéantissement, est un rêve illusoire. Ce n'est pas pour autant, bien sûr, qu'il ne faille pas chercher à limiter les amplitudes des variations, étant donnés les caractères parfois destructeurs de certaines d'entre elles. Et l'on peut, dans certains cas, parvenir à des résultats positifs.

3. UN PROGRAMME DE TRAVAIL UTILE

Pour aller au-delà du cadre général que nous avons établi, il est nécessaire d'examiner le fonctionnement de l'économie au sein d'une feuille ou d'une rame de feuilles. Pour ce faire, on suivra la vieille méthode platonicienne d'observer et de procéder à des analyses de plus en plus fines sans perdre de vue l'ensemble. A notre avis, cette démarche n'est jamais suivie avec assez de profondeur par les économistes. Nous voulons dire que la chaîne des implications résultant des décisions n'est jamais complètement établie en toute clarté: on trouve certes dans la littérature, par ci, par là, des études sur tel ou tel groupe d'implications. Les schémas de Keynes par exemple, ceux qui peuvent être établis à partir des différents cycles connus (agricoles, Kitchin, ...) ou bien ceux que l'on peut concevoir à partir des courbes de Phillips, ne sont que des éléments du puzzle économico-décisionnel existant. Ne conviendrait-il pas de le reconstruire de la manière la plus complète possible, en pointant les assemblages stables, les différentes configurations qu'ils peuvent prendre, en indiquant les pondérations lorsqu'elles sont disponibles. Il est vraisemblable qu'en fouillant la littérature, en s'inquérant auprès des nombreux organismes d'étude macro- ou micro-économique qui certainement ont conduit des travaux ignorés et d'intérêt, il serait possible de publier un ouvrage uniquement adonné à la présentation du puzzle, et dont le compendium serait des plus utiles à l'étudiant, à l'économiste praticien, à l'homme politique.

On aurait alors une idée plus précise de l'effet sur A résultant d'une décision portant sur B. Et l'exercice consistant à montrer la palette des différentes chaînes d'implications permettant, quels que soient A et B, de les lier, est aussi stimulant qu'instructif. Sans doute également, certains schémas géométriques de synthèse favoriseraient-ils la compréhension d'ensemble et immédiate de certaines influences réciproques, et ainsi la présentation générale du puzzle. Voici un exemple d'un tel schéma géométrique.

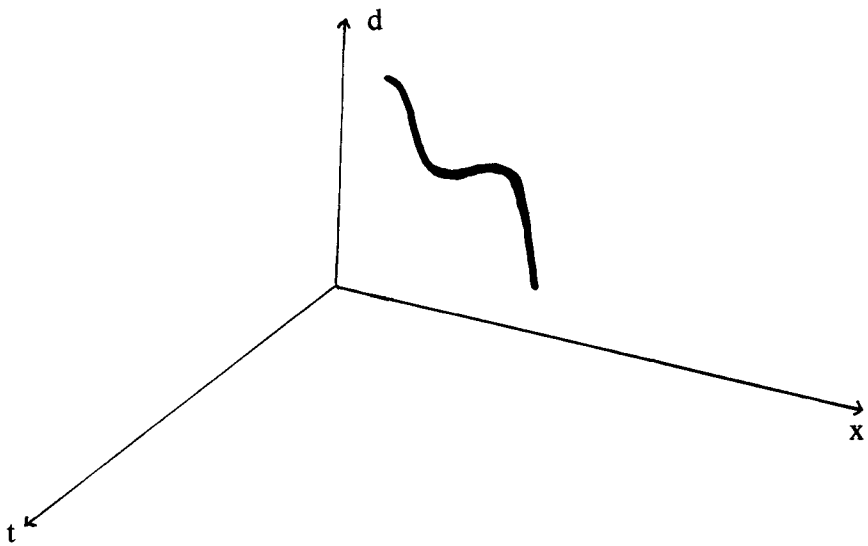
4. UN SCHÉMA GÉOMÉTRIQUE SIMPLIFIÉ ASSOCIÉ À LA DEMANDE

Dans tous les modèles de la nature, une des données nécessaires est celle de l'*énergie potentielle*. Les effets d'une transformation dépendent de la puissance avec laquelle elle est déployée, et cette puissance provient de l'énergie disponible au moment de l'acte. On peut disposer d'énergies physiques, on peut également faire appel à une énergie économique qui, dans ce modèle restreint, ne sera autre que l'*énergie financière*, représentée par une quantité de monnaie.

