MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA CULTURE
COMITÉ DES TRAVAUX HISTORIQUES ET SCIENTIFIQUES

ACTES DU 114e CONGRÈS NATIONAL
DES SOCIETES SAVANTES
(Paris 1989)

Section des Sciences

INTERDISCIPLINARITÉ

SCIENTIFIQUE

PARIS
Editions du CTHS
1992

ACTES DU 114e CONGRÈS NATIONAL
DES SOCIÉTÉS SAVANTES

Paris 1989

BIFURCATION :
UN CONCEPT INTERDISCIPLINAIRE

Claude-Paul BRUTER *

Résumé

Les phénomènes fascinants et cruciaux de naissance et de disparition adviennent dans tous les domaines d'étude. Les mathématiciens ont, dans leur discipline, abordé de manière relativement récente l'étude consciente de ces types de phénomènes. Ils les ont appelés des bifurcations. Elles reposent sur deux notions essentielles : la singularité où se produisent des dégénérescences, et la perturbation. Les bifurcations se rencontrent dans le comportement des modèles statiques comme dynamiques. On donne dans chacun des cas quelques exemples de résultats, ainsi que des illustrations de ces résultats. L'examen des phénomènes de bifurcations éclaire sous un jour nouveau le problème des rapports entre continu et discontinu : on aborde *in fine* ce prolongement philosophique de la théorie mathématique de la bifurcation.

Summary

Fundamental phenomena of birth and death have only been studied recently by mathematicians, who call them bifurcations. They lean on two essential notions : the singularity where degenerescences occur, and the pertubation. Static and dynamic models give rise to bifurcations : some results and illustrations are given.

1. INTRODUCTION

Confronté à un monde caractérisé par l'infinie diversité *a priori* de ses constituants et de leurs transformations, l'être vivant n'a d'autre issue pour survivre que de procéder à des classifications des données recueillies par ses sens et engrangées dans son esprit. Cette activité classificatoire primordiale se trouve à la base de ce que nous nommons la Science. Toute œuvre scientifique accomplit un projet taxonomique, et les fruits de la Science ne peuvent se dessiner avant que l'Arbre de la classification n'ait atteint un stade de développement suffisamment avancé.

Le succès de la procédure classificatoire tient évidemment au fait que les objets d'une classe donnée possèdent au moins un même type de propriété. Un des objectifs primordial de la Science est par conséquent de dégager et de bien définir des propriétés, que ce soit en mathématiques ou dans les autres disciplines.

* Université Paris XII, Mathématiques, U.F.R. Sciences, Avenue du Général de Gaulle, 94010 Créteil Cedex.

"La Révolution interdisciplinaire aujourd'hui", Paris, 1989, p. 59-71.

ISBN 2-7355-0266 X
ISSN 0996-357X

Une propriété possède un intérêt d'autant plus grand qu'on la rencontre plus fréquemment : aussi la Science s'attache à la recherche d'universaux caractéristiques dans chacun des domaines qui font l'objet d'investigations. Certains universaux ont une portée sémantique et affective plus marquée que d'autres. C'est le cas en particulier de cette propriété que possèdent de nombreux objets, qui est d'évoluer, voire de se transformer radicalement. Ce sont ces transformations radicales que l'on nomme en mathématiques des bifurcations, en physique des transitions de phase, des phénomènes critiques, en mécanique des flambages et des ruptures, en histoire des révolutions, en économie des crises, dans le règne de la vie des naissances et des disparitions, des métamorphoses.

Ces transformations ne sont pas forcément fréquentes, elles présentent souvent au contraire un caractère rare, isolé, au point d'échapper entièrement à certaines études statistiques. Mais leur signification est décisive, et la mémoire des hommes entretient leur souvenir : les innombrables fêtes sont là pour rappeler les naissances et les disparitions des éléments constitutifs de la vie, la lumière, la terre, les êtres qui la peuplent, les sociétés qu'ils ont formées, les grands moments et les grandes chartes qui ont présidé à leur destin : ainsi célèbre-t-on chaque année le printemps et le jour de la sortie d'Egypte, et en 1989 en particulier, le bicentenaire d'une Révolution célèbre, et aussi le quarante-et-unième anniversaire de la Déclaration Universelle des Droits de l'Homme. Ces grands événements qui accompagnent la fondation d'un cours nouveau de l'évolution suscitent en nous très tôt, les belles interrogations naturelles auxquelles la Science et la Métaphysique s'efforcent d'apporter une réponse : "Qui a créé les hommes ?" demande déjà, avec curiosité, une enfant âgée d'à peine quatre ans.