Dans le cas présent, considérons un type d'objet économique acheté par une *strate* bien spécifiée de décideurs, en un lieu U_t et à une date t donnés. Cet objet est caractérisé par un certains nombre de propriétés supposées mesurées à l'époque t: caractère de nécessité, abondance sur le marché, fiabilité, esthétique, coûts d'usage selon l'importance des périodes d'emploi, avantages ou inconvénients fiscaux résultant de son achat, de sa revente, diversité des constructeurs, publicité qui lui est faite, son prix enfin. Notons que dans le calcul du prix de l'objet, les caractères précédents, de manière directe ou non, jouent un rôle. La demande sera fonction des valeurs de tous ces caractères, ainsi que du revenu des décideurs de la strate considérée.

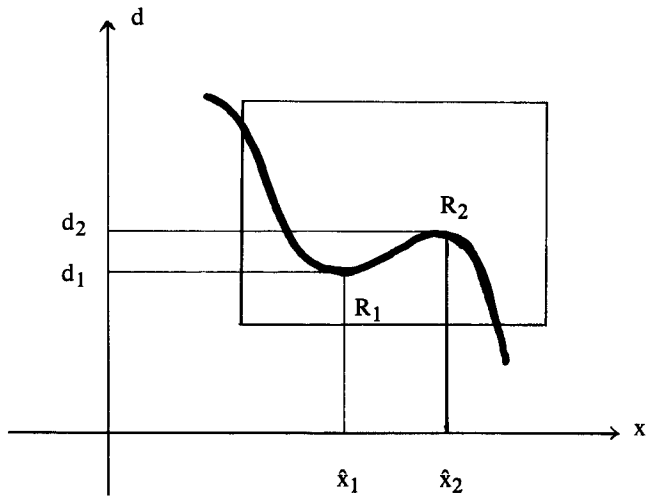
Utilisons comme méthode de travail l'introspection. Toutes choses restant égales par ailleurs, imaginons comment l'achat personnel de l'objet en question serait influencé par la variation de son seul prix. Il nous semble que la demande commencerait d'abord par res-

ter très largement stationnaire en fonction de l'augmentation du prix, puis par fléchir: remarquons ici que nous traçons l'évolution de la demande d en fonction du prix x et du temps t. Mais, selon le degré de nécessité y de l'objet, et du pouvoir d'achat de décideur mesuré par son revenu z, on peut s'attendre à ce que, sous l'effet de l'accoutumance au prix élevé, sous l'empire de la nécessité, la demande reprenne, même accompagnée d'une augmentation nouvelle du prix, jusqu'à atteindre un seuil de prix au-delà duquel la demande va diminuer très rapidement. On peut visualiser cette évolution par la courbe suivante dans l'espace (d, x, t):



On peut naturellement supposer qu'il puisse exister plusieurs points de retournement correspondant à des reprises et des baisses de la demande en fonction du prix. Mais il convient d'abord de traiter le cas exemplaire le plus simple représenté par le dessin précédent. Pro-

jetons alors sur l'espace (d, x) la courbe figurée dans l'espace (d, x, t), et considérons la partie encadrée de cette projection:



Nous allons considérer un modèle analytique local de la courbe située dans le cadre ci-dessus. Notons d'abord par $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$, respectivement les abcisses des minimum et maximum locaux de cette courbe. Effectuons un changement de coordonnées qui place la nouvelle origine à l'intersection de la verticale passant par le milieu du segment $\hat{x}_1\hat{x}_2$, et de l'horizontale passant par le milieu du segment $\hat{d}_1\hat{d}_2$, où $\hat{d}_1 = d(\hat{x}_1)$ $\hat{d}_2 = d(\hat{x}_2)$. Notons encore par x la nouvelle abcisse et par d la nouvelle ordonnée. Si $\hat{x}$ désigne la nouvelle abcisse du maximum local, l'équation de la courbe s'écrit localement:

$$d = -x^3 + ux$$

ou $$x^3 - ux + d = 0$$

avec $$u = 3\hat{x}^2.$$

La masse monétaire dépensée quand le prix varie d'une valeur initiale à une valeur finale x, est une primitive de la fonction de demande:

$$M(x) = \int^x (-x^3 + ux)dx$$

La constante jouant un rôle secondaire, appelons *potentiel monétaire* la fonction encore notée M(x):

$$M(x) = -x^4/4 + ux^2/2.$$

Introduisons maintenant la fonction d'*énergie de demande*:

$$V(d, x, u) = dx - M(x, u).$$

Remarquons que le prix est la dérivée par rapport à la demande de la fonction d'énergie de demande:

$$\text{prix} = \frac{\partial V(d, x, u)}{\partial d}$$

Considérons enfin la transformée de Legendre de la fonction d'énergie monétaire, que nous appellerons *fonction de demande*:

f(d) = Extrémums par rapport au prix de la fonction d'énergie de demande.

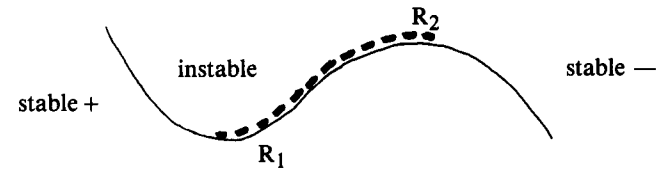
(La fonction de Legendre traditionnelle n'envisage que les maximus par rapport à la variable.) Son graphe dans le plan (d, x) est le lieu des points critiques de la projection sur ce plan de la surface définie dans l'espace (d, x, w) par l'équation w = V(d, x, u): c'est la courbe de demande dessinée plus haut.

La forme de cette courbe dépend de la valeur du paramètre u qui, selon notre hypothèse, varie principalement en fonction des valeurs y du degré de nécessité de l'objet, et de z, revenu des décideurs de la strate proposée. Nous allons maintenant examiner le tracé des courbes de demande effective en fonction de ces paramètres que sont y, z, et la vitesse d'évolution des prix $\underline{x} = \partial x/\partial t$.

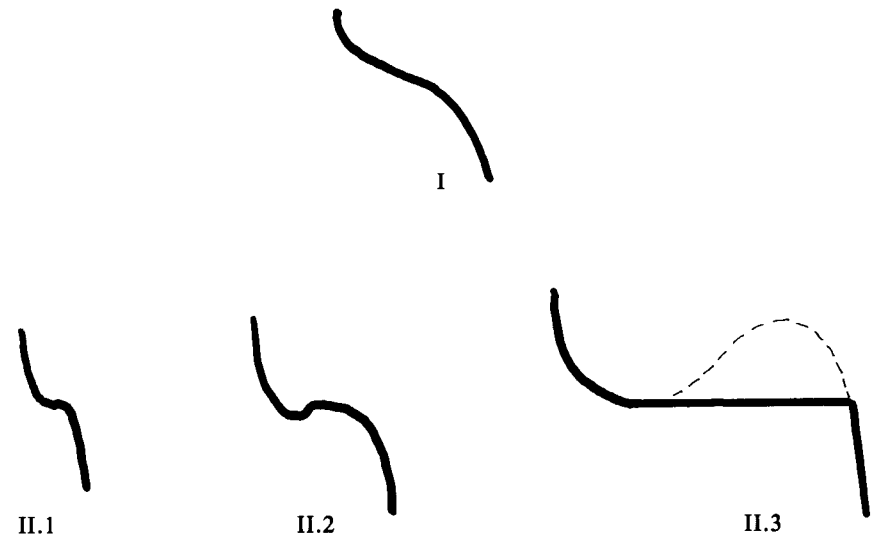
Supposons d'abord que la vitesse $\underline{x}$ soit très faible. Nous dirons alors que la *demande* est *parfaite*. Dans ce cas, la demande réelle suit effectivement la courbe proposée précédemment, car le marché a précisément le temps nécessaire pour s'adapter du point de vue psychologique aux variations des prix.

Il est cependant intéressant d'examiner l'état psychologique du marché sur l'*arc montant* R_1R_2 de la courbe de demande parfaite, où R_1 est le *premier point de retournement* de coordonnées $(\hat{x}_1, \hat{d}_1)$ et

où R_2 est le *second point de retournement* de coordonnées $(\hat{x}_2, \hat{d}_2)$. Il est fort vraisemblable que pendant l'ascension de cette courbe, le marché ressente quelque insatisfaction que peuvent traduire des revendications formulées de manière plus ou moins agressive. En deçà de R_1, au-delà de R_2, les décideurs sont dans un état psychologique stable: satisfaits dans le premier cas, mécontents dans le second, mais leur parti est pris.