Sur les outils abstraits permettant de mieux accéder à la connaissance de l'origine et de la fin des choses, les mathématiciens ont encore très peu à faire connaître, énormément à découvrir. Car ce sont des problèmes que, dans leur discipline, ils abordent, de manière consciente, depuis peu, et qui sont d'une remarquable complexité, même dans le cadre extrêmement simplifié par rapport à la réalité des modèles qu'ils traitent. Mais il va aussi sans dire que depuis des temps immémoriaux, les mathématiciens se sont très souvent penchés, tout à fait inconsciemment, sur le problème clé de la bifurcation.

2. LA NOTION DE BIFURCATION

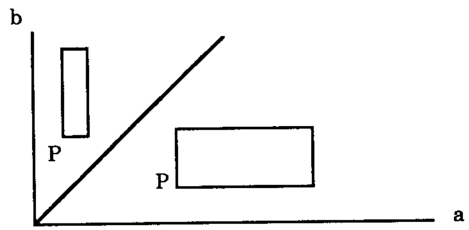
2.1. EXEMPLES GÉOMETRIQUES

La notion de bifurcation est très simple à définir, de manière approchée au moins. Un exemple géométrique élémentaire permettra d'introduire cette notion, tout en montrant que nos pères pratiquaient la bifurcation depuis longtemps, sans le savoir.

Sur une feuille quadrillée, dessinons deux axes de coordonnées, et prenons l'ensemble des points P de coordonnées non négatives (a,b). Attachons alors à chaque point P un rectangle dont les côtés parallèles à l'axe horizontal ont pour longueur a, et les côtés parallèles à l'axe vertical

ont pour longueur b. La donnée d'un point P suffit donc à caractériser la forme d'un objet appelé rectangle.

Le rapport f = a/b permet de distinguer différents types de rectangles, nous l'appellerons ici le **paramètre de forme** :



- lorsque a/b > 1, on est en présence d'un rectangle étiré horizontalement; on dira que ce rectangle a une forme de **type H**
- lorsque a/b < 1, le rectangle est étiré verticalement : le rectangle est de **type V**
- lorsque a/b = 1, le rectangle est un carré, il de **type C**.

La première bissectrice décrit le lieu des rectangles de type C dans le premier quadrant : la surface qu'elle occupe est de mesure nulle, alors que l'ensemble des rectangles de type H ou V occupe la quasi totalité du premier quadrant. Un carré est donc un objet **singulier** dans l'univers des rectangles.

Supposons qu'un objet se déplace continûment dans l'espace ordinaire à 3 dimensions, et de manière que sa forme également, rectangulaire, définie par les valeur a (t) et b (t) de deux paramètres, varie continûment. Le point P décrit alors dans le premier quadrant une courbe. Chaque fois que la courbe traverse la première bissectrice, on observe **alors un changement brutal du type morphologique** de l'objet : il était étiré horizontalement, le voici soudain étiré verticalement, et réciproquement. On dit alors qu'il y a bifurcation dans la forme de l'objet.

Il peut certes arriver que la trajectoire de P se confonde pendant un certain temps avec une portion de la première bissectrice, on dit alors qu'elle ne lui est pas transverse. Dans ce cas la forme carrée persiste. Mais on voit bien que cette situation est inhabituelle, on dit qu'elle n'est pas générique.

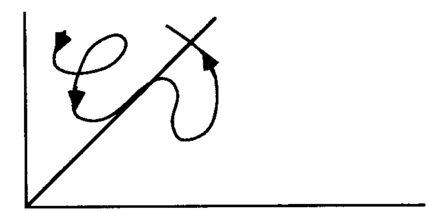
Dans le cas générique, la forme carrée est une forme transitoire. Comme la traversée de la première bissectrice ne dure qu'un instant, le passage d'une forme carrée est en général indécelable. Cette présence advient quand le paramètre de forme f prend la valeur de bifurcation égale à 1.