Nous allons maintenant décrire la situation complètement opposée, représentée par le dessin que voici:



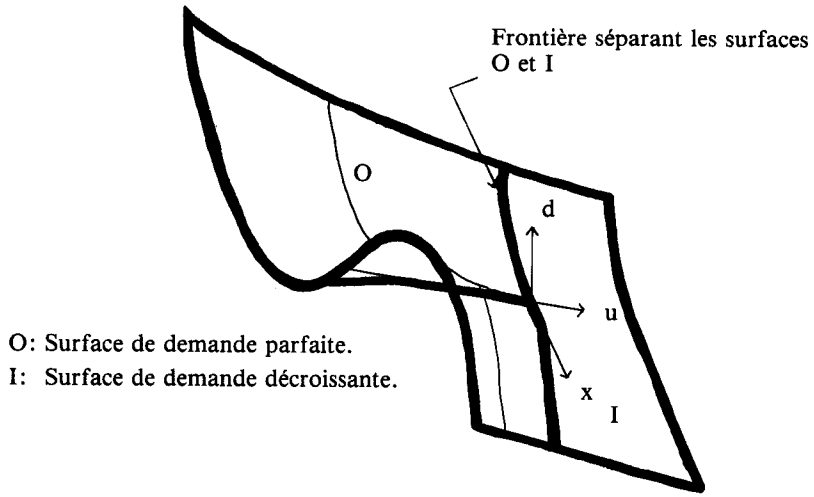
En fait, nous voyons apparaître deux cas. Dans le premier, arrivé au minimum R_1, la demande continue à décroître: on peut représenter ces situation par des courbes de demande de la forme:

$$d = -x^3 - ux$$

où u reste positif. Dans le second cas, la demande se maintient, diminue légèrement, puis s'effondre rapidement: la figure II.3 décrit de manière idéale cette situation. La courbe de demande correspondante sera appelée une courbe de *demande en chute*.

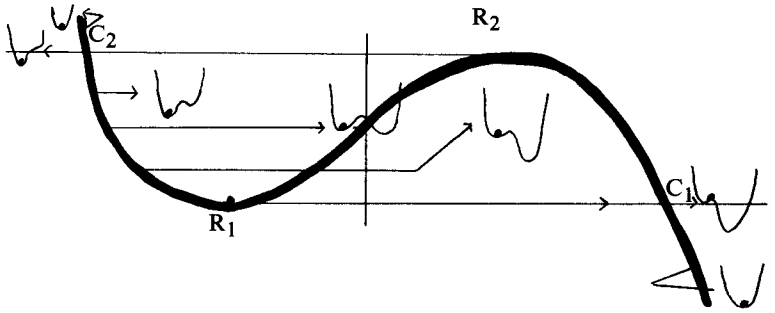
L'ensemble des courbes de demande parfaite et de demande décroissante représentée par des courbes de la forme I ci-dessus peuvent être représentées par une surface unique, appelée maintenant, après Thom, surface de Riemann-Hugoniot. Son équation dans l'espace (d, x, u) est $x^3 + ux + d = 0$, où u peut prendre ici des valeurs négatives (demande parfaite) ou positives (demande décroissante). La section de cette surface par un plan u constant est une courbe de demande.

Remarquons maintenant que les branches stables de la courbe de demande parfaite, arc $[C_1C_2]$ excepté, sont les lieux des points (x, d, u) en lesquels la fonction d'énergie de demande admet un seul extrémum qui est un minimum. En C_1 et C_2, cette fonction d'énergie admet un minimum et ce que nous proposons d'appeler un *point-palier*: en ce point, la fonction est un minimum local dans une direction et un maximum local dans une autre direction (traditionnellement, un tel point est dit d'inflexion). Lorsque (x, d, u) appartient à



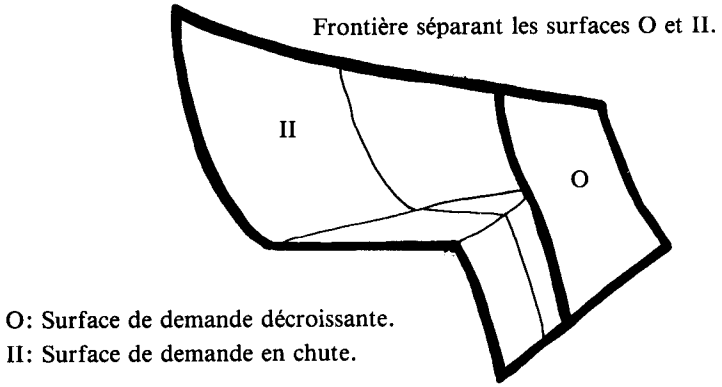
Surface de demande parfaite et décroissante.

l'arc $[C_1C_2]$, la fonction d'énergie de demande possède deux minimums locaux et un maximum local appelé *seuil*:



Introduisons la convention physique dite du *retard parfait*: la bille ponctuelle située au plus bas de la cuvette formée par la courbe de demande d'énergie au voisinage d'un minimum local, reste dans cette cuvette tant que celle-ci ne disparaît pas par collision avec un seuil, après quoi elle tombe dans une autre cuvette d'énergie.

Compte tenu de cette convention, lorsque le prix augmente, la demande décrit jusqu'en R_1 la branche gauche et stable de la courbe de demande parfaite, puis passe brusquement de R_1 en C_2, puis décrit au-delà de C_1 la branche droite stable de la courbe de demande parfaite. La courbe décrite est donc, au palier R_1C_1 près, la courbe de demande en chute. Le passage de R_1 à C_1, très brutal, sera appelé la *catastrophe de demande*. On peut maintenant construire la surface des courbes de demande décroissantes et en chute:



Surface des demandes en chute et décroissante.

Selon les valeurs des paramètres définissant la valeur de u, selon l'état de la concurrence entre types d'objets, une courbe de demande peut a priori avoir l'une des formes extrêmes O, I, ou II, ou encore une forme intermédiaire entre les précédentes des types I et II.

Dans l'hypothèse où la variation de u est examinée en fonction de celle d'autres variables, la discussion ne pourra être qu'amorcée et conservera un caractère hasardeux, puisque nous n'avons pas d'idée sur la forme analytique de la fonction u. Les variables significatives paraissent être le degré de nécessité y, et le rapport $r = x/z$ qui représente la part dans le budget du décideur occupée par l'achat d'un objet du type considéré: $u = u(y, r)$. Comme u est homogène au carré d'un prix, on peut émettre l'hypothèse que:

$$u(y, r) = a(y - \hat{y})^2 + b(r - \hat{r})^2 + c(y - \hat{y})(r - \hat{r}),$$

$\hat{y}$, $\hat{r}$, a, b, c, ayant des valeurs telles que lorsque y est faible et r élevé, la courbe soit du type O; lorsque y est fort et r faible ou moyen, la courbe soit du type I ou II; a et b sont petits devant c.

La nouvelle fonction exprimant l'énergie de la demande peut facilement, en supposant y constant, être déployée. Toutefois, l'étude des fonctions demande n'étant pas immédiate, il ne vaut la peine ici de l'entreprendre qu'en étant assuré d'un minimum de validité empirique pour la forme analytique de u.

Si l'on suppose maintenant que l'on veut étudier la demande d'un objet particulier dont le type est donné, la concurrence peut jouer, et entraîner également des changements rapides et importants, i.e. «catastrophiques», dans la demande. La diffusion, de type exponentiel ou logistique, de l'information, peut amener rapidement un grand nombre de personnes à se détourner d'un objet O_i en faveur d'un objet O_j. Nous allons maintenant considérer un modèle possible de la décision.

5. UN MODÈLE POUR LE COMPORTEMENT DU DÉCIDEUR

De manière constante, tous les décideurs sont soumis à des forces de nature très diverse auxquelles ils sont plus ou moins sensibles. Les mouvements des décideurs physiques résultent de l'action de champs

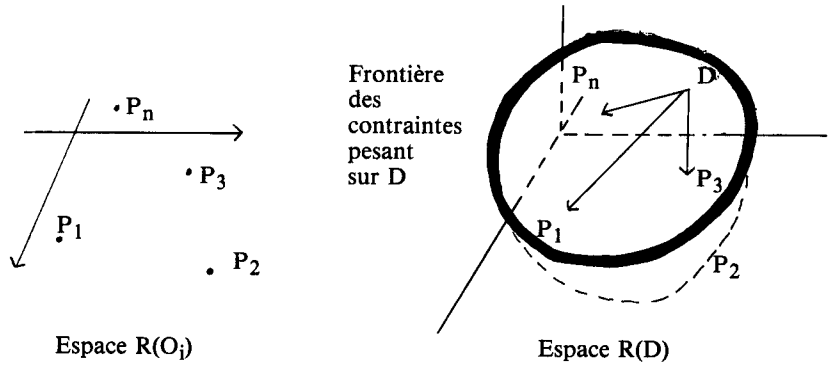
de forces physiques certes, mais aussi parfois, des forces imposées par les décideurs biologiques. Les décideurs biologiques agissent selon les différentes forces physiques, physiologiques, affectives, morales et économiques qui s'exercent sur eux.

Le modèle économique doit donc être complété en imposant sur l'espace des décideurs des champs de forces dont on évaluera les effets par les vitesses d'évolution des différents décideurs. Dans le modèle restreint de l'économie, on ne met en fibre au-dessus de chaque point de l'espace des localisations, que l'espace $R(O_i)$ ainsi que son espace tangent, formé de tous les vecteurs vitesses d'évolution possibles. Classés en différentes rubriques, les champs de force agissent sur les décideurs, et leur action est définie par des champs de vecteurs vitesses d'évolution correspondants. Dans ce cadre, une *décision à l'instant t* sera définie comme le groupe des flots engendrés par ces champs de vecteurs. Les décisions locales, celles des décideurs particuliers, sont des sous-groupes du groupe précédent.