On peut présenter, dérivé du précédent, un autre exemple géométrique moins primitif, donnant des résultats plus spectaculaires. Considérons la famille de coniques d'équations de la forme

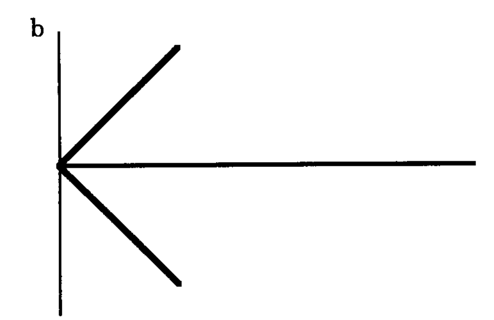
$$a x^2 + b y^2 = 1$$

Lorsque a et b sont positifs, on est dans le cadre des situations précédentes où les rectangles vrais sont remplacés par des ellipses vraies, et où le carré est remplacé par le cercle.

On peut d'ailleurs, par des déformations continues appelées *homéomorphismes*, passer de manière "insensible" du rectangle à l'ellipse, du carré au cercle. Si l'on appelle *variables* de *contrôle* ou encore *variables de bifurcation les variables* (a,b), et *ensemble de bifurcation* le lieu dans l'espace précédent des variables pour lesquelles une bifurcation se produit, en l'occurrence la demi-bissectrice du premier quadrant, on constate ici l'invariance de l'ensemble de bifurcation par homéomorphisme des données.



Si maintenant on impose seulement à a d'être positif, alors les déformations deviennent encore plus remarquables puisque, lorsque b est nul, l'ellipse se mue en deux droite verticales $\pm a^{-1/2}$ et lorsque b devient négatif, ce couple de droites se métamorphose en une hyperbole. Le diagramme de bifurcation se compose ici de la demi-bissectrice précédente et du demi-axe vertical positif a>0, et si l'on veut privilégier les hyperboles équilatères, de la demi-bissectrice du dernier quadrant.



Je vais maintenant examiner d'autres types d'exemples plus physiques. Ce sont les exemples de cette nature à partir desquels on a pris conscience du phénomène de bifurcation.

2.2. EXEMPLE MÉCANIQUE

L'esprit humain est ainsi construit qu'il doit être mis à plusieurs reprises en présence d'un même fait pour finir par en prendre conscience, pour évaluer le poids de son importance, pour entrevoir la

manière de plonger tout un ensemble de données dans une construction intelligible qui les éclaire.

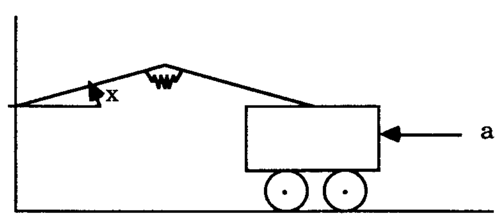
Naturellement, la présence de problèmes physiques joue un rôle majeur dans cette prise de conscience. Bien avant qu'on ait entrevu l'importance et la généralité des phénomènes "critiques", des mathématiciens et des physiciens avaient étudié des phénomènes de cet ordre. Ainsi, en 1834, Jacobi a étudié un problème déjà abordé par Newton, celui de la forme d'une masse fluide incompressible animée d'un mouvement de rotation, maintenue en équilibre par le seul jeu des forces gravitationnelles internes. Jacobi a trouvé que pour les valeurs supérieures à une valeur "critique" t_c d'un paramètre de forme t, défini comme le rapport

$$\frac{\text{énergie cinétique de rotation}}{\text{énergie potentielle de rotation}}$$

la forme était celle d'un ellipsoïde à trois axes inégaux.

Depuis, par le calcul ou l'expérience, on a constamment rencontré des valeurs critiques ou de bifurcation, comme par exemple dans les phénomènes variés de changements de phase, où, lorsque sont franchies les valeurs critiques, les milieux changent d'état, d'apparence, de comportement.

Dans un autre domaine de la physique, la mécanique, examinons par exemple le comportement d'une poutre horizontale fixée en une extrémité, et soumise en l'autre extrémité à une force de pression latérale a. La poutre va fléchir, et on veut étudier ses positions stables. On peut illustrer le comportement de la poutre par un dispositif mécanique sensiblement équivalent :