Cette description d'ensemble permet d'unifier dans un seul modèle, la «décision» d'un cyclone de s'abattre sur une région et à une époque données, décision dont les effets économiques sont aisément mesurables, et la décision d'un camionneur de bloquer une route, autre décision aux effets socio-économiques divers. On peut remarquer que toute application de $P(E_T)$ sur lui-même est une décision: lorsque cette application n'est soumise à aucune restriction, une telle décision est génériquement absurde et irréalisable.

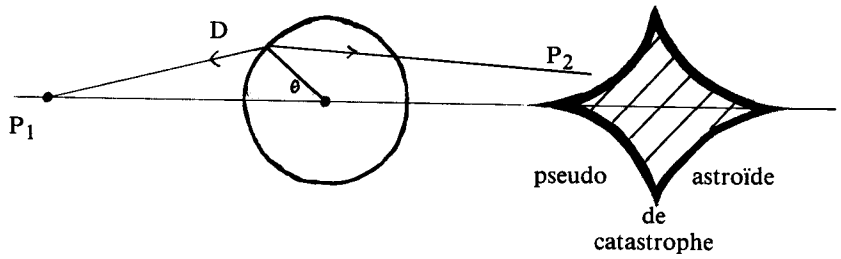
Nous allons maintenant considérer un modèle simple du comportement d'un décideur. Pour fixer les idées, nous supposons qu'il veut porter son choix sur un objet d'un type donné, produit par n constructeurs entre lesquels il y a donc concurrence. Par les applications d'information, le décideur possède une *représentation* du marché. Dans son espace $R(O_i)$, chaque objet est représenté par un point dont les composantes sont les valeurs effectives des propriétés de cet objet; soit P_j^i ce point, $j = 1, 2, \ldots, n$, et P_j son image dans $R(D_k)$. Dans ce même espace, existe un point D qui représente l'état du décideur. Nous faisons l'hypothèse que cet état ne peut varier qu'à l'intérieur d'un domaine fermé. Selon les valeurs associées aux points P_j, parfois aussi selon la publicité qui leur est faite, le décideur est plus ou moins «attiré» par les produits entre lesquels il fera son choix. Le modèle consiste donc à associer au point D un ensem-

ble de vecteurs forces d'origine D et portés par les droites DP_j, et à suivre l'évolution de D à l'intérieur de son domaine de contrainte. La projection de D sur le sous-espace des propriétés du type d'objet O_i définit le choix du décideurs.

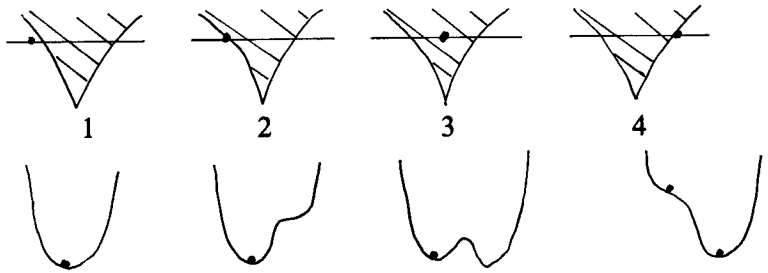


Quel type de forces s'exercent sur D? L'intuition conduit à poser que ces forces sont de type élastique, et par conséquent que le modèle de décision est un modèle de type mécanique que nous allons examiner dans les cas de situations simples.

Le système mécanique de Brillouin-Zeeman servira de référence. Ce système se compose d'un disque plan, mobile autour de son centre, de trois points D, P_1, P_2: P_1 par exemple est fixe, D est situé sur le bord du disque, P_2 peut être déplacé au gré de l'observateur. Des fils élastiques relient D à P_1 et P_2:

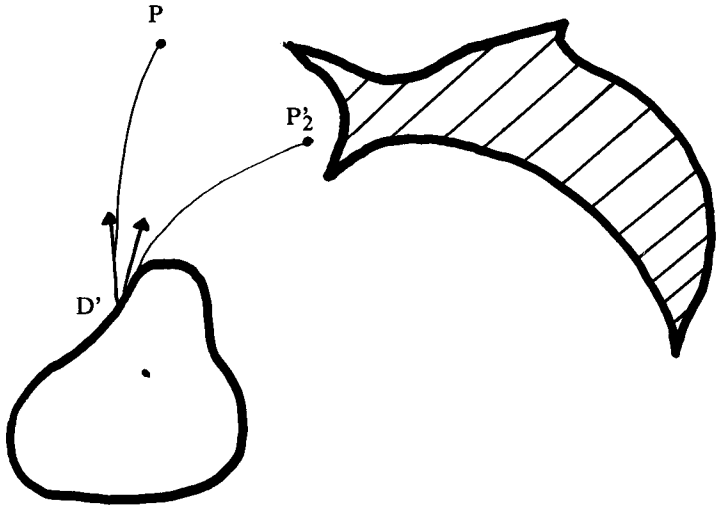


Les dessins qui suivent aident à mieux comprendre le fonctionnement de ce système:



En dehors du pseudo-astroïde de catastrophe, la position du point D varie continûment. Lorsque l'extrémité P_2 du fil élastique de droite traverse l'ensemble de catastrophe de 1 vers 4, la position de D varie peu jusqu'au moment où l'on atteint la situation 4. Alors soudain, le point D bascule en son symétrique par rapport à l'une des axes horizontal ou vertical passant par le centre du disque mobile. L'énergie mécanique qui régit ce système peut être décrit par un polynôme du quatrième degré en l'angle théta, analogue à celui qui régit l'énergie de demande.

Remarquons alors qu'on peut déformer localement et de manière non uniforme la métrique locale du plan, de sorte que la représentation euclidienne du système déformé soit par exemple la suivante:



Notons également que le système dans lequel n points P_i sont reliés à D se ramène au cas précédent en supposant l'un d'eux fixes, et en considérant la résultante des n—1 autres.

Enfin, comme nous l'avons déjà montré dans un autre texte, il existe également un pseudo-astroïde de dimension n de catastrophe lorsque D est assujetti à décrire le bord d'un domaine convexe dans R^n.

Tous ces résultats rassemblés montrent l'existence pour D, dans l'espace R(D) muni de métriques locales convenables, d'un pseudo-astroïde de catastrophes, à la traversée duquel la position de D peut varier brutalement, selon la règle du retard parfait. Si alors, avant de devoir faire un choix, l'état du décideur est représenté par un point D°, son état va évoluer vers un état final D* sous l'effet de l'action du champ de vecteurs induit par le jeu des forces qu'exercent sur D les situations P_i. Selon notre conjecture ce champ de vecteurs est somme d'un champ conservatif et d'un champ «de type gradient»: selon les cas, il peut y avoir *hésitation* lorsque le champ est conservatif, *décision* lorsque la composante non conservative finit par imposer sa loi. Si l'on fait l'hypothèse supplémentaire et raisonnable que la composante gradient est soumise à la règle du retard parfait, alors, dans le cas où, par le jeu de la concurrence et de la nouveauté, ou bien par le biais d'une information meilleure, les P_i évolueraient, leur traversée de l'ensemble de catastrophe conduirait à un changement drastique des *orientations des choix*, et par conséquent des valeurs économiques fonction de cette décision, comme par exemple celle d'une demande.

Nous avons proposé, plus haut, de définir une décision comme l'action d'un groupe de flots. Cependant, il faut noter le caractère incomplet de cette définition. Si en effet D change de position, les valeurs des composantes de D évoluent. Dans la mesure où D exerce des influences sur d'autres décideurs, cette influence peut changer selon la position de D, et par conséquent le champ de vecteurs qui agit sur l'espace des propriétés des décideurs va lui-même se modifier. Autrement dit le groupe de flots va induire également une connexion sur l'espace des champs de vecteurs, qui, en toute logique, doit également être comprise comme une décision.

6. SUR LE CARACTÈRE NATUREL DES ÉVOLUTIONS RAPIDES

Parmi les variables qui déterminent une décision d'achat et par conséquent la demande, figurent en bonne place les équivalents du prix x, de la fiabilité v de l'objet considéré, et de sa valeur d'usage w, fonction elle-même de la fiabilité et donc également du prix de l'objet. L'achat par exemple d'un titre dépend de sa valeur boursière x au moment de l'achat, de la confiance v accordée à la solidité financière de l'émetteur, de la rentabilité escomptée w.

Une découverte technologique peut contribuer à accroître la fiabilité de manière significative, avec ou sans augmentation du prix, une décision monétaire (taxe, dévaluation par exemple) peut avoir une influence notable sur le prix. Pour le décideur, ces changements dans les valeurs des variables conditionnant le choix sont exogènes. Ils peuvent déterminer le franchissement des ensembles de catastrophe.