L'énergie potentielle de ce dispositif est

$$V(x, a) = x^2/2 + 2a(\cos(x) - 1)$$

La règle physique nous apprend que les états observables correspondent aux valeurs de x qui minimisent l'énergie potentielle. Pour ces valeurs, la dérivée de v par rapport à V s'annule; par conséquent

$$V'_x(x,a) = g(x,a) = x - 2a \sin(x) = 0$$

Avant de poursuivre, faisons une remarque toute simple. L'analyse est née presque en même temps que la géométrie analytique, au début du 17ième siècle. Et l'on peut dire que Fermat a alors fait de la bifurcation de manière implicite, lorsqu'il a entrepris de déterminer les extrema des courbes planes. Si en effet on examine une courbe plane définie par l'équation $a = h(x)$ ou encore $a - h(x) = g(x,a) = 0$, les points extrémaux (x,a) de la courbe sont ceux où **adviennent des changements dans le mode de croissance** de la courbe. Ces points extrémaux sont donc des points de bifurcation dans le mode d'évolution de la courbe : on les appelle des **points singuliers**, et on remarque tout naturellement qu'ils sont rares, en général isolés. Ces points singuliers vérifient donc ici $g_x(x,a) = 0$.

On aurait tort naturellement de s'arrêter en si bon chemin : il convient de rechercher des modifications internes de la forme des courbes plus intimes. Par chance, on sait que les fonctions dérivables admettent des développements tayloriens

$$h(x) = h(x_0) + (x - x_0)\, h^{(1)}(x_0) / 1! + (x - x_0)^2 h^{(2)}(x_0) / 2! + \ldots$$

où $h^{(n)}(x_0)$ désigne la nième dérivée de h par rapport à x prise en x_0, égale ici à la nième dérivée de g par rapport à x calculée en x_0. En étudiant donc les systèmes d'équations

$$g(x,a) = g^{(1)}(x,a) = 0$$
$$g(x,a) = g^{(1)}(x,a) = g^{(2)}(x,a) = 0$$
etc,

on pourra parvenir à une étude plus approfondie des phénomènes de bifurcation.

Contentons-nous ici d'examiner le cas où l'on a simultanément

$$g(x,a) = g^{(1)}(x,a) = 0.$$

On peut d'abord songer à regarder ce qu'il advient des solutions de ce système lorsque **est perturbé** a, considéré comme variable exogène de contrôle (ou de bifurcation). Le problème revient alors à résoudre le système et à étudier ses solutions, et en particulier le **nombre** de ces solutions, lorsque a varie. Les valeurs a_c pour lesquelles ce nombre changera seront des valeurs de bifurcation. Il apparaît alors que les vieux problèmes consistant à résoudre des équations dépendant de paramètres reviennent à traiter des problèmes de bifurcation.

Dans bien des cas cependant, on raisonne de manière plus ample. On considère que la perturbation qui touche a n'est qu'un épiphénomène, révélateur d'une **perturbation plus profonde qui affecte la fonction g elle-même**.

Il y a bien des manières de définir une perturbation de g. Celle que l'on choisit dépend du problème physique posé, comme du savoir-faire mathématique. De manière générale, ces perturbations sont opérées par l'intermédiaire de transformations de contact : elles ont la propriété de déformer continûment les graphes des fonctions tout en maintenant l'invariance du nombre de leurs extrémums (réels ou non.).

Prenons le cas des équations

$$g(x,a) = x - 2a \sin(x) = 0$$
$$g^{(1)}(x,a) = 1 - 2a \cos(x) = 0$$

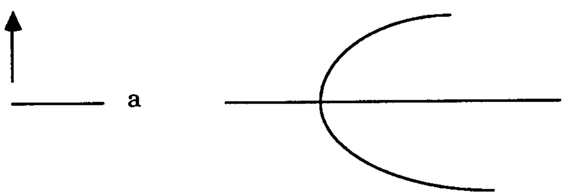
g et $g^{(1)}$ s'annulent simultanément en $x = 0$, $a = 1/2$. Au voisinage de ce point singulier, le développement limité de g s'écrit

$$g(x,a) = x^3/6 - 2(a - 1/2)x + \text{termes d'ordre supérieur.}$$

Un changement de variable adéquat transforme $x^3/6$ en $\underline{x}^3$, $2(a - 1/2)x$ en $\underline{a}\underline{x}$. Alors au voisinage de zéro des nouvelles variables d'état et de contrôle, on montre, de manière non triviale, que g(x,a) est une perturbation de la fonction :

$$G(\underline{x},\underline{a}) = \underline{x}^3 - \underline{a}\,\underline{x}$$

pour $\underline{a} < 0$ $(a < 1/2)$, $G = \underline{x}(\underline{x}^2 - \underline{a})$ a une seule solution. G a trois solutions si $\underline{a} > 0$. Appelons *diagramme de bifurcation* le graphe des solutions de $G(\underline{x},\underline{a}) = 0$; appelé la "fourche" (mathématique), il se présente ainsi :



En résumé, le système mécanique simplifié admet une seule position d'équilibre quand $a < 1/2$, bifurque en $a_c = 1/2$, et peut connaître trois positions d'équilibre possible quand $a > a_c$. Naturellement, l'étude est à parfaire par celle de la stabilité des positions d'équilibre.

2.3. EXEMPLES DYNAMIQUES

Le terme de bifurcation a été emprunté à la terminologie ferroviaire, et introduit par Poincaré dans ses travaux de dynamique qualitative.

Donnons d'abord un résultat un peu abstrait mais qui se rattache directement à l'étude précédente. Supposons qu'un objet ou un phénomène soit décrit par n variables $(y_1,\ldots, y_n) = y$, et que son évolution soit régie par une équation différentielle dite ordinaire,

$$dy_i/dt = F_i(y,a) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

qu'on écrit globalement sous la forme

$$dy/dt = F(y,a)$$

$a = (a_1, \ldots, a_k)$ désigne ici un vecteur de variables de bifurcation (ou de contrôle).

Les états invariants au cours du temps, singuliers dans le langage de la dynamique qualitative, vérifient l'équation

$$dy/dt = F(y,a) = 0.$$

On suppose que, par exemple pour $a = 0$, il existe un état invariant $\underline{y}$ (par conséquent $F(\underline{y},0) = 0$), et que l'une des variables d'état, disons $\underline{y}_1$, devienne linéairement dépendante des autres composantes de $\underline{y}$. Le système **perd de sa richesse structurelle**. Ceci se traduit par cette propriété que le rang de la matrice des dérivées partielles premières de F par rapport aux y_j au point ($\underline{y}$,0) devient égal à n - 1.

Lorsque a est perturbé au voisinage de 0, la solution ($\underline{y}$,0) peut éclater en plusieurs solutions invariantes. On montre encore qu'on peut décrire ces solutions grâce à une seule fonction g (x,a) = 0, dont on étudie la perturbation comme précédemment. Par ailleurs, la connaissance du signe de la dérivée de g suffit pour déterminer la stabilité des points singuliers.

Ces résultats [1,2] ont pu trouver des illustrations tant en botanique, dans l'étude de la morphogenèse végétale, qu'en économie, dans l'étude du contrôle de l'inflation.

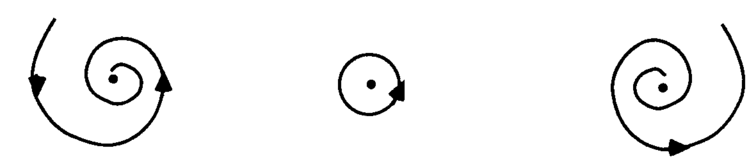
Cependant, le problème de bifurcation que l'on se pose dans l'étude des équations différentielles et en dynamique qualitative est plus général. Il s'agit de savoir comment sont transformées les trajectoires lorsque sont perturbées les variables de bifurcation a ou l'application F. Si les trajectoires conservent la même apparence, *i.e.* restent homéomorphes tout en conservant le même sens de parcours, on dit qu'il y a stabilité structurelle. En traversant les valeurs de bifurcation, on change de domaine de stabilité structurelle.

L'exemple suivant est classique. On considère le système différentiel linéaire à deux dimensions

$$dy/dt = F(y,a) = M(a)\, y = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Selon que a est négatif, nul ou positif, aux solutions de ce système sont associées des trajectoires ayant les formes suivantes :

a < 0 a = 0 0 < a

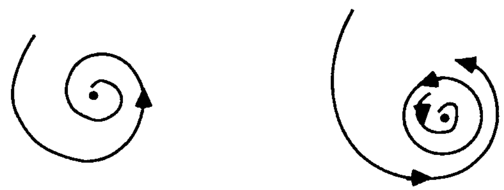


Le vecteur vitesse dy/dt en un point est somme d'un vecteur vitesse "circulaire" et d'un vecteur vitesse "radiale" qui ramène (a < 0) le mobile vers l'origine, ou l'en éloigne (a > 0).