Il est clair que seule l'expérience peut permettre le tracé de ces ensembles, faute de pouvoir présenter des arguments a priori permettant de les localiser assez avec assez d'exactitude dans l'espace des propriétés. Or il semble que cette expérience fasse aujourd'hui complètement défaut, pour la simple raison que les économistes n'ont nullement été formés à présenter les données qu'ils recueillent sous la forme que nous avons utilisée. Le but de cet exposé aura été atteint, s'il conduit à renouveler la manière d'observer l'évolution des valeurs économiques.

Nous allons maintenant examiner un autre mécanisme pouvant conduire à des évolutions rapides, importantes et de ce fait peu souhaitées. Ce mécanisme est fort connu depuis longtemps, mais on peut le rattacher à un comportement plus général.

Supposons donné à l'époque t, le champ des vecteurs vitesses d'évolution des différentes propriétés des objets. Ce champ est linéarisable sur au moins un sous-espace de l'espace des propriétés: le contraire serait physiquement exceptionnel et étonnant. Le sous-espace dépend en général du point choisi au voisinage duquel on procède à la linéarisation; ce fait est ici secondaire. L'important est le caractère exponentiel des évolutions subséquentes des compo-

santes du point représentatif de l'économie, qui appartiennent au sous-espace sur lequel la linéarisation a été possible.

Cette évolution exponentielle locale est définie par une équation différentielle linéaire du type:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x.$$

Certains des coefficients de A(t) restent constants sur des périodes plus ou moins grandes; c'est le cas en particulier des coefficients institutionnels tels que taxes, taux de change. D'autres coefficients peuvent varier très faiblement, comme par exemple, souvent, le taux d'inflation. Lorsque les valeurs des composantes de x atteignent le bord du domaine des contraintes à l'intérieur duquel l'économie peut se mouvoir, il devient nécessaire de modifier de manière significative les valeurs de ces paramètres: l'expérience acquise chaque fois qu'on rencontre de pareilles situations devrait permettre de se faire une meilleure idée du domaine des contraintes et des ensembles de catastrophe, tant du point de vue qualitatif que quantitatif.

Ces comportements exponentiels, et par conséquent d'évolution rapide, ont donc un caractère naturel, imposé par les propriétés des linéarisations.

7. CONCLUSION

Nous nous sommes simplement efforcé, au cours de cet exposé, de cerner la réalité économique et de la représenter géométriquement. Les objets sont décrits par leur emplacement ou forme dans l'espace-temps, et leurs propriétés. Leur évolution est le résultat des actions physiques exogènes et des influences mutuelles. Cette géométrisation permet principalement d'acquérir une vision d'ensemble de l'économie, de promouvoir une forme de sagesse, puisqu'elle conduit à faire accepter comme naturel le caractère instable des mouvement économiques. Il est non moins naturel de rencontrer des perturbations locales et brutales. Elles peuvent provenir de l'instabilité constatée plus haut, du caractère non linéaire des évolutions, des influences réciproques, de l'existence de dynamiques rapides en général inaccessibles à l'expérience première, auxquelles on substitue des règles de comportement.

De nature phénoménologique, des modèles élémentaires sont proposés pour décrire l'évolution d'une demande ou la manière dont pourrait se faire un choix. Ces modèles reposent davantage sur l'expérience de pensée que sur l'observation statistique de l'économie. Ils sont donc présentés ici à des fins conceptuelles.

RÉSUMÉ

On propose dans ce texte les premières bases d'une formulation géométrique de la représentation économique. C'est par une formulation de ce type que pourront être abordés des problèmes de structure et les questions posées par leurs évolutions. Dans l'immédiat, on donne quelques conséquences économiques de résultats mathématiques généraux sur la stabilité. On examine des représentations géométriques de la demande et du mécanisme de la décision.

ABSTRACT

The first bases for a geometric representation of the economic reality are proposed in this text. Thanks to this type of formulation it will be possible to treat structural problems and the questions engendered by the evolution of these structures. In the present we give some economic consequences derived from the general mathematical results on stability. We investigate the geometric representations of demand and the decision mechanism.

BIBLIOGRAPHIE

C.P. Bruter, «Topologie et analyse des systèmes», in La notion de système dans les sciences contemporaines (J. Lesourne, éd.), Librairie de l'Université, Aix-en-Provence, 1982, t. I, 1-71.

F. Perroux, *Unités actives et mathématiques nouvelles*, Dunod, Paris, 1975.

E.C. Zeeman, «A catastrophe machine», in *Catastrophe theory*, Addison-Wesley, London, 1977, 409-415.