M (a) est somme d'une matrice de rotation et d'une matrice d'homothétie négative	M (a) est simplement matrice de rotation	M (a) est somme d'une matrice de rotation et d'une matrice d'homothétie positive

Dans le cas où a < 0 (resp. a > 0), l'origine est appelée un foyer attractant (resp. répulsant). Dans le cas où a = 0, l'origine est appelée un centre : toute les trajectoires sont ici des cercles centrés à l'origine. Si l'on pense en termes géométriques, et que l'on cherche à évoluer continûment du cas I (a < 0) au cas III (a > 0), on voit qu'il est nécessaire de passer par la phase transitoire où une trajectoire au moins est un cercle. L'ensemble de bifurcation est ici l'origine de la droite réelle.

En fait, la situation présente est la plus dégénérée qui soit. Les dessins suivant montrent d'autres passages plus graduels de la situation I à la situation II (a = 0) :



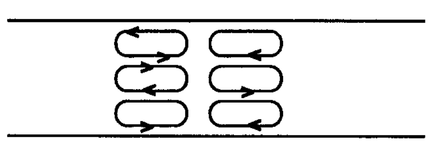
Le passage du cas 1 au cas 2 s'appelle la bifurcation de Poincaré-Hopf. Elle traduit l'apparition spontanée d'un comportement oscillant.

Ce phénomène a été observé dans l'étude des oscillations électriques, mathématiquement décrites dans les années 20 par les équations de Van der Pol et de Liénard. Mais on rencontre aussi ce phénomène en chimie et en biochimie : lorsque dans de tels milieux certaines concentrations franchissent des valeurs critiques, il arrive que les concentrations d'autres produits se mettent à varier périodiquement, engendrant de jolis phénomènes de changements de couleurs. On peut penser que l'apparition de nombre de comportements périodiques (le rire) pourrait être représentée par des bifurcations du genre Hopf.

C'est également en hydrodynamique que l'on observe des phénomènes spectaculaires. Comme on le sait, certains phénomènes de turbulence peuvent se représenter par une suite dense de bifurcations conduisant à des structures abusivement appelées chaotiques. Voici ici un exemple plus simple de phénomène hydrodynamique, celui de la convection de Bénard.

On place un liquide entre deux parois horizontales, et on chauffe la plaque inférieure. Au delà d'une température critique, le milieu fluide se divise en cellules, et le liquide dans chaque cellule décrit des trajectoires cycliques appelées des "rouleaux de Bénard". On estime que des équations obtenues par Lorenz décrivent correctement l'évolution de ce milieu; la bifurcation de Hopf y joue un rôle essentiel :

Chaud



Froid

Il est facile de fabriquer, à partir des équations de l'exemple fondamental précédent, les équations d'un système différentiel présentant une bifurcation de Hopf (ou même un nombre prescrit à l'avance de telles bifurcations). Pour cela pertubons le système initial en celui-ci :

$$dx/dt = M(a) \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} - b[(x_1)^2 + (x_2)^2] \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

Quand x est très petit, le système perturbé se comporte comme le système initial; a étant positif, la composante radiale du vecteur vitesse entraîne le mobile à s'éloigner de l'origine. Lorsque a est positif et que x est grand, le long du cercle

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 = r^2$$

la composante $- b\, r^2\, x$ est prépondérante, le vecteur vitesse est orienté alors de telle façon que le mouvement est ramené vers l'origine. Les trajectoires dirigées vers des évolutions contraires viennent fusionner en une trajectoire limite fermée.

Il est d'ailleurs facile de fabriquer des exemples physiques simples pour observer le comportement de trajectoires dans le plan. Il suffit de prendre des modèles géographiques et hydrauliques. On obtient par exemple les trajectoires précédentes en faisant tourner autour de son axe une coupelle ayant la forme d'un W, et en observant le mouvement d'une goutte liquide qui ruisselle sur cette surface.

a et b sont les paramètres de forme de la coupelle. Il est évident que si b varie continûment en fonction de a, et que si, dans l'espace des paramètres de forme (de bifurcation), pour des valeurs de a la trajectoire de b n'est pas transversale à l'ensemble de bifurcation k (a,b), alors on pourra observer, comme ont pu déjà le faire des expérimentateurs en optique, **des retards à la bifurcation**.

3. ASPECTS PHILOSOPHIQUES

Naturellement, des phénomènes de bifurcation ont été étudiés pour des classes générales de systèmes dynamiques et d'équations différentielles (par exemple du type gradient, de type conservatif, à deux dimensions, etc...), pour des systèmes discrets récurrents où l'on fait apparaître les phénomènes chaotiques. Le rôle des groupes de symétrie et de leurs brisures qui correspondent à des bifurcations est également pris en compte.

Ce n'est pas le panorama fort vaste et complexe des ensembles de bifurcation qui retiendra ici notre attention, mais plutôt les caractéristiques profondes des phénomènes de bifurcation tels qu'ils apparaissent déjà sur les exemples précédents.

Avant qu'il y ait modification de structure, il faut que se produisent d'abord des dédifférenciations, des destructurations de l'état préexistant. C'est ce phénomène de destructuration qui est essentiel et qui advient aux instants et aux valeurs critiques, de manière générale pour les valeurs de bifurcation. La nécessaire destructuration est **physique et mathématique**. Elle est plus ou moins prononcée. Elle ne peut que déboucher évidemment sur un état plus stable.

Comme on l'a aussi observé, cette destructuration est rare, singulière. Et les états de transition, c'est là une tautologie, sont fugaces, alors que les états stables sont persistants.

Ces deux simples remarques d'une part mériteraient d'être mieux étoffées, d'autre part ont diverses conséquences qui pourraient être plus longuement examinées.

Les phénomènes de dédifférenciation-redifférenciation sont bien connus des embryologistes, ceux de destructuration-restruturation fréquemment évoqués par les économistes (K. Marx, F. Perroux), par les historiens (A. Toynbee), voire par les artistes (R. Huygue à propos de P. Picasso).

Pour l'essentiel, dans ces phénomènes, des variables pertinentes deviennent soudain muettes, ou, à un moindre degré, tout en restant présentes, perdent ce caractère de variable essentielle. Lorsqu'elles deviennent muettes, le coefficient qui les affecte prend la valeur nulle. On peut dire qu'elles sont en quelques sorte supprimées par annihilation. Elle restent pourtant potentiellement présentes : elles peuvent à nouveau resurgir au cours de bifurcations ultérieures. On peut même envisager des situations ou des variables potentiellement présentes dès l'origine n'aient jamais encore été exprimées avant l'apparition d'une bifurcation guidée par d'autres transformations internes et/ou par des évolutions de paramètres exogènes. Trivialement par exemple, la fonction

$$g(x_1, x_2) = a\, x_1$$

devient, lorsque b quitte la valeur nulle,

$$g(x_1, x_2) = a\, x_1 + b\, x_2$$

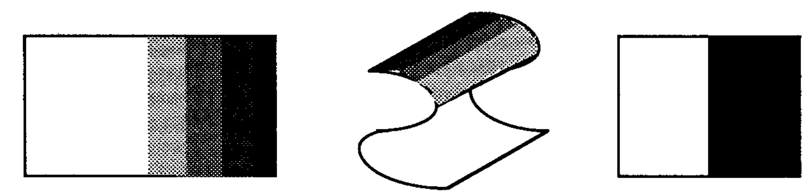
Sans aller jusqu'à l'annihilation, la perte de pertinence advient également lorsque la variable perd de son caractère d'indépendance, et devient vassale des autres variables. La liaison est linéaire dans les cas les plus simples.

Dans tous les cas, l'entité considérée perd donc des degrés de liberté, de sa capacité apparente d'autonomie globale vis-à-vis de son environnement. En fait, **elle acquiert des potentialités plus élevées**.

A l'échelle paléontologique par exemple, les catastrophes naturelles, les naissances des nouveaux phylums des nouvelles espèces sont pour la plupart des phénomènes fugaces; si, par ailleurs, des bifurcations entraînant des métamorphoses ont eu lieu, elles ont eu en général une durée de réalisation trop courte pour laisser des traces aisément décelables. Curieusement, les discussions sur les théories évolutionnistes tiennent peu compte de ces faits. Mais ce n'est pas le lieu ici d'aborder la problématique évolutionniste. Mentionnons simplement en biologie le rôle immense que jouent sans aucun doute les phénomènes de bifurcations dans le dynamique cellulaire [3], l'embryologie ou en immunologie. Nombre de changement rapides du comportement, fixation soudaine, brusque apparition de passions, relèvent sans aucun doute également de la théorie de la bifurcation.

Le point essentiel est que des évolutions très rapides peuvent s'engager, notamment au cours de processus de bifurcation. Leur durée, qu'on peut parfois calculer, est sans doute souvent trop brève pour qu'on puisse espérer les suivre par l'observation directe - la limite présente de durée d'observation semble être obtenue en chimie où l'on a observé des états de transition de 200 femtosecondes (200.10^{-15} sec.).

Ces évolutions rapides peuvent être celles de morphologies, voire de topologies. Imaginons une feuille de papier comportant une plage sur laquelle est fixé un continuum qui va du blanc ou noir. Cette feuille est brutalement pliée, de sorte que vue de dessus



l'observation ne révèle que deux plages, l'une blanche l'autre noire. L'illusion de l'observation fait croire ici à la présence d'une discontinuité constitutive au niveau des coloris.

Ce schéma très simple montre qu'on peut mettre en oeuvre divers types de procédures à la fois dynamiques et topologiques, qui permettent de plonger un milieu apparemment discontinu dans un milieu continu, de sorte que la discontinuité n'est qu'une apparence trompeuse.

Pourtant si l'on prend une pâte à tarte et si on la plie et la replie inlassablement, l'écrasant dans une direction, l'étalant dans l'autre, on finit par obtenir un milieu constitué d'une myriade de particule isolées : c'est, du point de vue mathématique, par ce procédé qu'est construit le "collier d'Antoine", ou le "fer à cheval de Shub-Smale". La fabrication d'ensembles totalement discontinus, à partir de milieux continus et par des procédés dynamiques, donne à penser que la discontinuité est aussi une réalité; mais elle est ici seconde par rapport à la continuité, elle s'en déduit.

Dans les deux cas, la discontinuité, qu'on la tienne pour apparente, fictive, ou réelle, résulte de phénomènes de bifurcation advenant dans le cadre d'évolutions, de procédures dynamiques.

Dans la dernière qui est décrite, il est intéressant de relever que cette transformation de boulanger finit par se figer sur une structure discontinue mais fixe, situation apparemment paradoxale qui allie le continu au mouvement, lequel finit par dégénérer dans le discret associé à l'immobile, évolution en tout point parallèle à celle qui va de la vie à la mort, à celle aussi naturelle, de la démarche analytique qui est toujours mise en face d'une globalité, la brise et en étudie les parties.

Mais en dehors du monde abstrait des objets mathématiques, la reconstitution de l'objet global à partir de ses seuls éléments est impossible, car il faut pour souder les parties entre elles introduire des données extérieures à l'objet, des "colles", des "artifices". La démarche analytique les cache les oblitère, les chasse.

A l'inverse, la construction des infiniment petits à la Robinson montre qu'il est toujours possible de concevoir un univers peuplé de particules aussi fines que l'on veut; l'apparence du tout peut encore donner l'illusion d'un continuum. Mais comme je viens de le dire, pour posséder une réalité physique, ces particules doivent être tenues entre elles par des liants, fussent-ils des champs dont la véritable nature échappe à notre intelligence. La construction d'un univers à partir de données isolées, et, *a priori*, purement indépendantes les unes des autres, est donc celle d'un monde artificiel.

Ma conviction alors sera de dire que la fragmentation du monde en singularités naturelles totalement isolées est un leurre de l'esprit, fort utile au demeurant. Celui rétorquant que le façonnage de pierres parfaitement ajustées peut permettre la construction de pyramides magnifiques démontables et remontables à volonté, aurait oublié la présence du liant qu'est la pesanteur. La manifestation de bifurcations au caractère extrêmement rapide, parfois vagabondes, s'accompagnant de changements de phase, de métamorphoses, c'est-à-dire de dissolutions et de récompositions de structures même échappant à tous nos moyens d'investigation, soutient la primauté du continu sur le discontinu, esseulé, inerte, sans rayonnement.

BIBLIOGRAPHIE

1. BRUTER (C.P.), 1989, "La notion de singularité et ses applications", *Revue Intern. de Systémique*, vol. 3, n° 4, p. 437-458.
2. GOLUBITSKY (M.) et SCHAEFFER (D.G.), 1984, *Singularities and groups in bifurcation theory*, vol. 1, Springer-Verlag New-York.
3. GOLUBITSKY (M.), STEWART (I.) et SCHAEFFER (D.G.), 1988, *Singularities and groups in bifurcation theory*, vol. 2, Springer-Verlag New-York.